L. A. SANTALÓ

CUESTIONES DE GEOMETRIA DIFERENCIAL E INTEGRAL EN ESPACIOS DE CURVATURA CONSTANTE

INTRODUCCIÓN.

Uno de los resultados más notables de la Geometría Diferencial obtenidos en los últimos años ha sido la generalización de la fórmula de GAUSS-BONNET a variedades multidimensionales hecha por ALLENDOERFER-WEIL [2], de la cual una demostración simple y elegante utilizando los métodos de E. CARTAN fué dada poco después por CHERN [5]. Para el caso particular de hipersuperficies en espacios de curvatura constante los elementos que intervienen en la fórmula toman significado geométrico bien preciso y el resultado fué obtenido, casi en la misma fecha pero independientemente de los autores anteriores y por camino muy diferente, por HERGLOTZ [9].

Lo demostración de CHERN es intrínseca, es decir, no supone a la variedad sumergida en un espacio de mayor número de dimensiones. Sin embargo, para el caso particular de una hipersuperficie de un espacio de curvatura constante, el mismo camino de CHERN conduce al resultado de HERGLOTZ de manera simple y natural, apareciendo claramente el significado geométrico de ciertos invariantes, significado que en el caso general queda un poco obscuro. Es por esto que creemos puede ser útil insistir sobre dicha demostración, adaptándola al caso particular mencionado de las hipersuperficies en espacios de curvatura constante. Esto es lo que hacemos como primera parte de este trabajo.

Como segunda parte hacemos aplicación de la fórmula obtenida al cálculo de ciertas expresiones duales (nº 3) y a algunas cuestiones de geometría integral. Así, en el nº 4 obtenemos las fórmulas integrales (4.10) y (4.11) que generalizan a n dimensiones unos resultados de BLASCHKE para $n=2,3$. En los nº 6 y 7 se obtienen las fórmulas (6.7), (7.2), (7.7) y (7.9) que análogamente generalizan a espacios n dimensionales fórmulas conocidas para $n=2$ y $n=3$.

1. FÓRMULAS FUNDAMENTALES.

Como espacio de curvatura constante K entendemos el espacio no-euclidiano, elíptico si $K>0$ e hiperbólico si $K<0$. Es decir, suponemos en el espacio proyectivo n-dimensional la hipercuádrica fundamental (no reglada)

$$\Phi(x_i) \equiv \Sigma a_{ij} x_i x_j = 0 \qquad (i, j = 0, 1, 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

con los coeficientes a_{ij} reales. Si Φ es imaginaria tomamos el signo de los a_{ij} de manera que para todo punto real sea $\Phi(x_i)>0$ y el conjunto de todos los puntos no pertenecientes a $\Phi(x_i)=0$ constituye el espacio elíptico; si Φ es real, el espacio hiperbólico es el conjunto de puntos para los cuales es $\Phi(x_i)<0$. En ambos casos, los movimientos del espacio son las proyectividades que dejan invariante la hipercuádrica fundamental.

Las coordenadas homogéneas x_i se pueden normalizar de manera que para todo punto no perteneciente a la hipercuádrica sea

$$\Phi(x_i) = \frac{1}{K} \tag{1.2}$$

siendo K una constante (curvatura del espacio), positiva en el caso elíptico y negativa en el hiperbólico.

Dados dos puntos $A(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $B(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ se define su «producto escalar» por la expresión

$$(A, B) = (B, A) = \frac{1}{2} \Sigma y_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \Sigma x_i \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \tag{1.3}$$

con lo cual la condición (1.2) de normalización se escribe

$$(A, A) = \frac{1}{K} \,. \tag{1.4}$$

La condición $(A, B) = 0$ expresa que A, B son conjugados respecto de Φ. Sean $A_0, A_1, \ldots, A_n$ n puntos que sean vértices de un simplex autoconjugado, es decir

$$(1.5) \qquad (A_i, A_i) = \frac{1}{K}, \qquad (A_i, A_j) = 0 \qquad (i \neq j)$$

de donde, por diferenciación,

$$(1.6) \qquad (A_i, dA_i) = 0, \qquad (A_i, dA_j) + (A_j, dA_i) = 0 .$$

Consideremos un movimiento elemental que lleve los puntos A_i a los $A_i + dA_i$. Los desplazamientos dA_i pueden expresarse en la forma

$$(1.7) \qquad dA_i = \sum_{h=0}^{n} \omega_i^h A_h$$

siendo los coeficientes ω_i^h formas diferenciales lineales (componentes relativas del movimiento según E. CARTAN) cuyo valor se obtiene multiplicando escalarmente (1.7) por el A_h correspondiente, resultando según (1.5)

$$(1.8) \qquad \omega_i^h = K(A_h, dA_i)$$

y por tanto, según (1.6),

$$(1.9) \qquad \omega_i^i = 0, \qquad \omega_i^h + \omega_h^i = 0 .$$

Estas componentes relativas no son independientes. Escribiendo las condiciones de integrabilidad de (1.7), o sea, anulando la diferencial exterior del segundo miembro teniendo en cuenta las ecuaciones mismas, resultan las «ecuaciones de estructura»,

$$(1.10) \qquad d\omega_i^h = \sum_{j=0}^{n} [\omega_i^j \omega_j^h]$$

donde los paréntesis cuadrados indican multiplicación exterior.

