UNOS PROBLEMAS REFERENTES A PROBABILIDADES GEOMÉTRICAS

Sobre una figura convexa plana K se suponen colocadas de una manera arbitraria otras n figuras convexas K_i congruentes entre sí. Nos proponemos buscar el valor medio de la parte de K que queda sin cubrir, es decir, que no pertenece a ninguna K_i. Esto es lo que hacemos en § 1, encontrando además una expresión límite para este valor medio cuando el área de las K_i tiende a cero a la vez que el número de las mismas crece infinitamente de una manera proporcional.

En § 2 consideramos el problema análogo, pero sustituyendo las K_i por bandas limitadas por pares de rectas paralelas.

Al pasar del plano al espacio, podríamos estudiar el problema correspondiente al de § 1, pero dada la imposibilidad material de que los cuerpos se penetren mutuamente unos a otros, resultarían un razonamiento y unos resultados impracticables, y como por otra parte los resultados a que se llega son muy análogos a los de § 1, dejamos de hacer esta generalización. En cambio, el problema estudiado en § 2 tiene en el espacio dos aspectos, el que estudiamos en § 3, que consiste en suponer un cuerpo convexo cortado por franjas formadas por planos paralelos distribuídas al azar, y el tratado en § 4, en el cual se sustituyen estos pares de planos paralelos por cilindros convexos e iguales.

La cuestión de § 1 aparece ya en forma restringida, estudiada por Wiener en su «Lehrbuch der darstellenden Geometrie», página 410, 1884, donde trata de ver cómo disminuye el brillo de una superficie al arrojar sobre la misma de una manera arbitraria una cierta cantidad de una solución de agua y partículas de carbón. En la forma por nosotros enunciada, aunque algo más restringida, se encuentra también estudiada por Happel, «Ueber einige Probleme aus dem Gebiet der geometrischen Wahrscheinlichkeiten» *Zeits. f. Math. u Phis.*, 61, págs. 43-56, 1913. El camino de resolución es, sin embargo, completamente distinto del que vamos a seguir nosotros, el cual nos permite una mayor generalidad y se funda en resultados de Geometría Integral obtenidos en otros lugares.

§ 1. Figuras convexas planas colocadas arbitrariamente sobre otra.

1. Recordemos que una figura plana móvil, pero indeformable, viene fijada en posición dando las coordenadas x, y de uno de sus puntos y el ángulo φ que una dirección de la misma forma con otra dirección fija en su plano. Para medir un conjunto de posiciones de una tal figura, se toma

$$\int dx\, dy\, d\varphi \qquad [1]$$

y a la forma diferencial $dK = dx\, dy\, d\varphi$ se le llama *densidad cinemática.*

Por ejemplo, la medida del conjunto de posiciones de una figura convexa de área f y longitud l en las que tiene algún punto común con otra figura convexa fija de área F y perímetro L, es: [1]

$$\int dK = 2\pi (F + f) + L\, l. \qquad [2]$$

En particular, la medida del conjunto de las posiciones en las que contiene a un punto fijo, es:

$$\int dK = 2\pi f. \qquad [3]$$

2. Supongamos n figuras convexas iguales $K_i\ (i = 1, 2, 3, \ldots .\, n)$ móviles y otra K fija en el mismo plano. *Supuestas estas* K_i *colocadas arbitrariamente de manera que todas corten a* K, *nos proponemos hallar el valor medio del área de la parte de* K *que no ha sido cubierta por ninguna* K_i.

Si en una posición determinada llamamos j a esta parte que queda sin cubrir, por definición de valor medio éste será:

$$\bar{j} = \frac{\int j\, dK_1\, dK_2 \ldots\ldots dK_n}{\int dK_1\, dK_2 \ldots\ldots dK_n} \qquad [4]$$

siendo dK_i las densidades cinemáticas respectivas.

