ÁREA ENGENDRADA POR UN SEGMENTO QUE SE MUEVE CONSERVÁNDOSE NORMAL A UNA LÍNEA Y DESCRIBIENDO UNA SUPERFICIE DESARROLLABLE

Dada una curva plana, si sobre sus normales tomamos un segmento de longitud constante h, el otro extremo del mismo describirá una curva *paralela* a la anterior y el área limitada por ambas curvas y las normales en los puntos extremos es sabido que vale

$$A = h \int_{s_0}^{s_1} d s - \frac{h^2}{2} \int_{s_0}^{s_1} \varkappa(s)\, d s \qquad [1]$$

llamando $\varkappa(s)$ a la curvatura de la línea primitiva.

Si la línea es alabeada, considerando a lo largo de ella una familia de normales y tomando también sobre cada una de ellas un segmento constante, tendremos una banda de superficie cuya forma y área dependerá, naturalmente, de la familia de normales considerada.

Nuestro propósito es obtener una fórmula análoga a la [1], que nos dé el área de esta cinta de anchura h en los casos en que sea desarrollable y deducir de ella algunas consecuencias.

1. Sea $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ la ecuación vectorial de la curva primitiva, y representemos por $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ y $\mathbf{b}$ a los vectores unitarios tangente, normal principal y binormal, respectivamente.

En cada punto de $\mathbf{r}(s)$ tomamos un segmento de longitud h, situado en el plano normal y formando con la binormal un ángulo variable $\theta(s)$. El otro extremo de este segmento describirá una curva de ecuación:

$$\mathbf{r}_1(s) = \mathbf{r}(s) + h(\operatorname{sen}\theta \cdot \mathbf{n} + \cos\theta \cdot \mathbf{b})$$

Recordando las fórmulas de Frenet

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\varkappa\,\mathbf{t} + \tau\,\mathbf{b}$$

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau\,\mathbf{n}$$

donde $\varkappa$ y τ son, respectivamente, la curvatura y torsión de $\mathbf{r}(s)$, se tiene:

$$d\mathbf{r}_1(s) = d\mathbf{r} +$$

$$h\left[\left(\frac{d\theta}{ds} - \tau\right)\cos\theta.\mathbf{n} - \varkappa\,\text{sen}\,\theta.\mathbf{t} + \left(\frac{d\theta}{ds} + \tau\right)\text{sen}\,\theta.\mathbf{b}\right] ds.$$

Elevando al cuadrado y teniendo en cuenta que

$$\mathbf{t}^2 = \mathbf{n}^2 = \mathbf{b}^2 = 1 \quad \text{y} \quad \mathbf{t}.\mathbf{n} = \mathbf{t}.\mathbf{b} = \mathbf{n}.\mathbf{b} = 0$$

por tratarse de vectores unitarios perpendiculares entre sí, resulta:

$$d\mathbf{r}_1^2 = \left[(1 - \varkappa\,\text{sen}\,\theta.h)^2 + \left(\frac{d\theta}{ds} - \tau\right)^2 h^2\right] ds^2$$

o sea, llamando s_1 al arco de la curva $\mathbf{r}_1(s)$

$$ds_1 = \sqrt{(1 - \varkappa\,\text{sen}\,\theta.h)^2 + \left(\frac{d\theta}{ds} - \tau\right)^2 h^2}\; ds.$$

Hasta aquí no hemos hecho ninguna hipótesis sobre la función $\theta(s)$, pero si hacemos la de *suponer que la superficie engendrada por el segmento móvil sea desarrollable,* entonces se tendrá

$$\frac{d\theta}{ds} = \tau \qquad \theta = \int_{s_0}^{s} \tau\, ds + \theta_0 \tag{2}$$

con lo cual queda

$$ds_1 = (1 - \varkappa\,\text{sen}\,\theta.h)\, ds. \tag{3}$$

El área buscada es

$$A = \int_{s_0}^{s_1}\int_0^h ds_1\, dh = \int_{s_0}^{s_1}\int_0^h (1 - \varkappa\,\text{sen}\,\theta.h)\, ds\, dh$$

o sea

$$A = h\int_{s_0}^{s_1} ds - \frac{h^2}{2}\int_{s_0}^{s_1} \varkappa\,\text{sen}\,\theta\, ds \tag{4}$$

donde $\theta(s)$ tiene el valor expresado en [2].