La distancia s entre dos puntos A, B se define por la relación

$$(1.11) \qquad (A, B) = \frac{\cos \sqrt{K}\, s}{K}$$

de manera que si B está sobre la recta que une los puntos conjugados A_0 y A_i y s_i es su distancia a A_0, será

$$B = \cos(\sqrt{K}\, s_i)\, A_0 + \operatorname{sen}(\sqrt{K}\, s_i)\, A_i \,. \tag{1.12}$$

De aquí, manteniendo fijos A_0 y A_i y haciendo variar B sobre la recta que los une,

$$dB = \sqrt{K}\,(-\operatorname{sen}(\sqrt{K}\, s_i)\, A_0 + \cos(\sqrt{K}\, s_i)\, A_i)\, ds_i \,. \tag{1.13}$$

En particular, para $s_i = 0$, o sea $B \equiv A_0$, resulta $dA_0 = \sqrt{K} A_i ds_i$ y por tanto *el elemento de arco sobre* $A_0 A_i$ *a partir de* A_0 *vale*

$$ds_i = \sqrt{K}\,(A_i, dA_0) = \frac{\omega_0{}^i}{\sqrt{K}} \tag{1.14}$$

y el elemento de volumen del espacio, correspondiente al punto A_0 se escribirá

$$dV = \frac{1}{K^{n/2}}\,[\omega_0{}^1 \omega_0{}^2 \ldots \omega_0{}^n] \,. \tag{1.15}$$

Para definir el ángulo φ entre dos rectas que pasan por A_0, se toman los puntos A_i, B_i conjugados de A_0 sobre estas rectas y entonces φ se define por

$$\cos\varphi = K\,(A_i, B_i) \,. \tag{1.16}$$

De aquí se deduce, de manera análoga a la anterior, que *el elemento de ángulo sobre el plano* $A_0 A_i A_j$ *a partir de la recta* $A_0 A_i$ *está dado por*

$$d\varphi_{ij} = K\,(A_j, dA_i) = \omega_i^j \,. \tag{1.17}$$

Por tanto, el elemento de ángulo sólido correspondiente a la dirección $A_0 A_i$ será

$$d\Omega_i = [\omega_i^1 \omega_i^2 \ldots \omega_i^{i-1} \omega_i^{i+1} \ldots \omega_i^n] \,. \tag{1.18}$$

2. La fórmula de Gauss-Bonnet.

En el espacio n-dimensional de curvatura constante K consideremos una hipersuperficie cerrada, orientable S de clase ≥ 3, que sea el contorno de un cuerpo Q.

En cada punto A_0 de S consideremos el simplex autoconjugado $A_0, A_1, \ldots, A_n$ tal que el hiperplano determinado por $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ sea el hiperplano tangente a S y por tanto A_0A_n la normal a S y, además, las direcciones A_0A_i $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ sean las direcciones principales de S en el punto A_0. Según las notaciones (1.14), (1.17) y la definición de los radios de curvatura principales, será

$$\omega_n^{\ i} = d\varphi_{ni} = -\frac{ds_i}{R_i} \tag{2.1}$$

siendo R_i el radio de curvatura principal según la dirección A_0A_i (fórmula de O. RODRIGUES para espacios de curvatura constante). Según (1.18) es también

$$d\Omega_n = (-1)^{n-1}\frac{[ds_1 ds_2 \ldots ds_{n-1}]}{R_1 R_2 \ldots R_{n-1}} = \frac{[-1]^{n-1}\, dF}{R_1 R_2 \ldots R_{n-1}} \tag{2.2}$$

siendo dF el elemento de área de S en el punto A_0.

Siguiendo a CHERN [5] consideremos ahora las formas diferenciales, definidas para valores de h tales que $0 \leq 2h \leq n-1$,

$$\Phi_h \equiv \Sigma \varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} [\omega_{a_1}^{\ 0}\, \omega_0^{\ a_2}]\, [\omega_{a_3}^{\ 0}\, \omega_0^{\ a_4}] \ldots [\omega_{a_{2h-1}}^{\ 0} \omega_0^{\ a_{2h}}] \\ [\omega_{a_{2h+1}}^{\ n}\, \omega_{a_{2h+2}}^{\ n} \ldots \omega_{a_{n-1}}^{\ n}] \tag{2.3}$$

donde $\varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}$ vale cero si hay algún índice a_i repetido y $+1$ o -1 según que la permutación $(a_1 a_2 \ldots a_{n-1})$ sea par o impar respecto el orden natural $1, 2, \ldots, n-1$. La sumatoria está extendida a todas las permutaciones de los índices $1, 2, \ldots, n-1$.