Para calcular la integral del numerador, consideremos un punto $P(\xi, \eta)$ interior a K y tratemos de calcular

$$I = \int dP\, dK_1\, dK_2 \ldots\ldots dK_n, \qquad dP = d\xi\, d\eta$$

---

(1) Ver L. A. Santaló, «Geometria Integral 4. Sobre la medida cinemática en el plano», *Abh. aus dem Math. Sem. Hamburg*, **11**, 1936. También W. Blaschke, «Volesungen über Integralgeometrie», *Hbg. Math. Einzelschriften*, **20**, Teubner, Berlin, 1935.

extendida la integración a todas las posiciones de P y K_i, tales que, cortando a K, ninguna de las K_i contiene a P. Para ello, manteniendo fijas las K_i el punto P puede variar por toda el área que queda sin cubrir, o sea:

$$I = \int j \, dK_1 \, dK_2 \ldots\ldots dK_n \tag{5}$$

En cambio, fijando P y K_1, K_2, $K_3 \ldots\ldots K_{n-1}$ la figura K_n podrá ocupar todas las posiciones en las que corta a K (de medida dada por [2]) menos aquellas en las que contiene además a P (de medida dada por [3]). Luego será:

$$I = (2\pi F + L\,l) \int dP \, dK_1 \, dK_2 \ldots\ldots dK_{n-1}$$

siendo F el área de K, L su longitud, y l la de las K_i.

Repitiendo el razonamiento, y puesto que a todas las K_i las hemos supuesto congruentes, se obtiene:

$$I = (2\pi F + L\,l)^2 \int dP \, dK_1 \, dK_2 \ldots\ldots dK_{n-2}$$

y en definitiva

$$I = (2\pi F + L\,l)^n \int dP = F(2\pi F + L\,l)^n. \tag{6}$$

Igualando [5] con [6] obtenemos

$$\int j \, dK_1 \, dK_2 \ldots\ldots dK_n = F(2\pi F + L\,l)^n. \tag{7}$$

La itegral del denominador de [4], teniendo en cuenta [2], se calcula sucesivamente y da

$$\int dK_1 \, dK_2 \, dK_3 \ldots\ldots dK_n = [2\pi(F + f) + L\,l]^n. \tag{8}$$

Por tanto, el valor medio buscado es:

$$\bar{j} = F\left[\frac{2\pi F + L\,l}{2\pi(F+f) + L\,l}\right]^n. \tag{9}$$

Por ejemplo, en el caso particular de ser K un círculo de radio R y los K_i también círculos de radio r, resulta:

$$\bar{j} = \pi R^2\left[\frac{R^2 + 2Rr}{R^2 + r^2 + 2Rr}\right]^n.$$

3. Supongamos ahora que el área f de las K_i tiende a cero a

la vez que el número de ellas crece infinitamente, de manera que se conserve constante su área total. Es decir:

$$f \cdot n = S.$$

La expresión [9] se puede escribir

$$\bar{j} = \frac{F}{\left[1 + \frac{2\pi f}{2\pi F + L l}\right]^n} = \frac{F}{\left[1 + \frac{2\pi f}{2\pi F + L l}\right]^{\frac{2\pi F + L l}{2\pi f} \cdot \frac{2\pi S}{2\pi F + L l}}}$$

y cuando f tiende a cero, queda:

$$\lim \bar{j} = F e^{-\frac{2\pi S}{2\pi F + L l_0}} \qquad [10]$$

suponiendo que $\lim l = l_0$.

Si las K_i van disminuyendo en todas sus dimensiones de manera que sea también $l_0 = 0$, queda sencillamente

$$\lim \bar{j} = F e^{-\frac{S}{F}}. \qquad [11]$$

Por ejemplo, si el área S de que disponemos para cubrir al azar a K es igual al área F de esta figura, será en el límite:

$$\lim \bar{j} = \frac{F}{e}.$$

4. Estos resultados [9] y [10] tienen una aplicación inmediata en la teoría del tiro al blanco.

Supongamos, en efecto, que K es el blanco sobre el cual se dispara. En la hipótesis de que las balas caúsen un destrozo de perímetro l y sección f, y suponiendo que todas den en el blanco, la fórmula [9] nos da el valor medio del área que quedará sin destruir. Al aumentar el número de disparos n y disminuir proporcionalmente el efecto destructivo de cada uno de ellos, en el límite, el valor medio no destruído vendrá dado por [11].

