CURVAS SOBRE UNA SUPERFICIE QUE CUMPLEN LA CONDICIÓN

$$\delta \int f(\varkappa, \tau)\, ds = 0.$$

Siendo $\varkappa$ la curvatura, τ la torsión y s el arco de una curva sobre una superficie, nuestro problema consiste en buscar las condiciones que esta curva debe cumplir para que se anule la primera variación $\delta \int f(\varkappa\,;\, \tau)\, ds$ para toda deformación elemental *sobre la superficie.*

Por ejemplo, el caso particular $f = C^{te}$ no es más que el caso de las líneas geodésicas.

El procedimiento que vamos a seguir descansa en la observación fundamental siguiente:

Sea $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u\,,v)$ la ecuación vectorial de la superficie, referida a un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonal, es decir, $\mathbf{r}_u \,.\, \mathbf{r}_v = 0$. Siempre se puede suponer que la línea dada sobre la superficie es $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u\,,o)$. Por una variación de la misma sin abandonar la superficie se obtendrá otra línea próxima de ecuación

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u\,,\,\varepsilon\, v\,(u)) = \mathbf{r}\,(u\,,o) + \varepsilon\, v\,(u)\ \mathbf{r}_v\,(u\,,o) + \ldots$$

y como *primera aproximación* podemos tomar, por tanto,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\,(u\,,o) + \varepsilon\, v\,(u)\ \mathbf{r}_v$$

Es decir: *todo desplazamiento sobre la superficie equivale, en primera aproximación, a un desplazamiento sobre una superficie reglada formada por normales a la curva primitiva.*

Esta circunstancia nos permite, en el problema que nos ocupa, proceder de una manera inversa, suponiendo dada de antemano y en el espacio una curva y ver sobre qué banda superficial reglada y normal puede deformarse permaneciendo estacionaria la integral

$$\mathrm{I} = \int f(\varkappa\,,\tau)\, d\,s.$$

De esta manera obtendremos la relación angular que debe existir entre la normal a una superficie y la normal principal a la curva de la misma, que haga extremal a la integral anterior.

Puede suceder que la curva sea tal que la condición $\delta\,\mathrm{I} = 0$ se cumpla para toda deformación, es decir, para cualquiera que sea la banda reglada normal sobre la cual la variación se considere. Estas curvas han sido estudiadas en casos particulares por Radon (*) y en general por Irrgang (**).

I. Primera variación de la curvatura y de la torsión.

Sea la curva del espacio $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ referida al arco s como parámetro. Representemos por $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$ a los vectores tangente, normal principal y binormal.

Se cumplen las fórmulas de Frenet

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \varkappa \mathbf{n}$$

$$[1] \qquad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\varkappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}$$

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n}$$

donde $\varkappa$ y τ son la curvatura y torsión de $\mathbf{r}(s)$ respectivamente. Consideramos sólo las deformaciones de la curva tales que el plano normal en cada punto corta a la curva variada en un solo punto. Entonces la ecuación de la curva variada será de la forma:

$$[2] \qquad \bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + (\operatorname{sen}\theta\, \mathbf{n} + \cos\theta\, \mathbf{b})\, \varepsilon\, h(s)$$

donde θ representa el ángulo entre la binormal y la dirección normal a la curva según la cual cada punto se desplaza. La función $\varepsilon\, h(s)$ representa la longitud de este desplazamiento.

Teniendo en cuenta las fórmulas [1], es fácil ver que

$$\left(\frac{d\bar{\mathbf{r}}}{ds}\right)^2 = 1 - 2\varkappa h \operatorname{sen}\theta \,.\, \varepsilon + \varepsilon^2 (\,.\,.\,) + \ldots$$

de donde, llamando $d\bar{s}$ al elemento de arco de la curva variada, se tiene

$$[3] \qquad d\bar{s} = (1 - \varkappa\, h \operatorname{sen}\theta \,.\, \varepsilon + \varepsilon^2 (\ldots) + \ldots)\, ds$$

Al pasar a la curva variada $\bar{\mathbf{r}}(s)$, la curvatura y torsión de la primitiva $\mathbf{r}(s)$ sufren unos incrementos cuyas primeras variaciones vienen dadas por las fórmulas:

(*) Ver Blaschke, "Differentialgeometrie". T. I, pág. 53, 3.ª edición.

(**) *Math. Zeits.*, 37, pág. 381 (1933).

