UNAS FORMULAS INTEGRALES Y UNA DEFINICION DE AREA q-DIMENSIONAL DE UN CONJUNTO DE PUNTOS

POR L. A. SANTALO

(Recibido en abril 19, 1950)

SUMMARY. Let C be a set of points in the euclidean n-space E_n. Let P_i be the center of an $(n-1)$-dimensional sphere C_{n-1} of radius R and let $dP_i = [dx^1{}_i dx^2{}_i \dots dx^n{}_i]$ be the element of volume in E_n corresponding to P_i. Let N_s be the number of intersections of C with s $(n-1)$-spheres C_{n-1}; N_s is a function of $P_1, P_2, \dots, P_s$. Let us consider the sequence

$$I_1 = \int N_1 dP_1, \quad I_2 = \int N_2 dP_1 dP_2, \quad I_3 = \int N_3 dP_1 dP_2 dP_3, \dots \tag{1}$$

where the integrals, in the sense of Lebesgue, are extended over the whole space E_n with respect to each dP_i.

If the integrals (1) *exist* and I_{q+1} is the first equal to zero (that is, $I_q \neq 0$, $I_s = 0$ for $s > q$), q will be defined as the *dimension* of C. The q-dimensional area of C is defined by the formula

$$A_q = (\beta(n, q, q) R^{q(n-1)})^{-1} \int N_q dP_1 dP_2 \dots dP_q \tag{2}$$

where $\beta(n, q, q)$ is given by (5.9). For $s < q$ it is $A_s = \infty$ and for $s > q$ it is $A_s = 0$.

We prove: 1. The integrals (1) exist and consequently the definition is applicable if C is an analytic set (or Suslin's set). 2. If C is a variety «regular» (that is, defined by $x = x(u^1, u^2, \dots u^q)$ with continuous first partial derivatives) or composed by a finite number of regular pieces, the definition agrees with the q-dimensional area in the classical sense.

1. *La densidad cinemática en* E_n. Sea E_n el espacio euclidiano n-dimensional. Un movimiento en E_n puede determinarse por la posición de un n-edro ortogonal formado por un punto P y n vectores de módulo unidad $e_i (i=1, 2, \ldots n)$ de origen P y perpendiculares entre sí dos a dos. Si P_0, e_i^0 es una posición fija de este n-edro, tomada como origen, a cada P, e_i le corresponde el movimiento que lleva a coincidir P_0, e_i^0 con P, e_i.

Si x^i son las coordenadas de P, representamos por dx el vector de componentes dx^i. Introduzcamos las notaciones

$$\omega^i = dx \, . \, e_i, \qquad \omega_i^k = de_i \, . \, e_k \tag{1.1}$$

donde los puntos indican productos escalares de vectores. Con estas notaciones el método del « triedro móvil » de E. Cartan da inmediatamente que el volumen invariante en el espacio del grupo de los movimientos de E_n está dado, salvo un factor constante, por la forma diferencial exterior

$$dK_n = \left[\prod_{i=1}^{n} \omega_i \prod_{i<k} \omega_i^k\right] \tag{1.2}$$

expresión que con el nombre de ***medida cinemática*** en E_n fué hallada también directamente pos Blaschke [1]. En todo lo que sigue representaremos con paréntesis cuadrados [ ] la ***multiplicación exterior*** de formas diferenciales. Además, ***todas ellas serán consideradas en valor absoluto.***

Se puede dar a dK_n una interpretación geométrica muy intuitiva. Observemos, en efecto, que las ω^i son las componentes según las direcciones ortogonales e_i de un desplazamiento de P y por tanto el producto $[\omega^1 \omega^2 \ldots \omega^n]$ no es otra cosa que el elemento de volumen del espacio E_n. Lo indicaremos por dP y será por tanto

$$dP = [\omega^1 \omega^2 \ldots \omega^n]. \tag{1.3}$$

Consideremos ahora la superficie esférica S_{n-1} de dimensión $n-1$, radio unidad y centro P: sobre ella se encuentran los extremos de los vectores e_i. El producto escalar $\omega_1^k = de_1 \, . \, e_k$ representa un desplazamiento elemental sobre S_{n-1} del extremo de e_1 según la dirección de e_k. Por tanto el producto exterior $[\omega_1^2 \omega_1^3 \ldots \omega_1^n]$ es igual al elemento de área sobre dicha esfera; representándolo por dO_{n-1} será por tanto

$$dO_{n-1} = [\omega_1^2 \omega_1^3 \ldots \omega_1^n]. \tag{1.4}$$

(1) W. Blaschke, *Integralgeometrie*, Actualités Hermann, n° 252, París, 1935.