§ 2. Bandas paralelas colocadas arbitrariamente sobre una figura plana convexa.

1. El problema que nos proponemos resolver es el siguiente: *En el plano de una figura convexa plana* K *se colocan de una manera arbitraria* n *bandas paralelas de la misma anchura* δ *de manera*

que todas ellas tengan puntos comunes con K. *¿Cuál es el valor medio del área de la parte de* K *que queda sin cubrir?*

También se puede enunciar de una manera más gráfica: si una figura convexa K se mancha con n pinceladas dadas arbitrariamente, ¿cuál es el valor medio del área de la parte de K que queda sin manchar?

2. En primer lugar recordemos ([2]) que un par de rectas paralelas $\mathfrak{F}$ de anchura δ queda fijado en posición en su plano dando las coordenadas normales p y θ de su paralela media y que además por medida de un conjunto de tales pares de rectas paralelas se toma

$$\int d\mathfrak{F} = \int dp\, d\theta.$$

Según esto, la medida del conjunto de bandas paralelas de anchura δ que tienen algún punto común con una figura convexa K de longitud L es:

$$\int d\mathfrak{F} = L + \pi\delta. \qquad [12]$$

En particular, la medida de las que contienen a un punto fijo será:

$$\int d\mathfrak{F} = \pi\delta. \qquad [13]$$

3. Sean n bandas $\mathfrak{F}_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ todas de la misma anchura δ que cortan a la figura convexa plana K. Llamando j al área que en una posición determinada queda sin cubrir, su valor medio será:

$$\bar{j} = \frac{\int j\, d\mathfrak{F}_1\, d\mathfrak{F}_2 \ldots d\mathfrak{F}_n}{\int d\mathfrak{F}_1\, d\mathfrak{F}_2 \ldots d\mathfrak{F}_n} \qquad [14]$$

La integral del numerador se calcula fácilmente siguiendo el mismo procedimiento de § 1, 2. Basta, en efecto, considerar un punto P interior a K y calcular la integral

$$\int dP\, d\mathfrak{F}_1\, d\mathfrak{F}_2 \ldots d\mathfrak{F}_n$$

extendida a todas las posiciones de $P, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ en las que cortando $\mathfrak{F}_i$ a K no contienen al punto P. Según se fije primero P y sucesivamente las bandas paralelas, o bien se mantengan fijas las

([2]) Ver L. A. Santaló, «Geometría Integral 7. Nuevas aplicaciones de la medida cinemática en el plano y en el espacio», *Revista de la Academia de Ciencias*. Madrid, 1936.

paralelas y se deje variar a P, se obtienen para esta integral los dos valores

$$F L^n = \int j \, d\mathcal{G}_1 \, d\mathcal{G}_2 \ldots\ldots d\mathcal{G}_n$$

La integral del denominador de [14] es inmediata, teniendo en cuenta [12] y vale $(L + \pi\delta)^n$, luego

$$\bar{j} = F\left[\frac{L}{L + \pi\delta}\right]^n \qquad [15]$$

que nos resuelve el problema que nos proponíamos.

4. Si el número n de bandas tiende a infinito a la vez que la anchura tiende a cero, verificándose que la suma de estas anchuras se conserve constante e igual a Δ, o sea:

$$n \cdot \delta = \Delta \qquad [16]$$

se verificará

$$\bar{j} = F \frac{1}{\left(1 + \pi \dfrac{\delta}{L}\right)^n} \longrightarrow F e^{-\pi \frac{\Delta}{L}} \qquad [17]$$

que nos da el valor límite de la parte de K que queda sin manchar.

Además, la expresión [15] nos dice que, verificándose [16], $\bar{j}$ disminuirá al crecer n, es decir, para una anchura suma total constante, cuanto más delgadas sean las bandas, menor será la parte que queda sin cubrir.