Para ver la interpretación geométrica de estas formas diferenciales, observemos que según (2.1), (1.14) y (1.9) se tiene

$$\Phi_h = (-1)^h K^h\, \Sigma \varepsilon_{a_1 \ldots a_{n-1}} \frac{[ds_{a_1} ds_{a_2} \ldots ds_{a_{n-1}}]}{R_{a_{2h+1}} R_{a_{2h+2}} \ldots R_{a_{n-1}}}\,. \tag*{[2.4]}$$

Introduciendo las curvaturas medias

$$m_i = \frac{1}{\binom{n-1}{i}} \left\{ \frac{1}{R_{a_1}} \frac{1}{R_{a_2}} \cdots \frac{1}{R_{a_i}} \right\}, \qquad m_0 = 1 \tag*{[2.5]}$$

donde el paréntesis indica la función simétrica elemental de orden i formada con los $1/R_{a_i}$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n-1)$ y teniendo en cuenta que $dF=[ds_1\, ds_2 \ldots ds_{n-1}]$, se tiene también

$$\Phi_h = (-1)^h (n-1)!\, K^h m_{n-2h-1}\, dF . \tag{2.6}$$

Por otra parte, consideremos también las formas diferenciales (para valores de h tales que $0 \leq 2h \leq n-2$),

$$\Psi_h = 2(h+1) \Sigma \varepsilon_{a_1 \ldots a_{n-1}} [\omega_{a_1}^{0}\, \omega_0^{a_2}]\, [\omega_{a_3}^{0}\, \omega_0^{a_4}] \ldots [\omega_{a_{2h+1}}^{0}\, \omega_0^{n}]\, [\omega_{a_{2h+2}}^{n} \ldots \omega_{a_{n-1}}^{n}] \tag{2.7}$$

cuya significación geométrica, procediendo igual que antes resulta ser

$$\Psi_h = 2(-1)^{h+1} (h+1)\, K^{h+1} (n-1)!\, m_{n-2h-2}\, dV \tag{2.8}$$

siendo dV el elemento de volumen del espacio, o sea, $dV = [ds_1\, ds_2 \ldots ds_n]$.

Teniendo en cuenta las ecuaciones de estructura (1.10) y las reglas de diferenciación exterior, de (2.3) y (2.7) se deduce la relación fundamental siguiente (debida a CHERN [5])

$$d\Phi_h = \Psi_{h-1} + \frac{n-2h-1}{2(h+1)} \Psi_h \tag{2.9}$$

o sea

$$\Psi_h = \frac{2(h+1)}{n-2h-1} (d\Phi_h - \Psi_{h-1}) \tag{2.10}$$

fórmula recurrente que permite escribir

$$\Psi_h = d\theta_h \tag{2.11}$$

siendo

$$\theta_h = \sum_{\lambda=0}^{h} (-1)^{h-\lambda} \frac{(2h+2) \ldots (2\lambda+2)}{(n-2\lambda-1) \ldots (n-2h-1)} \Phi_\lambda \tag{2.12}$$

para valores de h tales que $0 \leq 2h < n-2$.

Distingamos ahora dos casos según la paridad de n.

1° *n par.* - Pongamos $n=2p$. Queremos aplicar la fórmula de STOKES

$$\int_S \theta_{p-1} = \int_Q d\theta_{p-1} = \int_Q \Psi_{p-1} \tag{2.13}$$

a la hipersuperficie S y al cuerpo Q que ella limita. Para ello observemos que el campo de las normales A_0A_n a S se puede prolongar por continuidad al interior de S excepto para un número finito de puntos cuyo número es precisamente igual a la característica de EULER-POINCARÉ $\chi(Q)$ del cuerpo Q(¹).

Rodeando estos puntos por esferas de radio ε y haciendo luego $\varepsilon \to 0$, la parte correspondiente a estas esferas en la integral del primer miembro de (2.13), según (2.12) y (2.6) se reduce a

$$-(-1)^{p-1} \frac{2p\,(2p-2)\dots 2}{(n-1)\,(n-3)\dots 1}\,(n-1)!\; O_{n-1}\,\chi(Q) \tag{2.14}$$

siendo O_{n-1} el área de la esfera euclidiana $(n-1)$-dimensional de radio unidad, o sea, en general

$$O_i = \frac{2\pi^{(i+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)} \,. \tag{2.15}$$

El signo menos en (2.14) es debido a que estas esferas de radio ε limitan a Q por su parte exterior.

Introduciendo las integrales de curvatura media

$$M_i = \int_S m_i\, dF \tag{2.16}$$

(¹) Recordemos que si Q está descompuesto en símplices y a_i es el número de ellos de dimensión i, es

$$\chi(Q) = a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n \,.$$

Para el contorno S de Q es

$$\chi(S) = 0 \quad (n \text{ par}) \,. \qquad \chi(S) = 2\chi(Q) \quad (n \text{ impar})$$

según (2.12), (2.6), (2.8) la fórmula (2.13) se escribe por tanto

$$\sum_{\lambda=0}^{p-1}(-1)^{p-1}\frac{2p(2p-2)\dots(2\lambda+2)}{(n-2\lambda-1)\dots 3.1}K^{\lambda}(n-1)!\,M_{n-2\lambda-1}$$

$$-(-1)^{p-1}\frac{2p(2p-2)\dots 2}{(n-1)(n-3)\dots 3.1}(n-1)!\,O_{n-1}\chi(Q)=$$

$$=2(-1)^{p}pK^{p}(n-1)!\,V\,,$$

siendo V el volumen de Q.

