Verallgemeinerung eines Satzes von T. Kubota über Eilinien,

von

L. A. Santaló in Rosario (Argentinien)

In "*The Tôhoku Mathematical Journal*" Vol. 47, S. 96 hat T. Kubota den folgenden Satz bewiesen:

"*Die Eilinie K besitze überall den Krümmungskreis der sich entlang der Eilinie K stetig ändert. Der grösste und der kleinste Krümmungsradius der Eilinie K seien bzw. mit R_M, R_m bezeichnet. Konstruiert man nun einen Kreis mit dem Radius r, der diese Eilinie K mindestens in drei verschiedenen oder koinzidenten Punkten schneidet, dann ist*

$$R_m \leqq r \leqq R_M."$$

In dieser Note möchte ich den folgenden allgemeinen Satz beweisen:

"*Die Eilinie K besitzt überall Krümmungsradius der sich entlang der Eilinie K stetig ändert; der grösste und der kleinste seiner Werte seien mit R_M und R_m bezeichnet. Sei ausserdem eine zweite Eilinie k ebenfalls mit stetiger Krümmung und deren Krümmungsradius r entweder kleiner als R_m oder grösser als R_M sei. Dann können K und k sich nicht in mehr als zwei Punkten schneiden.*"

Für den Beweis dieses Satzes werden wir das Verfahren von Integralgeometrie([1]) anwenden.

1. Die Lage einer gegebenen Eilinie K in der Ebene wird bestimmt durch die Koordinaten x, y einer ihrer Punkte und den Winkel φ einer Rotation um diesen Punkt.

Als Mass einer Lagenmenge der Eilinie k (*Kinematisches Mass*), nimmt man das Integral

$$\int dx dy d\varphi \tag{1}$$

erstreckt zu der betrachteten Menge.

([1]) Vgl. W. Blaschke "Vorlesungen über Integralgeometrie" I Heft. Hamburger Mathematische Einzelschriften n° 20, 1936.

L. A. Santaló "Geometria Integral 4. Sobre la medida cinemática en el plano" Hamburger Abhandlungen, 11, 1936.

Ist n die Anzahl der gemeinsamen Punkte von K mit k (natürlich ist n Funktion von x, y, φ), gilt die sogenannte Formel von Poincaré[1]

$$\int n dx dy d\varphi = 4Uu, \tag{2}$$

wo U, u die Längen von K, k sind.

2. Nehmen wir an, dass der Krümmungsradius r von k überall kleiner sei als R_m, also $r < R_m$. Das Verfahren ist dasselbe wenn $r > R_M$.

Legen wir die beiden Eilinientangenten in einem Punkt und an derselben Seite der gemeinsamen Tangente; dann, weil $r < R_m$, wird k ganz im Inneren von K bleiben. In dieser Lage nehmen wir einen Punkt O im Inneren von k und K. Zwischen den Stützfunktionen $H = H(\theta)$ und $h = h(\theta + \varphi)$ von K und k bezüglich O wird $H(\theta) \geqq h(\theta + \varphi)$ sein. Die Krümmungsradien sind durch $R = H + H''$ und $r = h + h''$ gegeben (die Striche stellen Ableitungen nach θ dar). Wegen der Annahme $r < R_m$, ist dann

$$H(\theta) - h(\theta + \varphi) \geqq 0, \quad (H(\theta) - h(\theta + \varphi)) + (H''(\theta) - h''(\theta + \varphi)) > 0,$$

folglich ist $H(\theta) - h(\theta + \varphi)$ Stützfunktion einer Eilinie.

Gleiches gilt für $H(\theta) + h(\theta + \varphi + \pi)$.

Zur Berechnung des Lagenmasses von k in welcher K schneidet, nehmen wir zuerst an dass φ fest bleibt, das heisst, wir betrachten nur Schiebungen von k. In diesem Fall, die Lagen des Punktes x, y (1) füllen den Flächeninhalt welcher begrenzt ist durch die Eilinien deren Stützfunktionen $H(\theta) + h(\theta + \varphi + \pi)$ und $H(\theta) - h(\theta + \varphi)$ sind. Dieser Flächeninhalt hat den Wert[2]

$$\begin{aligned} F(\varphi) = & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(H(\theta) + h(\theta + \varphi + \pi))^2 - (H'(\theta) + h'(\theta + \varphi + \pi))^2] d\theta \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(H(\theta) - h(\theta + \varphi))^2 - (H'(\theta) - h'(\theta + \varphi))^2] d\theta \\ = & \int_0^{2\pi} (H(\theta) h(\theta + \varphi + \pi) - H'(\theta) h'(\theta + \varphi + \pi)) d\theta \\ & + \int_0^{2\pi} [H(\theta) h(\theta + \varphi) - H'(\theta) h'(\theta + \varphi)] d\theta. \end{aligned}$$

---

(1) W. Blaschke, loc. cit. Seite 24.