5. De una manera análoga se puede considerar también solamente el *contorno* de la figura K y buscar el valor medio de la longitud l de la parte del mismo que no es interior a ninguna de las n bandas paralelas $\mathcal{G}_i$ que cortan a K. Para ello hay que calcular

$$\bar{l} = \frac{\int l \, d\mathcal{G}_1 \, d\mathcal{G}_2 \ldots\ldots d\mathcal{G}_n}{\int d\mathcal{G}_1 \, d\mathcal{G}_2 \ldots\ldots d\mathcal{G}_n} \qquad [18]$$

La integral del numerador se calcula como antes, con sólo considerar la integral

$$\int ds \, d\mathcal{G}_1 \, d\mathcal{G}_2 \ldots\ldots d\mathcal{G}_n$$

extendida a los elementos de arco ds del contorno de K que no pertenecen a ninguna $\mathcal{P}_1$ y a las posiciones de las $\mathcal{P}_1$ en las que cortan a K. Según se integre primero respecto ds o respecto de $d\mathcal{P}_1$ se obtienen los dos valores iguales siguientes para esta integral

$$\int l \, d\mathcal{P}_1 \, d\mathcal{P}_2 \ldots\ldots d\mathcal{P}_n = L^{n+1}.$$

Con lo cual queda

$$\bar{l} = L \left(\frac{L}{L + \pi\delta} \right)^n. \qquad [19]$$

Cuando n crece a la vez que δ disminuye, se tiene como valor límite de $\bar{l}$, análogamente al número anterior

$$\lim \bar{l} = L e^{-\pi \frac{\Delta}{L}}. \qquad [20]$$

6. Ejemplos. — Si δ es igual a la *anchura media* de K, o sea

$$\delta = \frac{L}{\pi}$$

los valores medios [15] y [19] anteriores son, respectivamente,

$$\bar{j} = \frac{F}{2^n} \quad \text{y} \quad \bar{l} = \frac{L}{2^n}.$$

Esto ocurre, por ejemplo, si K es un círculo de diámetro δ. Para los casos límites, si es la anchura total Δ lo que es igual a la anchura media de K, resulta:

$$\lim \bar{j} = \frac{F}{e} \qquad \lim \bar{l} = \frac{L}{e}$$

§ 3. Franjas de planos paralelos que cortan a un cuerpo convexo.

1. Sea un cuerpo convexo K fijo en el espacio. Supongámosle cortado por n pares de planos paralelos $\mathfrak{G}_1$ a distancia δ colocados arbitrariamente. Nuestra pregunta es: *¿cuál es el valor medio del volumen* v *de* K *que no es interior a ninguno de estos pares de planos* $\mathfrak{G}_1$? Dicho más gráficamente: suponiendo que se den a K de una manera arbitraria n cortes limitados por planos paralelos de anchura δ, ¿cuál es el valor medio de la parte de K que queda?

2. Uno de estos pares de planos paralelos $\mathfrak{F}_i$ queda fijado dando la posición de su paralelo medio. Llamando p, ϑ, φ a las coordenadas polares de este plano, como medida del conjunto de pares de planos paralelos correspondientes se toma ([3]):

$$\int d\mathfrak{F} = \int \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dp ,$$

con lo cual se puede ver que la medida de los pares de planos paralelos a distancia δ que cortan a un cuerpo convexo K de curvatura media íntegra M es

$$\int d\mathfrak{F} = M + 2\pi\delta. \qquad [21]$$

Si K no es de curvatura continua, por M debe entenderse el límite de la curvatura media total del cuerpo paralelo exterior a distancia ε cuando $\varepsilon \to 0$.