Introduciendo las áreas O_i definidas por (2.15), simples transformaciones de los coeficientes permiten escribir esta fórmula en la forma

$$(2.17)\qquad \sum_{\lambda=0}^{p-1}\binom{n-1}{2\lambda}\frac{O_n}{O_{n-1-2\lambda}\,O_{2\lambda}}K^{\lambda}M_{n-2\lambda-1}+K^{p}V=\frac{1}{2}\,O_n\chi(Q)$$

que es la fórmula generalizada de Gauss-Bonnet para n par.

2° *n impar.* - Pongamos $n=2p+1$. En este caso de (2.9) se deduce $d\Phi_p=\Psi_{p-1}$ y por tanto, de (2.11),

$$(2.18)\qquad d(\theta_{p-1}-\Phi_p)=0\,.$$

La fórmula de Stokes aplicada a la hipersuperficie S y al cuerpo Q que ella limita, nos da ahora

$$(2.19)\qquad \int_S\theta_{p-1}-\int_S\Phi_p=0$$

o bien, teniendo en cuenta, como antes, que para llenar el cuerpo Q con un campo de normales continuo, debemos aislar un número de puntos igual a $\chi(Q)$ y rodearlos por esferas de radio ε que luego puede tender a cero, resulta

$$\sum_{\lambda=0}^{p-1}(-1)^{p-1}\frac{2p(2p-2)\dots(2\lambda+2)}{(n-2\lambda-1)\dots 4.2}K^{\lambda}(n-1)!\,M_{n-2\lambda-1}$$

$$-(-1)^{p}K^{p}(n-1)!\,F-(-1)^{p-1}\frac{2p(2p-2)\dots 2}{(n-1)(n-3)\dots 2}(n-1)!\,O_{n-1}\chi(Q)=0$$

donde F es el área de S.

Simplificando y transformando los coeficientes de manera que aparezcan las áreas O_i, resulta

$$(2.20) \qquad \sum_{\lambda=0}^{p-1} \binom{n-1}{2\lambda} \frac{O_n}{O_{n-1-2\lambda}\, O_{2\lambda}} K^{\lambda} M_{n-2\lambda-1} = \frac{1}{2}\, O_n\, \chi(Q)$$

donde debe entenderse que es $M_0 = F$, de acuerdo con (2.5) y (2.16). En resumen:

La fórmula generalizada de GAUSS-BONNET *para espacios de curvatura constante* K *se escribe*

$$(2.21) \qquad c_{n-1} M_{n-1} + c_{n-3} M_{n-3} + \ldots + c_1 M_1 + K^{n/2}\, V = \frac{1}{2}\, O_n\, \chi(Q)$$

para n *par, y*

$$(2.22) \qquad c_{n-1} M_{n-1} + c_{n-3} M_{n-3} + \ldots + c_2 M_2 + c_0 F = \frac{1}{2}\, O_n\, \chi(Q)$$

para n *impar. En ambos casos* M_i *son las integrales de curvatura media definidas por* (2.5) *y* (2.16) *y*

$$(2.23) \qquad c_i = \binom{n-1}{i} \frac{O_n}{O_i\, O_{n-1-i}}\, K^{(n-1-i)/2}\, .$$

Para n impar puede sustituirse $\chi(Q) = \frac{1}{2}\, \chi(S)$.

3. FÓRMULAS DUALES EN EL ESPACIO ELÍPTICO.

Consideremos el espacio elíptico ($K > 0$) y, por simplicidad, el caso $K = 1$.

Dada la hipersuperficie orientable y cerrada S, la paralela a distancia $\pi/2$ se llama la «dual» o «polar» de S; la representaremos por S^*. Si Q es el cuerpo limitado por S, el cuerpo Q^* limitado por S^* por el lado que no contiene a Q será el dual polar de Q.

Entre las integrales de curvatura media M_i de S y las M_i^* de S^* existe la relación [11]

$$(3.1) \qquad M_i^* = M_{n-1-i}\, . \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Por tanto, escribiendo (2.21) para S^*, teniendo en cuenta

(3.1) y que $\chi(Q^*)=\chi(Q)$, resulta (poniendo $M_0=F$),

$$c_{n-1}F+c_{n-3}M_2+\ldots+c_1M_{n-2}+V^*=\frac{1}{2}O_n\chi(Q) \tag{3.2}$$

que permite calcular el volumen V^* del cuerpo polar de Q, para n *par*.

La misma (2.21), teniendo en cuenta (3.1) y que $M_0{}^*=F^*$ (área de S^*) nos da

$$c_{n-1}F^*+c_{n-3}M_{n-3}+\ldots+c_1M_1+V=\frac{1}{2}O_n\chi(Q) \tag{3.3}$$

de la cual se deduce el área F^* de la superficie polar S^* para n *par*.

Para n *impar*, la fórmula dual de (3.22) es

$$c_{n-1}F+c_{n-3}M_2+\ldots+c_2M_{n-3}+c_0F^*=\frac{1}{4}O_n\chi(S) \tag{3.4}$$

donde se ha aplicado la relación $\chi(Q)=\frac{1}{2}\chi(S)$.

