Beweis eines Satzes von Bottema über Eilinien,

von

L. A. Santaló in Rosario (Argentinien).

Sind $H_0(\theta)$ und $H_1(\theta)$ Stützfunktionen zweier Eilinien K_0 und K_1, nennt man nach Minkowski "gemischten Flächeninhalts" die Ausdrücke

$$F_{ij}=F_{ji}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(H_iH_j-H_i'H_j')d\theta \quad i,j=0,1. \tag{1}$$

oder, wenn ds_i das Bogenelement ist,

$$F_{ij}=\frac{1}{2}\int H_i ds_j=\frac{1}{2}\int H_j ds_i \quad i,j=0,1. \tag{2}$$

Zwischen F_{ij} besteht bekanntlich die Ungleichung[1]

$$F_{01}^2-F_{00}F_{11}\geqq 0. \tag{3}$$

Nehmen wir an, dass K_0 und K_1 überall einen stetigen Krümmungsradius R_0, R_1 besitzen. Ist r_m die grösste Zahl, die die Beziehung

$$rR_1(\theta)\leqq R_0(\theta) \tag{4}$$

für alle Werte von θ befriedigt, und r_M die kleinste Zahl, welche die ähnliche Ungleichheit

$$rR_1(\theta)\geqq R_0(\theta) \tag{5}$$

befriedigt, so hat Bottema[2] bewiesen dass

$$F_{01}^2-F_{00}F_{11}\leqq\frac{1}{4}F_{11}^2(r_M-r_m)^2. \tag{6}$$

In dieser Note möchte ich diese Ungleichung auf einem anderen Wege nachweisen.

1. Betrachten wir die Eilinie rK_1 (die homothetische der K_1 mit Ähnlichkeitsverhaltnis r). Nehmen wir an, dass r der Ungleichung (4) genügt. Legen wir die beiden Eilinien rK_1 und K_0 sodass sie Tangente in einem Punkt gemein haben und an derselben Seite der

---

(1) Siehe W. Blaschke "Vorlesungen über Integralgeometrie" Erstes Heft. Hamburger Math. Einzelschriften, 1936. S. 36.

(2) O. Bottema "Eine obere Grenze für das isoperimetrische Defizit einer ebenen Kurve." Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 36 (1933).

gemeinsamen Tangente liegen; dann, wegen (4), wird rK_1 ganz im Inneren von K_0 bleiben. In dieser Lage nehmen win einen Punkt O im Inneren von rK_1 und K_0. Zwischen den Stützfunktionen $rH_1(\theta)$ und $H_0(\theta)$ von rK_1 und K_0 bezüglich O, wird $rH_1(\theta) \leqq H_0(\theta)$ sein. Die Krümmungsradien von rK_1 und K_0 sind durch $rR_1 = rH_1 + rH_1''$, $R_0 = H_0 + H_0''$ gegeben (die Striche stellen Ableitungen dar). Dann ist, wegen (4):

$$H_0 - rH_1 \geqq 0,$$
$$(H_0 - rH_1) + (H_0'' - rH_1'') \geqq 0.$$

Folglich ist $H_0(\theta) - rH_1(\theta)$ Stützfunktion einer Eilinie.

2. Wenn man alle Schiebungen von rK_1 berücksichtigt, in welchen diese ganz im Inneren von K_0 bleibt, dann wird der Punkt O den Flächeninhalt füllen welcher begrenzt ist durch die Eilinie deren Stützfunktion $H_0 - rH_1$ ist. Dieser Flächeninhalt, den man als Mass M_0 der Schiebungen von rK_1 bezeichnen kann, in welchen sie ganz im Inneren von K_0 enthalten ist(¹), gilt nach (1)(²).

$$M_0 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[(H_0 - rH_1)^2 - (H_0' - rH_1')^2\right]d\theta$$
$$= F_{00} - 2rF_{01} + r^2F_{11}.$$

Da $M_0 \geqq 0$ sein muss, folgt dass

$$F_{00} - 2rF_{01} + r^2F_{11} \geqq 0 \tag{7}$$

für alle r welche (4) genügen.

Ähnlicherweise kann man beweisen dass, wenn r der Ungleichung (5) genügt, das Mass der Schiebungen von rK_1, in welchen diese K_0 ganz im Innern enthält, ist auch durch

$$M_0 = F_{00} - 2rF_{01} + r^2F_{11}$$

gegeben.