3. El valor medio del volumen v de la parte de K que no está contenida en ninguno de los pares de planos $\mathfrak{F}_i$ que le cortan será:

$$\bar{v} = \frac{\int v \, d\mathfrak{F}_1 \, d\mathfrak{F}_2 \ldots\ldots d\mathfrak{F}_n}{\int d\mathfrak{F}_1 \, d\mathfrak{F}_2 \ldots\ldots d\mathfrak{F}_n} . \qquad [22]$$

Los valores de las integrales del numerador y denominador se calculan por el mismo procedimiento que en el plano (§ 2, 3), obteniéndose, teniendo en cuenta [21], los valores

$$\int v \, d\mathfrak{F}_1 \, d\mathfrak{F}_2 \, d\mathfrak{F}_3 \ldots\ldots d\mathfrak{F}_n = V M^n$$

$$\int d\mathfrak{F}_1 \, d\mathfrak{F}_2 \ldots\ldots d\mathfrak{F}_n = (M + 2\pi\delta)^n$$

de donde

$$\bar{v} = V \left[\frac{M}{M + 2\pi\delta} \right]^n \qquad [23]$$

fórmula que nos resuelve el problema enunciado.

4. Si la anchura δ de las franjas paralelas va disminuyendo a la vez que aumenta el número n de ellas de manera que sea siempre constante la anchura total, o sea

$$n . \delta = \Delta,$$

resulta:

$$\bar{v} = \frac{V}{\left(1 + 2\pi \dfrac{\delta}{M}\right)^{\frac{\Delta}{\delta}}}$$

y si $\delta \to 0$

$$\lim \bar{v} = V e^{-2\pi \frac{\Delta}{M}} \qquad [24]$$

que nos da el valor límite del valor medio de la parte v de K que no se destruye por estos cortes por franjas paralelas.

5. Si se considera sólo la superficie del cuerpo convexo K, se puede pedir también a quién será igual el valor medio del área de la misma que no es interior a ninguna de las franjas $\mathcal{F}_i$. Llamando f a la parte de superficie de K que en una posición determinada de las $\mathcal{F}_i$ no pertenece a ninguna de ellas, será:

$$\bar{f} = \frac{\int f \, d\mathcal{F}_1 \, d\mathcal{F}_2 \ldots\ldots d\mathcal{F}_n}{\int d\mathcal{F}_1 \, d\mathcal{F}_2 \ldots\ldots d\mathcal{F}_n}. \qquad [25]$$

Para calcular la integral del numerador basta considerar

$$\int d f \, d\mathcal{F}_1 \, d\mathcal{F}_2 \ldots\ldots d\mathcal{F}_n$$

extendida la integración respecto df a la parte de superficie de K que no es interior a ninguna $\mathcal{F}_i$. Según se integre primero respecto éste df o respecto las $d\mathcal{F}_i$ se obtienen los dos valores iguales

$$\int f d\mathcal{F}_1 \, d\mathcal{F}_2 \ldots\ldots d\mathcal{F}_n = F M^n$$

Por lo tanto es

$$\bar{f} = F \left[\frac{M}{M + 2\pi\delta} \right]^n. \qquad [26]$$

Como caso límite, correspondiente a la fórmula [24], tenemos:

$$\lim \bar{f} = F e^{-2\pi \frac{\Delta}{M}}. \qquad [27]$$

6. *Ejemplos.*—Si δ es igual a la *anchura media* de K, o sea

$$\delta = \frac{M}{2\pi},$$

los dos valores medios [23] y [26] son, respectivamente,

$$\bar{v} = \frac{V}{2^n}. \qquad \bar{f} = \frac{F}{2^n}. \qquad [28]$$

Para los casos límites [24] y [27], si la anchura total cumple también la condición $2\pi\Delta = M$, es

$$\lim \bar{v} = \frac{V}{e} \qquad \lim \bar{f} = \frac{F}{e}. \qquad [29]$$

Estas fórmulas [28] y [29] son las que tienen lugar para el caso de ser K una esfera de diámetro δ o Δ, respectivamente.

§ 4. Cilindros convexos que cortan a un cuerpo convexo.

1. Sea un cuerpo convexo fijo K al que suponemos cortado por n cilindros Z_i iguales de posición arbitraria. Nos proponemos calcular *el valor medio del volumen de la parte de* K *que no pertenece a ningún cilindro.* Este es el problema que se presenta, por ejemplo, al querer calcular el valor más probable de la parte de K que queda después de disparar sobre él n balazos al azar, suponiendo que cada bala destruye o se lleva por delante toda la parte que encuentra en su camino.