Si la curva es plana, $\tau = 0$, y en este caso

$$A = h \int_{s_0}^{s_1} d s - \frac{h^2}{2} \operatorname{sen} \theta_0 \int_{s_0}^{s_1} \varkappa\, d s$$

que para $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ coincide con la fórmula [1].

2. Para una longitud dada $L = s_1 - s_0$ y una curvatura también fijada $\varkappa(s)$, el área A será máxima o mínima para θ constantemente igual a $\mp \dfrac{\pi}{2}$. Es decir,

$$\int_{s_0}^{s} \tau\, d s + \theta_0 = \pm \frac{\pi}{2}$$

condición que, si ha de verificarse para todo valor de s, lleva consigo el ser

$$\tau = 0 \qquad \theta_0 = \pm \frac{\pi}{2}$$

luego: *para un arco de longitud y curvatura dadas, el área* A *será extremal cuando la curva sea plana y se considere el haz de normales principales a la misma.*

3. Sea una superficie *canal* envolvente de esferas de radio h, cuyos centros están sobre la línea $\mathbf{r}(s)$. La fórmula [4] nos da el área de cualquier faja radial de esta superfice que sea desarrollable. Además, nos muestra que, dada la línea y el segmento h, el área A es sólo función de la posición inicial θ_0. La suma de las áreas de una de estas fajas y su opuesta será

$$A(\theta_0) + A(\theta_0 + \pi) = 2 h \int_{s_0}^{s_1} d s = 2 h L \qquad [5]$$

luego *todas las fajas diametrales desarrollables de una superficie canal tienen la misma área.*

4. Veamos para qué valor de θ_0 la faja radial correspondiente es equivalente a su opuesta. Deberá ser:

$$A(\theta_0) = A(\theta_0 + \pi),$$

o sea

$$\int_{s_0}^{s_1} \varkappa \operatorname{sen}\left(\int_{s_0}^{s} \tau\, d s + \theta_0\right) d s = 0,$$

de donde

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{\int_{s_0}^{s_1} \varkappa \operatorname{sen}\left(\int_{s_0}^{s} \tau\, d s\right) d s}{\int_{s_0}^{s_1} \varkappa \cos\left(\int_{s_0}^{s} \tau\, d s\right) d s} \qquad [6]$$

5. Como dos superficies desarrollables formadas por normales a una misma línea se cortan bajo un ángulo constante, se tendrá para expresión del volumen limitado por la superficie canal y los planos normales de los extremos:

$$V = \frac{h}{2} \int_0^{2\pi} A(\theta_0)\, d\theta_0$$

o bien, teniendo en cuenta [5]

$$V = \frac{h}{2} \int_0^{\pi} 2 h L\, d\theta_0 = \pi h^2 . L.$$

Vamos a utilizar esta expresión para ver el valor de θ_0 para el cual la faja diametral correspondiente divide al tubo limitado por la superficie canal en dos partes del mismo volumen. Deberá ser

$$\frac{h}{2} \int_{\theta_0}^{\pi+\theta_0} A(\theta_0)\, d\theta_0 = \frac{1}{2} \pi h^2 L$$

o sea

$$\int_{\theta_0}^{\pi+\theta_0} \frac{h^2}{2} \int_{s_0}^{s_1} \varkappa \operatorname{sen} \theta\, d s . d\theta_0 = 0$$

es decir,

$$\int_{s_0}^{s_1} \varkappa \cos\left(\int_{s_0}^{s} \tau\, d s + \theta_0\right) d s = 0.$$

El valor buscado vendrá dado por

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{\int_{s_0}^{s_1} \varkappa \cos\left(\int_{s_0}^{s} \tau\, d s\right) d s}{\int_{s_0}^{s_1} \varkappa \operatorname{sen}\left(\int_{s_0}^{s} \tau\, d s\right) d s} \qquad [7]$$

luego recordando [6]: *la superficie diametral que divide al tubo en dos partes de igual volumen y aquella que queda dividida por la línea originaria* $\mathbf{r}(s)$ *en áreas iguales, son perpendiculares.*