[4] $$\delta \varkappa = \varepsilon \left[(\mathbf{n}, \mathbf{y}'') - 2 \varkappa (\mathbf{t}, \mathbf{y}') \right]$$

[5] $$\delta \tau = \varepsilon \left\{ (\varkappa \mathbf{b} - \tau \mathbf{t}, \mathbf{y}') + \frac{d}{d s} \left[\frac{1}{\varkappa} (\mathbf{b}, \mathbf{y}'') \right] \right\}$$

En estas fórmulas hemos puesto

[6] $$\mathbf{y} = h (\operatorname{sen} \theta \, \mathbf{n} + \cos \theta \, \mathbf{b})$$

Los acentos indican derivadas respecto s y los paréntesis indican multiplicación escalar de vectores. Estas dos fórmulas para $d \varkappa$ y $d \tau$ se encuentran citadas en la "Differentialgeometrie", de Blaschke (*).

II. LÍNEAS EXTREMALES DE LA TORSIÓN TOTAL Y LÍNEAS D.

Empezaremos por estudiar el caso particular notable de ser $f(\varkappa, \tau) = \tau$, es decir:

[7] $$I = T = \int \tau \, d s$$

Para la curba deformada [2] la torsión total será

$$\bar{T} = \int \bar{\tau} \, d \bar{s}$$

siendo $\bar{\tau} = \tau + \delta \tau + \varepsilon^2 (\ldots)$ y $d s$ está dado por [3].

Luego el término que contiene a ε en la diferencia $\bar{T} - T$ es

[8] $$\delta T = \int \delta \tau \, d s - \tau \varkappa h \operatorname{sen} \theta \, . \, \varepsilon \, d s$$

que nos da la primera variación de la torsión total T.

La variación $\delta \tau$ de la torsión viene dada por [5], o sea teniendo en cuenta [6]:

$$\delta \tau = \varepsilon \left\{ [h' \cos \theta - h \operatorname{sen} \theta \, . \, \theta' + 2 \tau h \operatorname{sen} \theta] \varkappa + \frac{d}{d s} \left[\frac{1}{\varkappa} (\mathbf{b}, \mathbf{y}'') \right] \right\}$$

donde los acentos indican derivadas respecto el arco s.

Sustituyendo en [8] y suponiendo además que en los extremos de la curva es

[9] $$h(s_0) = h(s_1) = h'(s_0) = h'(s_1) = h''(s_0) = h''(s_1) = 0$$

resulta

$$\delta T = \varepsilon \int (\varkappa h' \cos \theta - \varkappa h \operatorname{sen} \theta \, . \, \theta' + \varkappa \tau h \operatorname{sen} \theta) \, d s$$

(*) T. I, págs. 52 y 64, 1930.

Integrando por partes el primer sumando y teniendo en cuenta [9] queda:

[10 $$\delta T = \varepsilon \int (\varkappa \tau \operatorname{sen} \theta - \varkappa' \cos \theta)\, h(s)\, ds$$

Si se trata de una *curva cerrada,* esta fórmula [10] es válida sin necesidad de la hipótesis [9].

Si queremos que sea $\delta T = 0$ *para cualquier función* $h(s)$, la banda reglada sobre la cual debe tener lugar la deformación debe cumplir la ecuación

[11] $$\varkappa \tau \operatorname{sen} \theta - \varkappa' \cos \theta = 0$$

Recordemos que $\theta = \theta(s)$ es el ángulo que forma en cada punto la dirección normal de deformación con la binormal a la curva. La ecuación [11] nos determina por tanto el valor de este ángulo.

Prescindiendo del caso trivial de la línea recta ($\varkappa = 0$), tenemos:

a) Si $\tau = 0$ y $\varkappa' \neq 0$ es $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Es decir, para que la torsión total de una curva plana permanezca estacionaria, la curva no debe salir de su plano.

b) Si $\tau \neq 0$ y $\varkappa' = 0$ es $\theta = 0$. Es decir, las curvas alabeadas de curvatura constante, al deformarse de manera que cada punto se mueva sobre la binormal, conservan estacionaria su torsión total. En general, la ecuación [11] nos da:

[12] $$\operatorname{tang} \theta = \frac{\varkappa'}{\varkappa \tau}$$

Esto nos dice que: *exceptuado el caso de la línea recta, la banda superficial reglada normal sobre la que una curva, cerrada o abierta con las condiciones* [9] *en los extremos, puede deformarse permaneciendo estacionaria la torsión total, es única y determinada por la condición* [12].