Para n *impar*, el volumen V^* del cuerpo polar no se puede obtener por dualidad de la fórmula de GAUSS-BONNET. En este caso V^* se puede calcular restando al doble del volumen total del espacio elíptico (o sea O_n) el volumen del cuerpo paralelo exterior a Q a distancia $\pi/2$, dado por la fórmula generalizada de STEINER y aplicando luego (2.22) para simplificar el resultado (ver ALLENDOERFER [1]). Se obtiene así, para n *impar*

$$c_{n-2}M_{n-2}+c_{n-4}M_{n-4}+\ldots+c_1M_1+V+V^*=\left(1-\frac{1}{2}\chi(Q)\right)O_n \tag{3.5}$$

donde también se puede sustituir $\chi(Q)$ por su igual $\frac{1}{2}\chi(S)$.

Ejemplos. - Para $n=2$, (3.2) y (3.3) nos dan las fórmulas elementales $L+F^*=2\pi\chi(Q)$, $L^*+F=2\pi\chi(Q)$, habiendo llamado en este caso L a la longitud del contorno de Q y F al área.

Para $n=3$, (3.4) da

$$F+F^*=2\pi\chi(S)$$

relación debida a BLASCHKE [3] y (3.5) da

$$M_1+V+V^*=2\pi^2-\pi^2\chi(Q)$$

Para $n=4$, (3.2) y (3.3) dan respectivamente

$$2F + 3M_2 + 3V^* = 4\pi^2\chi(Q)$$
$$2F^* + 3M_1 + 3V = 4\pi^2\chi(Q)$$

Para $n=5$, según (3.4) se tiene

$$F + 2M_2 + F^* = \frac{4}{3}\pi^2\chi(S)$$

y según (3.5)

$$M_3 + M_1 + V + V^* = \left(1 - \frac{1}{2}\chi(Q)\right)\pi^3 .$$

4. Una aplicación.

Consideremos el espacio elíptico n-dimensional ($K=1$) y en él el cuerpo Q limitado por la hipersuperficie S del número anterior.

Recordemos que si dos normales a S en puntos consecutivos de una misma línea de curvatura (por ejemplo la tangente a la dirección A_0A_i, n° 2) se cortan en el punto C_i tal que $C_iA=\varrho_i$ y el elemento de arco sobre la línea de curvatura es ds_i, se tiene $ds_i = \operatorname{sen}\varrho_i d\varphi_i$, siendo $d\varphi_i$ el ángulo entre las dos normales. Por tanto el elemento de área dF de S se puede expresar

$$dF = \left[\prod_1^{n-1} \operatorname{sen}\varrho_i d\varphi_i\right] . \tag{4.1}$$

Por otra parte, entre los ϱ_i y los radios de curvatura principales R_i introducidos en el n° 2 existe la relación [6, pág. 214],

$$R_i = \operatorname{tg}\varrho_i . \tag{4.2}$$

Tomemos ahora a partir de los puntos A_0 de S y sobre las normales, segmentos de longitud $\lambda\,(-\pi/2 \leq \lambda \leq \pi/2)$. Si $\lambda > 0$ tomaremos el segmento en la dirección positiva C_iA_0 y si $\lambda < 0$ en la dirección negativa A_0C_i. El lugar geométrico de los extremos de estos segmentos constituye la hipersuperficie S_λ paralela a S a distancia λ. El elemento de área dF_λ de S_λ, según (4.1), será

$$(4.3) \qquad dF_\lambda = [\prod_1^{n-1} \operatorname{sen}(\varrho_i + \lambda)\, d\varphi_i]$$

o bien, según (4.1) y (4.2)

$$(4.4) \qquad dF_\lambda = \prod_1^{n-1} \left(\cos\lambda + \frac{\operatorname{sen}\lambda}{R_i}\right) dF$$

y el elemento de volumen del espacio correspondiente a un punto P de S_λ, será

$$(4.5) \qquad dP = [dF_\lambda d\lambda] \; .$$

Veamos el signo de este elemento de volumen. Cada factor sen $(\varrho_i + \lambda) d\varphi_i$ de (4.3) es positivo para $-\varrho_i < \lambda \leq \pi/2$ y negativo para $-\pi/2 \leq \lambda < -\varrho_i$; en el primer caso la distancia PA_0 es un *mínimo* de las distancias de P a los puntos de la línea de curvatura tangente a la dirección A_0A_i, y en el segundo caso un *máximo*. Para cada punto P de la normal A_0A_n a S y cada línea de curvatura A_0A_i definimos el número δ_i igual a $+1$ si la distancia PA_0 es un mínimo e igual a -1 si es un máximo; si no es ni máximo ni mínimo pondremos $\delta_i = 0$. El signo del dP correspondiente a P será el signo del producto $\nu(P, A_0) = \delta_1\delta_2 \ldots \delta_{n-1}$. Por tanto, integrando (4.5) a toda la superficie F de S y a todo λ entre $-\pi/2 \leq \lambda \leq \pi/2$, en el primer miembro el elemento de volumen dP aparece factor común de la suma de los coeficientes ν correspondientes a las distintas normales trazadas desde P a S. Es decir, si estas normales son $PA_{01}, PA_{02}, \ldots$ poniendo $N = \sum_h \nu(P, A_{0h})$, resulta

$$(4.6) \qquad \int N dP = \int_S \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \prod_1^{n-1} \left(\cos\lambda + \frac{\operatorname{sen}\lambda}{R_i}\right) dF d\lambda \; .$$

