ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS CURVAS ESFÉRICAS Y UNA CARACTERÍSTICA DE LA ESFERA

Dividimos esta nota en dos partes. En I se establecen algunas propiedades de las curvas esféricas que, por su sencillez, no pretendemos sean originales, aunque no las hemos encontrado en la literatura corriente. Recordando que *torsión total* de una línea cerrada C es

$$\int_c \tau\, ds,$$

donde $\tau = \tau(s)$ es la torsión, se establece entre dichas propiedades, y ésta sí es ya conocida (1), la de ser ella nula para toda línea cerrada situada sobre una esfera.

En II establecemos que esta propiedad es característica de la esfera en el sentido de que toda superficie tal que *todas* sus líneas cerradas tengan su torsión total nula es esférica.

Advertimos, para no tener que hacer en cada momento la consiguiente salvedad, que al hablar de curvas cerradas se entiende que *son analíticas y tienen en cada punto un radio de curvatura* ρ *distinto de cero y continuo.*

I

1. Llamando $\varkappa$ y τ a la curvatura y torsión, respectivamente, de una curva cualquiera, el radio R de la esfera osculatriz en un punto es

$$R^2 = \frac{1}{\varkappa^2} + \frac{1}{\varkappa^4}\left(\frac{d\varkappa}{ds}\right)^2 \frac{1}{\tau^2}.$$

Si la curva es esférica $R = \text{c.}^{\text{te}}$ y

$$\tau = \frac{\dfrac{d\varkappa}{ds}}{\varkappa\sqrt{R^2\varkappa^2 - 1}},$$

(1) Ver W. Fenchel: «Über einen Jacobischen Satz der Kurventheorie», *Tôhoku Math. Journ.*, vol. **39**. Parte I.

de donde

$$\int_c \tau\, d s = \int_c \frac{d x}{x \sqrt{R^2 x^2 - 1}} = \left[\operatorname{arc\,sen} \frac{-1}{R x}\right]_c.$$

Si se trata de una curva cerrada en la cual $\rho = \frac{1}{x}$ es siempre distinto de cero, el arc sen $\frac{-\rho}{R}$ no podrá dar la vuelta completa a la circunferencia, luego *la torsión total es nula.*

2. Veamos algunas consecuencias de lo dicho. La fórmula

$$\int_{s_0}^{s} \tau\, d s = \operatorname{arc\,sen} \frac{-\rho}{R} - \operatorname{arc\,sen} \frac{-\rho_0}{R}$$

nos dice que si $\rho = \rho_0$ debe ser $\tau = 0$, o sea: *las únicas curvas esféricas de curvatura constante son las secciones planas.*

También se deduce de la fórmula anterior que

$$-\frac{\rho}{\rho_0} = \sqrt{\frac{R^2}{\rho^2_0} - 1}\ \operatorname{sen} \int_{s_0}^{s} \tau\, d s - \cos \int_{s_0}^{s} \tau\, d s$$

que liga el radio de curvatura en cada punto con la torsión, el radio de curvatura inicial y el de la esfera.

Si el plano osculador a la curva en el punto inicial correspondiente al valor s_0 forma con la normal un ángulo α_0, es:

$$\rho_0 = R \cos \alpha_0,$$

de donde:

$$\rho = R \cos\left(\int_{s_0}^{s} \tau\, d s + \alpha_0\right)$$

fórmula característica de las curvas esféricas (2).

Todo otro punto de la curva para el cual el radio de curvatura sea el mismo ρ_0 cumplirá, pues, una de las dos condiciones:

$$\int_{s_0}^{s_1} \tau\, d s = 0 \qquad \text{o bien:} \qquad \int_{s_0}^{s_1} \tau\, d s = -2\alpha_0$$

y recíprocamente.

(2) Basta comprobar que, en efecto, se satisface la ecuación diferencial de las curvas esféricas. Ver, por ejemplo, Blaschke, «Differentialgeometrie I», pág. 34.

En particular, si $\alpha_0 = 0$ se puede enunciar: *si el plano osculador a una curva esférica en el punto* s_0 *pasa por el centro de la esfera, el valor* s *del parámetro para el cual ésto vuelve a ocurrir, es tal que*

$$\int_{s_0}^{s} \tau \, d s = 0.$$

II

Veamos ahora de establecer que la proposición anterior de tener, una superficie de puntos elípticos, todas sus líneas cerradas de torsión total nula es *característica de la esférica.*

1. Sobre una superficie y en un punto entre la torsión τ de una línea, la torsión geodésica τ_g correspondiente y el ángulo Ω que forma la normal a la curva con la normal a la superficie, existe la relación (3):

$$\tau = \tau_g - \frac{d\,\Omega}{d s},$$

donde s es, como siempre, el arco de nuestra curva.

De aquí

$$\int_c \tau \, d s = \int_c \tau_g \, d s - [\Omega]_c \,.$$

Pero llamando ρ al radio de curvatura de la curva y R al de la sección normal es:

$$\rho = R \cos \Omega$$

y si $\rho \neq 0$ en todo punto, Ω no puede describir una circunferencia completa, luego su variación al recorrer toda la curva será nula y

$$\int_c \tau \, ds = \int_c \tau_g \, ds,$$

es decir: *en toda línea cerrada sobre una superficie, la torsión total es igual a la torsión geodésica total.*

2. Llamando $\varkappa_1$ y $\varkappa_2$ a las curvaturas principales de la superficie en un punto, la torsión geodésica de una curva referida al sistema coordenado de las líneas de curvatura es (4):

$$\tau_g = \sqrt{E\,G}\,(\varkappa_1 - \varkappa_2)\,\dot{u}\,\dot{v}$$

indicando por un punto las derivadas con relación al arco.

(3) Ver, p. ej., Bianchi, «Lezionidi Geometria Differenziale», vol. I, pág. 298.

(4) Ver Bianchi, loc. cit., pág. 296.

Luego si una superficie regular es tal que la torsión total de toda línea cerrada sobre la misma es nula, también deberá ser:

$$\int_c \sqrt{EG}\,(\varkappa_1 - \varkappa_2)\,\dot{u}\,\dot{v}\,ds = 0$$

para cualquiera de ellas. Lo cual lleva consigo el que la cantidad subintegral sea idénticamente nula, o sea:

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 .$$

Es decir, en todo punto de la superficie las dos curvaturas principales son iguales, todos ellos son pues umbílicos y la superficie, por lo tanto, esférica.

Luego, *un casquete de superficie regular de puntos elípticos, tal que la torsión total de todas sus líneas cerradas sea nula, es una parte de superficie esférica.*

3. Fenchel, en el artículo citado en la nota (1), demuestra que llamando $\varkappa_g$ a la curvatura geodésica de la representación esférica tangencial de una línea alabeada y σ a su arco, se verifica que:

$$\varkappa_g\,d\sigma = \tau\,ds .$$

Luego si $\int_c \tau\,ds = 0$ también $\int_c \varkappa_g\,d\sigma = 0$ y aplicando la fórmula de Gauss-Bonnet para el caso de la esfera

$$\int_c \varkappa_g\,d\sigma + \iint K\,do = 2\pi$$

resulta que si una línea alabeada tiene nula su torsión total, su representación esférica tangencial divide a la superficie esférica en dos partes de la misma área, con lo cual el resultado anterior puede también enunciarse:

Si una superficie cerrada y regular es tal que la representación esférica tangencial de cualquier línea cerrada situada sobre la misma divide a la esfera en partes equivalentes, dicha superficie es la de una esfera.

L. A. SANTALÓ.