Recordemos ahora que el centro de la esfera osculatriz en un punto de la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ está dado por (*)

$$\mathbf{z} = \mathbf{r} + \frac{1}{\varkappa}\,\mathbf{n} - \frac{\varkappa'}{\varkappa^2 \tau}\,\mathbf{b}$$

lo cual nos dice que el ángulo θ que verifica la ecuación [12] es el correspondiente a la tangente a la esfera osculatriz situada en el plano normal a la curva. Con esto el resultado anterior puede también enunciarse:

Para que la torsión total de una curva cerrada o abierta con las con-

(*) Ver, por ej., Blaschke, "Differentialgeometrie", pág. 33. Aquí nosotros representa por τ a la torsión, no a su inversa o radio.

diciones [9] *permanezca estacionaria, su variación normal debe ser en cada punto tangente a la esfera osculatriz correspondiente.*

El recíproco es también cierto, puesto que si se cumple la condición [12] se cumplirá la [11] y por tanto si la curva es cerrada o si siendo abierta se cumplen también además las [9], será $\delta\ T = 0$.

Supongamos ahora una línea sobre una superficie. Si ella es tal que por deformación sobre la superficie verifica a la ecuación $\delta\ T = 0$, como por la observación hecha al principiar este trabajo la deformación sobre la superficie equivale a una deformación sobre la banda de normales a la línea que es tangente a la superficie, cada una de estas normales deberá ser tangente a la esfera osculatriz a la línea y por tanto ésta tangente a la superficie.

Las líneas sobre una superficie tales que la esfera osculatriz en cada uno de sus puntos es tangente a la superficie, han sido estudiadas por Darboux (*) y más tarde se las ha llamado líneas D. Con lo cual queda establecido el teorema:

Toda línea D *de una superficie, si es cerrada verifica la ecuación* $\delta\ T = 0$ *para toda deformación sobre la superficie, si es abierta cumple esta ecuación para toda variación con las condiciones* [9].

De aquí se puede también deducir que: *la superficie esférica es la única superficie tal que la torsión total de todas sus líneas cerradas es constante* (**). Para demostrarlo basta considerar intersecciones de esta superficie con esferas variables. Si las intersecciones son siempre planas serán circunferencias y por lo tanto la superficie una esfera. Si existiesen intersecciones alabeadas, como que en cada punto de las mismas no hay más que una dirección normal, según la cual una deformación infinitesimal conserve la torsión total estacionaria (dirección dada por [12]), resulta que a lo largo de dicha línea la superficie dada y la esfera con que se corta deberían ser tangentes. Debiendo ocurrir esto para toda intersección, la superficie debe ser una esfera.

Otro problema que podemos resolver es el siguiente: ¿en qué caso la banda de normales a una curva dada según la cual su torsión total T permanece estacionaria es desarrollable? En tal caso deberá ser:

$$\theta(s) = \int_{s_0}^{s} \tau\, d\, s$$

(*) Paris. C. R., **73** (1871). Se puede ver literatura sobre estas líneas en la *Encyklopädie der Math.*, III_3, pág. 181.

(**) El que la superficie esférica cumple esta condición es cosa sabida, puesto que la torsión total de las curvas esféricas es nula. Ver, por ej., W. Fenchel, "Über einen Jacobischen Satz der Kurventheorie", *Tôhoku Math. Journ.*, vol **39**. Parte I.

Otra demostración de la propiedad enunciada ha sido dada por nosotros en "R. M. H. A.", núm. 1, 1935.

y sustituyendo en [12] queda

$$\left(\tau \operatorname{tang} \int_{s_0}^{s} \tau\, d s\right) d s = \frac{d \varkappa}{\varkappa}$$

e integrando

$$- \log \cos \int_{s_0}^{s} \tau\, d s = \log C \varkappa \quad ,, \quad \varkappa = \frac{1}{C \cos \int_{s_0}^{s} \tau\, ds}$$

o sea

$$\rho = C \cos \int_{s_0}^{s} \tau\, d s \quad .$$

que nos dice que la curva debe ser *esférica*, o sea: *las únicas curvas por las que pasa una banda desarrollable de normales por deformación sobre la cual* (con las condiciones [9]) *la torsión total permanece estacionaria, son las curvas esféricas.*

Obsérvese que este resultado, según lo establecido anteriormente, equivale al conocido de que toda línea de curvatura de una superficie que a la vez es línea D, es esférica.