Teniendo en cuenta que

$$(4.7) \qquad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-i}\lambda \operatorname{sen}^{i-1}\lambda \, d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ es } par \\ \dfrac{2O_n}{O_{n-i}O_{i-1}} & \text{si } i \text{ es } impar \, , \end{cases}$$

según la definición (2.16), (2.5) de las integrales de curvatura media y la notación (2.23), resulta

$$\int N dP = 2(c_0 M_0 + c_2 M_2 + \ldots + c_{n-1} M_{n-1}) \tag{4.8}$$

si n es *impar*, y

$$\int N dP = 2(c_0 M_0 + c_2 M_2 + \ldots + c_{n-2} M_{n-2}) \tag{4.9}$$

si n es *par*.

Teniendo en cuenta (2.22) y (3.2) estas fórmulas toman la forma simple (puesto que para $K=1$ es $c_i = c_{n-1-i}$),

$$\int N dP = O_n \chi(Q) \qquad \text{para } n \text{ impar} \tag{4.10}$$

$$\int N dP = O_n \chi(Q) - 2V^* \qquad \text{para } n \text{ par} \,. \tag{4.11}$$

En el primer miembro las integrales están extendidas a todo el espacio elíptico. Para $n=2,3$ estas fórmulas son debidas a BLASCHKE [4].

5. DENSIDAD PARA CONJUNTOS DE RECTAS.

Para determinar una recta G en el espacio de curvatura constante K (o sea, una geodésica del espacio), supongamos una hipersuperficie S fija que corte a G; sea dF el elemento de área de S correspondiente al punto P de intersección, dO_{n-1} el elemento de área sobre la esfera euclidiana unidad de centro P correspondiente a la dirección de la recta y φ el ángulo entre G y la normal a S en P. Entonces la densidad para medir conjuntos de rectas es [12]

$$dG = |\cos \varphi| \, [dO_{n-1} \, dF] \,. \tag{5.1}$$

De aqui se deduce inmediatamente, por ejemplo, que la medida del conjunto de rectas que cortan a una hipersuperficie convexa y cerrada es igual a $\frac{1}{4\pi} O_n F$ [12].

Sea t el arco sobre G. Si dt es el elemento de este arco en el punto P de G, de (5.1) se deduce

$$[dG\,dt] = [dO_{n-1}\,dP] \tag{5.2}$$

siendo $dP = |\cos\varphi|\,[dF\,dt]$ el elemento de volumen del espacio correspondiente al punto P. Integrando ambos miembros de (5.2) a todos los puntos P interiores al cuerpo Q limitado por S, en el primer miembro el arco t podrá variar dentro de la cuerda λ que G determina en Q y el segundo miembro da $\frac{1}{2}O_{n-1}V$ (teniendo en cuenta que a direcciones opuestas corresponde la misma geodésica). Se tiene así la fórmula integral

$$\int \lambda\,dG = \frac{1}{2}\,O_{n-1}\,V \tag{5.3}$$

que es independiente de K y vale aun para espacios de RIEMANN cualesquiera [12]. En (5.3) la integral está extendida a todas las rectas G que cortan a Q.

6. Fórmula integral de las cuerdas.

En el espacio euclidiano ($K=0$) de n dimensiones, generalizando una conocida fórmula de CROFTON para $n=2$, HADWIGER ha obtenido la fórmula integral [7],

$$\int \lambda^{n+1}\,dG = \frac{1}{2}\,n(n+1)\,V^2 \tag{6.1}$$

donde, como en el número anterior, λ significa la longitud de la cuerda que la recta G determina en el cuerpo Q, *supuesto ahora convexo*, de volumen V. La integración está extendida a todas las rectas del espacio.

Nuestro objeto es generalizar esta fórmula al caso de los espacios de curvatura constante.

Sean P_1, P_2 dos puntos de la recta G y sean t_1, t_2 los valores de t correspondientes a los mismos. En un sistema de coordenadas polares de origen P_1 el elemento de volumen correspondiente a P_2 vale como se sabe

$$dP_2 = \frac{\operatorname{sen}^{n-1}\sqrt{K}\,|t_2 - t_1|}{K^{(n-1)/2}}\,[dt_2\,dO_{n-1}] \tag{6.2}$$

Multiplicando exteriormente por dP_1 y teniendo en cuenta (5.2) resulta

$$(6.3) \qquad [dP_1 dP_2] = \frac{\operatorname{sen}^{n-1}\sqrt{K}\,|t_2 - t_1|}{K^{(n-1)/2}}\,[dt_1 dt_2 dG]$$

fórmula obtenida por otro camino por HAIMOVICI [8].