(2) Wie man weiss wird der Flächeninhalt einer Eilinie, deren Stützfunktion $p = p(\theta)$ ist, durch

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p^2 - p'^2) d\theta$$

gegeben. Vgl. etwa W. Blaschke loc. cit. Seite 29.

Um das kinematische Mass zu berechnen, müssen wir jetzt k drehen lassen, und wir finden

$$M=\int_0^{2\pi} F(\varphi)d\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} H(\theta)h(\theta+\varphi+\pi)d\theta d\varphi$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} H(\theta)h(\theta+\varphi)d\theta d\varphi=2Uu,$$

weil
$$\int_0^{2\pi} h'(\theta+\varphi)d\varphi=\int_0^{2\pi} h'(\theta+\varphi+\pi)d\varphi=0.$$

Folglich: *Das Mass der Lagen der Eilinie k in welcher die Eilinie K schneidet, ist $2Uu$.*

3. Das Mass der Lagen von k, in welcher sie einen einzigen gemeinsamen Punkt mit K hat, ist null, weil in diesem Falle k und K Tangenten sein müssen und das Integral (1) erstreckt zu den Lagen, in welcher die Eilinien k und K sich berühren ist offenbar null.

Nennen wir M_i das Mass der k in welcher K und k, i Schnittpunkte haben. Die Formel (2) gibt

$$2M_2+3M_3+4M_4+5M_5+\ldots=4Uu; \tag{4}$$

und die Formel (3)

$$M_2+M_3+M_4+\ldots=2Uu. \tag{5}$$

Von (4) und (5) schliessen wir

$$M_3+2M_4+3M_5+\ldots=0.$$

Dann: "*Wenn die Krümmungsradien zweier Eilinien die Bedingungen $r<R_m$, oder $r>R_M$ erfüllen, ist das Mass der Lagen in welchem sie mehr als zwei gemeinsame Punkte besitzen null.*"

4. Es bleibt zu berücksichtigen ob Lagen existieren *von Mass null* in welchen k und K mehr als zwei gemeinsame Punkte haben.

Ob k und K einen Schnittpunkt haben in welcher sie sich durchdringen wird mindestens ein zweiter Punkt derselben Art vorhanden sein. Seien A und B zwei Punkte in welchen k und K sich durchdringen, und C ein dritter gemeinsamer Punkt von k und K. In einer Umgebung von A können wir zwei Kreise ziehen mit dem Zentrum über die Eilinie k und dass der erste ganz im Inneren, der zweite ganz im Aüsseren von K liegen. Wir ziehen ebenfalls zwei ähnliche Kreise in der Umgebung von B. Immer das k gemeinsamen Punkte mit diesen vier Kreisen habe, wird sie K in zwei Punkte in der Nähe von A und B schneiden. Man kann aber immer k bewegen zu einer Lagenmenge dessen Mass grösser als null ist, so dass sie einen Punkt von K in der Umgebung von C ebenso wie die vier Kreise, schneide. Folglich: Wenn k und K sich in mehr als zwei Punkten schneiden und mindestens in zwei sich durchdringen, gibt es eine Lagenmenge dessen Mass grösser als null ist in welcher k und K mehr als zwei gemeinsame Punkte haben.

Bleibt noch zu berücksichtigen ob der Fall möglich ist dass k und K nur Berührungpunkte besitzen. Aber das ist nicht möglich weil zwischen zwei Berührungspunkte hätten wir zwei konvexe Kurvenbogen mit $r < R_m$ und mit denselben Tangenten in den Endpunkten, was nicht möglich ist.(1)

Der Satz ist dann vollständig bewiesen.

Für den Fall dass k ein Kreis sei, fällt der Satz mit dem am Anfang ausgesprochenen Satz von T. Kubota zusammen.

Rosario, 20 September 1940.

(Eingegangen am 13 ten November 1940)

Eine Bemerkung zur vorigen Arbeit: Herr T. Minoda hat mir freundlichst bemerkt dass der obige Satz sowie mein Satz sich bereits wesentlich bei H. Brunn „Über Kurven ohne Wendepunkt 1889" finden obwohl die Beweise ganz von den unsrigen verschieden sind.

(Tadahiko Kubota)

(1) Das kann man sehen z.B. durch den ersten Teil der zitierten Arbeit von Kubota ("*Ein Satz über Eilinien*" Tôhoku Math. Journal, vol. 47 s. 96).