III. Líneas extremales de la curvatura total.

Consideremos ahora el otro caso particualr de ser $f(\varkappa, \tau) = \varkappa$, es decir, queremos buscar las propiedades de las líneas sobre una superficie que cumplen la condición $\delta\ K = 0$, siendo

$$K = \int \varkappa\, d s$$

Procederemos también a la inversa como antes. Supongamos una curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}\ (s)$ en el espacio. Consideremos la curva deformada [2] cuya curvatura total es

$$\bar{K} = \int \bar{\varkappa}\, d \bar{s} \quad .$$

siendo

$$\bar{\varkappa} = \varkappa + \delta \varkappa + \ldots$$

con lo cual el término en ε de la diferencia $\bar{K} - K$ será

$$[13] \qquad \delta K = \int \delta \varkappa\, d s - \int \varkappa^2 h \operatorname{sen} \theta \,.\, \varepsilon\, d s$$

Según [4], el valor de $\delta\ \varkappa$ es:

$$\delta \varkappa = \varepsilon\Big[(h \operatorname{sen} \theta)'' - (\tau\, h \cos \theta)' + \varkappa^2\, h \operatorname{sen} \theta - \tau\,(h \cos \theta)' - \tau^2\, h \operatorname{sen} \theta\Big]$$

Sustituyendo en [13] e integrando por partes se tiene, si *la curva es cerrada,*

$$[14] \qquad \delta K = \varepsilon \int (\tau' \cos \theta - \tau^2 \operatorname{sen} \theta)\, h(s)\, d s$$

Si la *curva es abierta* hay que suponer además que la variación [2] es tal que en los extremos se verifica:

$$[15] \qquad h(s_0) = h(s_1) = h'(s_0) = h'(s_1) = 0$$

y se obtiene el mismo resultado [14].

Si se debe cumplir la condición $\delta\ K = 0$ cualquiera que sea la función $h(s)$, deberá ser

$$[16] \qquad \tau' \cos \theta - \tau^2 \operatorname{sen} \theta = 0$$

que nos da la manera de determinar $\theta(s)$ en cuya dirección puede deformarse la curva, permaneciendo estacionaria la curvatura total K.

Si la curva es plana, $\tau = 0$, el ángulo $\theta(s)$ es indeterminado, o sea *las curvas planas son* LAS ÚNICAS *que de una manera absoluta (es decir, para cualquier deformación)* (*) *mantienen estacionaria su curvatura total* $\int \varkappa\, d s$.

Si $\tau \neq 0$ es

$$[17] \qquad \operatorname{tang} \theta = \frac{\tau'}{\tau^2}$$

De aquí se deduce que: *las curvas de torsión constante son las únicas que por una deformación (en las condiciones* [15]) *en la que cada punto se desplaza según la binormal correspondiente, conservan su curvatura total estacionaria.*

Esto equivale a la proposición siguiente: *sobre una superficie, las propiedades de ser una línea de curvatura total estacionaria, geodésica o de torsión constante, son tales que verificándose dos de ellas se cumple la tercera restante.*

De [12] y [17] se puede deducir la condición que debe cumplir una línea para que admita una banda reglada de normales por deformación sobre la cual se conserven estacionarias su curvatura total y su torsión total al mismo tiempo. Deberá ser:

$$\frac{\varkappa'}{\varkappa\, \tau} = \frac{\tau'}{\tau^2}$$

(*) En realidad, esto tiene importancia para las *curvas cerradas*. Para las *curvas abiertas,* las restricciones [15] hacen este resultado casi evidente.

de donde

$$\frac{\varkappa}{\tau} = \text{Cte.}$$

o sea, *la línea debe ser de igual pendiente.*

IV. Caso general: curvas sobre una superficie con la condición

$$\delta \int f(\varkappa, \tau)\, d s = 0.$$

Lo mismo que para los casos particulares precedentes, supongamos una curva en el espacio y propongámonos determinar la banda superficial de normales según la cual la curva pueda deformarse manteniendo estacionaria la integral $\mathrm{I} = \int f(\varkappa, \tau)\, d s$.

Si [2] es la curva variada, teniendo en cuenta [3], es:

$$\delta \mathrm{I} = \int \left(\frac{\partial f}{\partial \varkappa} \delta \varkappa + \frac{d f}{\partial \tau} \delta \tau \right) d s - \int f \varkappa h \operatorname{sen} \theta \, \varepsilon \, d s$$

Sustituyendo los valores [4] y [5] de $\delta \varkappa$ y $\delta \tau$ y si además suponemos que la curva es cerrada, o bien que en los extremos se verifica:

$$[18] \qquad h(s_\theta) = h(s_1) = h'(s_0) = h'(s_1) = h''(s_0) = h''(s_1)$$

se tiene, tras algunas transformaciones:

$$[19] \qquad \delta \int f(\varkappa, \tau)\, d s = \varepsilon \int h \left[\operatorname{sen} \theta f''_\varkappa + \tau \cos \theta f'_\varkappa + \ldots \right] d s$$

donde los acentos indican *derivadas totales* respecto s y los subíndices indican derivadas parciales. Por ejemplo, $f'_\varkappa$ indica que primero se ha derivado parcialmente respecto $\varkappa$ y luego totalmente respecto s.