Sea ahora Q un cuerpo convexo e integremos (6.3) a todos los pares de puntos P_1, P_2 interiores a Q. El primer miembro vale V^2, siendo V el volumen de Q. En el segundo miembro, si λ es la longitud de la cuerda que G determina en Q aparece la integral

$$(6.4) \qquad \Phi_{n-1}(\lambda, K) = \int_0^\lambda\int_0^\lambda \frac{\operatorname{sen}^{n-1}\sqrt{K}\,|t_2 - t_1|}{K^{(n-1)/2}}\,dt_1 dt_2$$

que vale

$$(6.5) \qquad \Phi_{n-1}(\lambda, K) = \frac{2}{(n-1)\,K^{(n+1)/2}}\left[\frac{1}{n-1}\operatorname{sen}^{n-1}\sqrt{K}\,\lambda + \sum_{i=1}^{(n-3)/2}\frac{(n-2)\ldots(n-2i)}{(n-3)\ldots(n-1-2i)^2}\operatorname{sen}^{n-1-2i}\sqrt{K}\,\lambda\right] + \frac{(n-2)\ldots 3.1}{(n-1)\ldots 4.2}\,K\lambda^2,$$

para n *impar*, y

$$(6.6) \qquad \Phi_{n-1}(\lambda, K) = \frac{2}{(n-1)\,K^{(n+1)/2}}\left[\frac{1}{n-1}\operatorname{sen}^{n-1}\sqrt{K}\,\lambda + \sum_{i=1}^{(n-2)/2}\frac{(n-2)\ldots(n-2i)}{(n-3)\ldots(n-1-2i)^2}\operatorname{sen}^{n-1-2i}\sqrt{K}\,\lambda + \frac{(n-2)\ldots 4.2}{(n-3)\ldots 3.1}\sqrt{K}\,\lambda\right]$$

para n *par*. Para $n=2$ resulta $\Phi_1(\lambda, K) = 2\,(\sqrt{K}\lambda - \operatorname{sen}\sqrt{K}\lambda)\,K^{-\frac{3}{2}}$.

La integración de ambos miembros de (6.3) nos da por tanto

$$(6.7) \qquad \int \Phi_{n-1}(\lambda, K)\,dG = V^2$$

donde en el primer miembro la integración está extendida a todas las rectas G que cortan a Q.

Por ejemplo, para $n=2$ se tiene

$$\frac{1}{K}\int\left(\lambda - \frac{\operatorname{sen}\sqrt{K}\,\lambda}{\sqrt{K}}\right)dG = \frac{1}{2}\,F^2$$

siendo F el área del dominio convexo Q. Para $n=3$.

$$\frac{1}{K}\int\left(\lambda^2 - \frac{1}{K}\,\mathrm{sen}^2\sqrt{K}\,\lambda\right)dG = 2V^2$$

y para $n=4$,

$$\frac{1}{K^2}\int\left(\lambda - \frac{1}{6\sqrt{K}}\,\mathrm{sen}^3\sqrt{K}\,\lambda - \frac{1}{\sqrt{K}}\,\mathrm{sen}\sqrt{K}\,\lambda\right)dG = \frac{3}{4}\,V^2\,.$$

Obsérvese que para $K\to 0$ resulta siempre el resultado de HADWIGER (6.1).

7. FÓRMULAS DUALES DE LAS INTEGRALES DE LAS CUERDAS.

En el espacio elíptico, $K=1$, a las fórmulas del número anterior corresponden otras fórmulas duales.

a) Consideremos primero la fórmula (5.3). Por dualidad, a una recta G corresponde un espacio lineal L_{n-2} de dimensión $n-2$. La densidad para conjuntos de estos espacios la indicaremos por dL_{n-2} y su valor es igual a la densidad dG de su recta dual. Supongamos Q convexo. A la longitud λ de la cuerda que G determina en Q corresponde el ángulo $\pi-\varphi$, siendo φ el ángulo formado por los hiperplanos tangentes a Q trazados por L_{n-2}. Por tanto, la fórmula dual de (5.3) es

$$\int(\pi-\varphi)\,dL_{n-2} = \frac{1}{2}\,O_{n-1}V^*\,. \tag{7.1}$$

Como la medida total de los L_{n-2} exteriores a Q es igual a la medida de las rectas que cortan a su dual Q^* y por tanto igual a $\frac{1}{4\pi}O_nF^*$, (7.1) se puede escribir

$$\int\varphi\,dL_{n-2} = \frac{1}{4}\,O_n\,F^* - \frac{1}{2}\,O_{n-1}V^* \tag{7.2}$$

donde la integración está extendida a todos los L_{n-2} exteriores a Q, φ es el ángulo formado por los hiperplanos tangentes a Q trazados por L_{n-2}, F^* es el área de la hipersuperficie S^* del cuerpo dual de Q y V^* es el volumen de este cuerpo dual.

Los valores de F^* y V^* pueden sustituirse por invariantes del cuerpo Q aplicando las fórmulas del nº 3.

Por ejemplo, para $n=2$, (7.2) se escribe

$$\int \varphi dP = \pi(L - F) \tag{7.3}$$

siendo φ el ángulo de las tangentes a la figura convexa Q trazadas desde el punto P, L la longitud y F el área de Q; la integración extendida a todo el plano elíptico exterior a Q.