2. La posición de un cilindro en el espacio queda determinada dando la de una recta paralela a las generatrices invariablemente unida a él. Llamando x, y a las coordenadas de la sección de esta recta con un plano normal y ϑ, φ a las coordenadas esféricas de su dirección, es sabido (8) que por medida de un conjunto de cilindros se toma:

$$\int d\,Z = \int \operatorname{sen} \vartheta\, d\,\vartheta\, d\,\varphi\, d\,x\, d\,y.$$

Por ejemplo, llamando f_0 y u_0 al área y longitud de la sección recta del cilindro Z, la medida de los que cortan a un cuerpo convexo K es

$$\int d\,Z = 8\pi^2 f_0 + 2\pi^2 F + 2\pi u_0 M \qquad [30]$$

siendo F el área y M la curvatura media íntegra de K. En particular, la medida de los cilindros que contienen a un punto fijo es

$$\int d\,Z = 8\pi^2 f_0. \qquad [31]$$

3. Dados arbitrariamente n cilindros Z_i que cortan a K, el valor medio de la parte v que no pertenece a ninguno de ellos es

$$\bar{v} = \frac{\int v\, d\,Z_1\, d\,Z_2 \ldots\ldots d\,Z_n}{\int d\,Z_1\, d\,Z_2 \ldots\ldots d\,Z_n}. \qquad [32]$$

---

(8) L. A. Santaló, «Integralgeometrie 5. Über das Kinematische Mass im Raum», *Actualités Scientifiques et Industrielles*, núm. 357. Hermann et Cie. Paris, 1936.

Análogamente a como hemos procedido en los números anteriores, teniendo en cuenta [30] y [31], se calculan las integrales:

$$\int v\, dZ_1\, dZ_2 \ldots\ldots dZ_n = (2\pi^2 F + 2\pi u_0 M)^n V$$

$$\int dZ_1\, dZ_2 \ldots\ldots dZ_n = (8\pi^2 f_0 + 2\pi^2 F + 2\pi u_0 M)^n$$

y por tanto será:

$$\bar{v} = V \left[\frac{\pi F + u_0 M}{4\pi f_0 + \pi F + u_0 M} \right]^n \qquad [33]$$

que nos resuelve el problema propuesto.

4. Esta expresión tiende también a un límite cuando crece n infinitamente a la vez que f_0 disminuye proporcionalmente. Si el área de la sección normal total es constante

$$f_0 . n = F_0$$

y el perímetro u_0 tiende a cero con f_0, se obtiene

$$\lim \bar{v} = V e^{-4 \frac{F_0}{F}}. \qquad [34]$$

5. Consideremos ahora sólo la superficie de K e intentemos buscar el valor medio del área de la parte de la misma que queda después de atravesar este cuerpo convexo por los n cilindros Z_i.

Como siempre, llamando f a la parte que en una posición cualquiera es exterior a todos ellos, hay que calcular

$$\bar{f} = \frac{\int f\, dZ_1\, dZ_2 \ldots\ldots dZ_n}{\int dZ_1\, dZ_2 \ldots\ldots dZ_n}. \qquad [35]$$

La integral del numerador se obtendrá sin más que considerar

$$\int df\, dZ_1\, dZ_2 \ldots\ldots dZ_n$$

la cual, integrada de las dos maneras de siempre, da los dos valores

$$\int f\, dZ_1\, dZ_2 \ldots\ldots dZ_n = (2\pi^2 F + 2\pi u_0 M)^n.$$

El valor medio buscado es, pues,

$$\bar{f} = F \left[\frac{\pi F + u_0 M}{4\pi f_0 + \pi F + u_0 M} \right]^n. \qquad [36]$$

Para el caso límite, el valor correspondiente al [34] de antes es

$$\lim \bar{f} = F e^{-4 \frac{F_0}{F}}.$$

L. A. SANTALÓ.