Folglich, gilt die Ungleichung (7) für alle r, welchen entweder (4) oder (5) genügen.

3. Aus der Identität

(¹) Siehe W. Blaschke "Integralgeometrie 21. Über Schiebungen", Math. Zeits. Bd. 42 (1937).

(²) Wie man weiss wird der Flächeninhalt einer Eilinie, deren Stützfunktion $H = H(\theta)$ ist, durch

$$F = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(H^2 - H'^2)d\theta$$

gegeben.

$$F_{00}-2rF_{01}+r^2F_{11}=F_{11}\left(\frac{F_{01}}{F_{11}}-r\right)^2-\left(\frac{F_{01}^2}{F_{11}}-F_{00}\right)$$

und aus (7), wenn man $r=r_m$ und $r=r_M$ nimmt, folgt

$$\left.\begin{aligned}\frac{F_{01}^2}{F_{11}}-F_{00}\leqq F_{11}\left(\frac{F_{01}}{F_{11}}-r_m\right)^2\\ \frac{F_{01}^2}{F_{11}}-F_{00}\leqq F_{11}\left(\frac{F_{01}}{F_{11}}-r_M\right)^2\end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Diese Ungleichungen geben schon eine obere Grenze für das Defizit $\dfrac{F_{01}^2}{F_{11}}-F_{00}$.

4. Wegen (2), (4) und (5) hat man

$$\begin{aligned}F_{01}&=\frac{1}{2}\int H_1 ds_0=\frac{1}{2}\int H_1R_0\,d\theta\leqq\frac{1}{2}r_M\int H_1R_1\,d\theta\\ &=\frac{1}{2}r_M\int H_1ds_1=r_MF_{11},\end{aligned}\tag{9}$$

und

$$\begin{aligned}F_{01}&=\frac{1}{2}\int H_1 ds_0=\frac{1}{2}\int H_1R_0\,d\theta\geqq\frac{1}{2}r_m\int H_1R_1\,d\theta\\ &=\frac{1}{2}r_m\int H_1ds_1=r_mF_{11}.\end{aligned}\tag{9)'$$

Folglich

$$\frac{F_{01}}{F_{11}}-r_m\geqq 0,\quad r_M-\frac{F_{01}}{F_{11}}\geqq 0. \tag{10}$$

Wegen (3) können wir die Ausdrücke (8) multiplizieren, und nach (10) findet man

$$\frac{F_{01}^2}{F_{11}}-F_{00}\leqq F_{11}\left(\frac{F_{01}}{F_{11}}-r_m\right)\left(r_M-\frac{F_{01}}{F_{11}}\right). \tag{11}$$

Auf Grund der Beziehung

$$xy\leqq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

folgt aus (11) dass

$$\boxed{\frac{F_{01}^2}{F_{11}}-F_{00}\leqq\frac{1}{4}F_{11}(r_M-r_m)^2.} \tag{12}$$

Das ist die Ungleichung (6), die wir beweisen wollten.

Aus (8) folgt dass das Gleichheitszeichen in (12) nur gilt wenn, entweder in beiden Ausdrücken (8) das Zeichen = vorkommt oder einer der Formeln (8) null ist. In beiden Fällen, aus (8) und (9) folgt dass $r_m = r_M$ sein muss. Aus (4) und (5) folgt dann dass $rK_1 \equiv K_0$, also, K_1 und K_0 ähnlich liegen..

5. Nimmt man K_1 als Einheitskreis, so werden r_m und r_M der kleinste und der grösste Krümmungsradius von K_0, und $2F_{01} = U_0$ (U_0 = Umfang von K_0), $F_{00} = F_0$, $F_{11} = \pi$. Die Ungleichheit (12) wird dann

$$U_0^2 - 4\pi F \leqq \pi^2 (r_M - r_m)^2.$$

Diese Ungleichung stammt auch von Bottema[1]. Das Gleichheitszeichen gilt nur für den Kreis.

Rosario (Rép. Argentina) Math. Institut. Dezember, 1940.

Eingegangen am 3. Februar, 1941.

(1) O. Bottema, loc. cit. Vgl. auch Bonnesen-Fenchel "Theorie der konvexen Körper" Ergebnisse der Math. Berlin, 1934, S. 83.