Para $n=3$, resulta

$$\int \varphi dG = 2\pi(M_1 + V) - \frac{1}{2}\pi^2 F \ . \tag{7.4}$$

De aquí se deduce, por ejemplo, que para todo cuerpo convexo del espacio elíptico se cumple la desigualdad

$$F \leq \frac{4}{\pi}(M_1 + V) \ . \tag{7.5}$$

Para los casos particulares (7.3) y (7.4) ver [10], [12].

b) Consideremos ahora la fórmula dual de (6.7). Observemos que para *n par* es, según (6.6),

$$\Phi_{n-1}(\pi - \varphi, 1) = \Phi_{n-1}(\varphi, 1) + \frac{2(n-2)\ldots 4.2}{(n-1)(n-3)\ldots 3.1}\pi - \frac{4(n-2)\ldots 4.2}{(n-1)\ldots 3.1}\varphi \tag{7.6}$$

y por tanto, teniendo en cuenta la medida total de las rectas que cortan a Q y la fórmula (7.2), resulta que la fórmula dual de (6.7) para *n par* es

$$\int \Phi_{n-1}(\varphi, 1) dL_{n-2} = V^{*2} + \frac{(n-2)(n-4)\ldots 2}{2(n-1)(n-3)\ldots 1}(O_n F^* - 4 O_{n-1} V^*) \tag{7.7}$$

donde la integración está extendida a todos los L_{n-2} exteriores a Q, φ representa el ángulo formado por los hiperplanos tangentes a Q trazados por L_{n-2}, $\Phi_{n-1}(\varphi, 1)$ es la función (6.6),

F^* y V^* son el área y el volumen del cuerpo Q^* polar de Q, que pueden calcularse a partir de los invariantes de Q por medio de las fórmulas del nº 3.

Por ejemplo, para $n=2$ resulta

$$\int (\varphi - \operatorname{sen} \varphi)\, dP = \frac{1}{2} L^2 - \pi F$$

que es la clásica fórmula de CROFTON para el plano elíptico.

Si n es *impar*, según (6.5) resulta

$$(7.8) \qquad \Phi_{n-1}(\pi - \varphi, 1) = \Phi_{n-1}(\varphi, 1) + \frac{(n-2)\ldots 3.1}{(n-1)(n-3)\ldots 4.2}\,\pi^2 - \frac{2(n-2)\ldots 3.1}{(n-1)(n-3)\ldots 4.2}\,\pi\varphi$$

y la fórmula dual de (6.7), aplicando (7.2), resulta

$$(7.9) \qquad \int \Phi_{n-1}(\varphi, 1)\, dL_{n-2} = V^{*2} + \frac{(n-2)(n-4)\ldots 3.1}{(n-1)(n-3)\ldots 4.2}\,\frac{\pi}{4}\,(O_n F^* - 4 O_{n-1} V^*)$$

donde los distintos términos tienen el mismo significado de antes.

Por ejemplo, para $n=3$, resulta

$$\frac{1}{2}\int (\varphi^2 - \operatorname{sen}^2 \varphi)\, dG = (M_1 + V)^2 - \frac{\pi^3}{4} F$$

como ya obtuvimos en otro lugar [12].

BIBLIOGRAFIA

[1] C. B. ALLENDOERFER, *Steiner's formulae on a general S^{n+1}*, Bull. of the Am. Math. Soc. 54, 1948, 128-135.

[2] C. B. ALLENDOERFER-A. WEIL, *The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedron*, Transactions of the Am. Math. Soc. 53, 1943, 101-129.

[3] W. BLASCHKE, *Integralgeometrie 22: Zur elliptischen Geometrie*, Math. Zeits. 41, 1936, 785-786.

[4] — — *Ueber geschlossene Kurven und Flächen in der elliptischen Geometrie*, Hamburg Abh. 12, 1938, 111-113.

[5] S. S. CHERN, *On the curvatura integra in a riemannian manifold*, Annals of Math. 46, 1945, 674-684.

[6] E. P. EISENHART, *Riemannian Geometry*, Princeton, 1926.

[7] H. HADWIGER, *Neue Integralrelationen für Eikörperpaare*, Acta Scientiarum Math. XIII, 1950, 252-257.

[8] M. HAIMOVICI, *Généralisation d'une formule de Crofton dans un espace de Riemann à n dimensions*, C. R. Acad. Sc. de Roumanie, 7, 1936.

[9] G. HERGLOTZ, *Ueber die Steinersche Formel für Parallelflächen*, Hamburg Abh. XV, 1943, 165-177.

[10] L. A. SANTALÓ, *Integral Formulas in Crofton's style on the sphere*, Duke Math. J. 9, 1942, 707-722.

[11] — — *On parallel hypersurfaces in the elliptic and hyperbolic n-dimensional space*, Proc. Am. Math. Soc. 1, 1950, 325-330.

[12] — — *Measure of sets of geodesics in a riemannian space and applications to integral formulas in elliptic and hyperbolic spaces*, Summa Brasiliensis Math. 3, 1952, 1-11.