Si el coeficiente de $h(s)$ en la expresión subintegral de [19] es idénticamente nulo (para todo valor de θ), la línea $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ será una extremal de I para cualquier deformación. Si no es idénticamente nulo igualado a cero nos determinará un ángulo $\theta = \theta(s)$ dado por

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{\left(\frac{f'_\tau}{\varkappa} \right)'' - \frac{\tau^2 f'_\tau}{\varkappa} + (\varkappa f_\tau)' - (\tau f_\varkappa)' - \tau f'_\varkappa}{f''_\varkappa + \varkappa^2 f_\varkappa - \tau^2 f_\varkappa + 2 \varkappa \tau f_\tau + \tau \left(\frac{f'_\tau}{\varkappa} \right)' + \left(\frac{\tau f'_\tau}{\varkappa} \right)' - f'_\varkappa}$$

que nos determina, pues de una manera única la banda superficial sobre la cual $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ puede deformarse (con las restricciones [18] cumpliendo la condición $\delta \mathrm{I} = 0$.

Recíprocamente, *si una línea sobre una superficie verifica la ecuación*

δ I $= 0$, *su normal principal y la normal correspondiente de la superficie forman un ángulo dado por* [20].

V. OTROS CASOS PARTICULARES.

Además de los casos estudiados en § II y § III, vamos a aplicar la fórmula general [20] a otros casos particulares simples.

I. Si $f(\varkappa, \tau) = 1$, se trata de las líneas geodésicas. La expresión [20] nos da

[21] $$\operatorname{tang} \theta = 0$$

o sea, la normal principal a la curva debe coincidir con la normal a la superficie, propiedad bien conocida de estas líneas.

II. Si $f(\varkappa, \tau) = \varkappa^2$ se obtiene

$$\operatorname{tg} \theta = -2 \frac{\varkappa \tau' + 2 \tau \varkappa'}{2 \varkappa'' - 2 \varkappa \tau^2 + \varkappa^3}$$

que nos da el ángulo que deben formar la normal a una superficie y la normal principal de las líneas sobre la misma que hacen extremal $\int \varkappa^2 \, ds$. Repitamos que, como siempre, consideramos solamente variaciones con las condiciones [18] en los extremos o bien variaciones de líneas cerradas.

III. Si $f(\varkappa, \tau) = \tau^2$ resulta

[23] $$\operatorname{tg} \theta = \frac{2\left(\frac{\tau'}{\varkappa}\right)'' - 2\frac{\tau^2 \tau'}{\varkappa} + 2 \varkappa' \tau + 2 \tau' \varkappa}{3 \varkappa \tau^2 + 4 \tau \left(\frac{\tau'}{\varkappa}\right)' + 2 \frac{\tau'^2}{\varkappa}}$$

IV. Si $f(\varkappa, \tau) = \varkappa \tau$ es

[24] $$\operatorname{tg} \theta = \frac{\left(\frac{\varkappa'}{\varkappa}\right)'' - \tau^2 \frac{\varkappa'}{\varkappa} + 2 \varkappa \varkappa' - 3 \tau \tau'}{\tau'' - \tau^3 + 2 \varkappa^2 \tau + 2 \tau \left(\frac{\varkappa'}{\varkappa}\right)' + 2 \frac{\varkappa'}{\varkappa}}$$

V. Obsérvese que si el valor de $\theta(s)$ que nos da la banda de normales sobre la cual es $\delta \int f(\varkappa) \, d s = 0$ viene dado por $\operatorname{tg} \theta = \frac{P}{Q}$ y el mismo ángulo para la banda correspondiente a $\delta \int g(\tau) \, d s = 0$ es $\operatorname{tg} \theta = \frac{R}{S}$ el valor de θ correspondiente al problema

$$\delta \int (f(\varkappa) + g(0)) \, d s = 0$$

es

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{P + R}{Q + S}$$

Por ejemplo, según [22] y [23] el ángulo que forman la normal a una superficie y la normal principal a una línea de la misma que haga extremal a $\int (\varkappa^2 + \tau^2)\, d\, s$ está relacionado con la curvatura y torsión de dicha línea por

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2\left(\frac{\tau'}{\varkappa}\right)'' - 2\,\frac{\tau'\,\tau^2}{\varkappa} - 2\,\tau\,\varkappa'}{4\,\tau\left(\frac{\tau'}{\varkappa}\right)' + 2\,\frac{\tau'^2}{\varkappa} + \varkappa\,\tau^2 + \varkappa^3 + 2\,\varkappa''}$$

L. A. SANTALÓ.