6. Si una banda radial desarróllable de las que hemos considerado es de área máxima, la banda opuesta será de área mínima, puesto que la suma de ambas es constantes. Veamos qué valor hay que dar a θ_0 para que esto suceda. Deberá ser

$$\frac{\partial A}{\partial \theta_0} = -\frac{h^2}{2}\int_{s_0}^{s_1} \varkappa \cos\left(\int_{s_0}^{s} \tau\, d s + \theta_0\right) d s = 0$$

condición que nos da para θ_0 el mismo valor dado por [7]. Por tanto: *la banda diametral formada por los radiales opuestos de área máxima y mínima, divide al tubo limitado por la superficie canal en dos partes de igual volumen.*

7. - Un caso particular interesante en que las fórmulas anteriores se simplifican notablemente, es el de las *líneas de igual pendiente* caracterizadas por cumplir la condición

$$\frac{\varkappa}{\tau} = \text{const.}$$

En este caso la fórmula [4], teniendo en cuenta la [2], toma la forma:

$$A = h\int_{s_0}^{s_1} d s - \frac{h^2}{2}\int_{s_0}^{s_1} \frac{\varkappa}{\tau} \operatorname{sen} \theta \cdot \frac{d\theta}{d s} \cdot d s$$

y de aquí:

$$A = h\int_{s_0}^{s_1} d s + \frac{h^2}{2}\,\frac{\varkappa}{\tau}\,[\cos\theta]_{s_0}^{s_1}$$

es decir: *el área descrita por un segmento de longitud* h *que se mueve normalmente a una línea de igual pendiente engendrando una superficie desarrollable desde una posición inicial en la que forma un ángulo* θ_0 *con la binormal a la curva hasta que vuelven a formar ambas rectas el mismo ángulo, es independiente de* θ_0 *y su valor es igual al producto de* h *por la longitud de la línea descrita.*

El valor de θ_0 que hace extremal a la banda de superficie comprendida entre s_0 y s_1, dado por la fórmula [7], también se simplifica viniendo dado por

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \cot \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s_1} \tau \, d s \cdot$$

que admite las soluciones

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s_1} \tau \, d s \qquad \theta_0 = \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s_1} \tau \, d s.$$

Para ver qué valor de éstos corresponde al máximo y cuál al mínimo, se tiene

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \theta_0^2} = \frac{h^2}{2} \frac{\varkappa}{\tau} \left[\cos \theta_0 - \cos \left(\int_{s_0}^{s_1} \tau \, d s + \theta_0 \right) \right]$$

expresión que para los valores anteriores de θ_0 toma las formas

$$\pm h^2 \frac{\varkappa}{\tau} \operatorname{sen} \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s_1} \tau . d s.$$

Luego el que A sea máximo o mínimo para uno u otro valor de θ_0, depende del signo de

$$\frac{\varkappa}{\tau} \operatorname{sen} \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s_1} \tau \, d s.$$

8. Al desarrollar sobre un plano la banda desarrollable cuya área está dada por [4], se obtendrá otra banda plana de la misma área, puesto que las áreas se conservan en el desarrollo por hacerlo los arcos y los ángulos. Llamando $\bar{\varkappa}(s)$ a la curvatura de la línea transformada de $\mathbf{r}(s)$, la fórmula [1] nos dice que

$$A = h \int_{s_0}^{s_1} d s - \frac{h^2}{2} \int_{s_0}^{s_1} \bar{\varkappa} \, d s$$

expresión que, comparada con la [1] y debiendo ser igual a ella, cualesquiera que sean los límites de integración, nos dice que

$$\bar{\varkappa} = \varkappa \operatorname{sen} \theta,$$

fórmula conocida que nos liga la curvatura de una línea de una superficie desarrollable normal a las generatrices, con la curvatura de su transformada en el desarrollo.

9. Una consecuencia de los resultados anteriores se obtiene escribiendo la fórmula [4] en la forma

$$A = h \int_{s_0}^{s_1} \left(1 - \frac{h}{2} \varkappa \operatorname{sen} \theta\right) ds$$

y recordando que, en virtud de [3], la integral que aquí figura no es más que la longitud de la trayectoria descrita por el punto medio del segmento de longitud h. Luego: *el área engendrada por un segmento de longitud* h *de una recta que gira manteniéndose tangente a una curva* (puesto que la superficie es desarrollable), *es igual al producto de* h *por la longitud de la curva descrita por su centro de gravedad.* Lo cual puede considerarse como una generalización del teorema de Guldin.

L. A. SANTALÓ.