Análogamente, si S_{n-2} es la esfera máxima $(n-2)$-dimensional de S_{n-1}, normal a e_1 y dO_{n-2} representa el elemento de área sobre la misma correspondiente al extremo de e_2, es

$$dO_{n-2} = [\omega_2^{\,3}\,\omega_2^{\,4}\,\ldots\,\omega_2^{\,n}]. \tag{1.5}$$

Prosiguiendo sucesivamente y sustituyendo en (1.2) se tiene por tanto

$$dK_n = [dP\,dO_{n-1}\,dO_{n-2}\,\ldots\,dO_1]. \tag{1.6}$$

que es una forma muy intuitiva de la densidad cinemática en E_n o, lo que es lo mismo, del elemento de volumen invariante del espacio del grupo de los movimientos de E_n.

Recordemos, para más adelante, que el área de la esfera i-dimensional de radio unidad vale

$$O_i = \int_{S_i} dO_i = \frac{2\pi^{(i+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)} \tag{1.7}$$

2. *Unas fórmulas auxiliares.* Para obtener las fórmulas integrales del número siguiente necesitamos ciertas fórmulas referentes a la geometría esférica n-dimensional que vamos a obtener aparte para no interrumpir más adelante el razonamiento.

Consideremos un punto fijo P de E_n y la $(n-1)$-esfera de centro P y radio unidad S_{n-1}. A cada vector de módulo unidad y origen P corresponde un punto sobre S_{n-1} y recíprocamente: representaremos por la misma letra el vector y el punto que es su extremo. Sea ξ un punto de S_{n-1} y consideremos n vectores unitarios e_i de origen P y ortogonales entre sí.

Sea φ_1 el ángulo entre ξ y e_1. El elemento de área dO_{n-1} de S_{n-1} correspondiente al punto ξ se escribe inmediatamente considerando la sección de S_{n-1} por un hiperplano normal a e_1 y que pase por ξ; la sección es una $(n-2)$-esfera de radio sen φ_1 y por tanto, llamando dO_{n-2} el elemento de área de una $(n-2)$-esfera de radio unidad, será

$$dO_{n-1} = \operatorname{sen}^{n-2}\varphi_1 dO_{n-2} d\varphi_1. \tag{2.1}$$

Proyectemos ξ desde e_1 sobre la esfera máxima S_{n-2} normal a e_1; sea ξ_1 el punto proyección. Si φ_2 es el ángulo de ξ_1 con e_2 y dO_{n-2} el elemento de área sobre S_{n-2}, análogamente a (2.1) vale

$$dO_{n-2} = \operatorname{sen}^{n-3}\varphi_2 dO_{n-3} d\varphi_2. \tag{2.2}$$

Análogamente, proyectemos ξ_1 desde e_2 sobre la S_{n-3} ortogonal a e_1 y e_2; sea ξ_2 el punto proyección. Si φ_3 es el ángulo entre ξ_2 y e_3 y dO_{n-3} el elemento de área sobre S_{n-3}, vale

$$dO_{n-3} = \operatorname{sen}^{n-4}\varphi_3\, dO_{n-4}\, d\varphi_3. \tag{2.3}$$

Prosiguiendo sucesivamente y sustituyendo luego cada igualdad en la precedente se obtiene, en general:

$$dO_{n-1} = \operatorname{sen}^{n-2}\varphi_1 \operatorname{sen}^{n-3}\varphi_2 \ldots \operatorname{sen}^{q-1}\varphi_{n-q}\, dO_{q-1}\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_{n-q} \tag{2.4}$$

que para $q = 1$ nos da la expresión bien conocida del elemento de área de la esfera $(n-1)$ dimensional.

Sea ahora η otro punto fijo sobre S_{n-1} y sea θ el ángulo entre η y ξ. Supongamos que η es ortogonal a la $(n-q)$-esfera determinada por $e_1, e_2, \ldots, e_{n-q+1}$. Si θ_1 es el ángulo entre ξ_1 y η, en el triángulo rectilátero de vértices η, ξ, e_1 (en el cual el lado ηe_1 vale $\pi/2$) se tiene

$$\cos\theta = \operatorname{sen}\varphi_1 \cos\theta_1. \tag{2.5}$$

Análogamente, sobre la S_{n-2} ortogonal a e_1, vale

$$\cos\theta_1 = \operatorname{sen}\varphi_2 \cos\theta_2 \tag{2.6}$$

siendo ahora θ_2 el ángulo entre η y ξ_2 (proyección de ξ_1 desde e_2 sobre la S_{n-2} ortogonal al círculo máximo e_1, e_2). Prosiguiendo sucesivamente y sustituyendo cada igualdad en la anterior obtenemos

$$\cos\theta = \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2 \ldots \operatorname{sen}\varphi_{n-q}. \tag{2.7}$$

Las fórmulas (2.4) y (2.7) son las que necesitaremos en el número siguiente.

3. *Una fórmula entre diferenciales.* En todo lo que sigue diremos que una variedad q-dimensional de E_n es *regular* y de dimensión q cuando está representada por ecuaciones paramétricas

$$x^i = x^i(u^1, u^2, \ldots, u^q) \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

en las que las funciones $x^i(u^1, u^2, \ldots, u^q)$ *poseen derivadas parciales de primer orden continuas.*

Sea C_q^0 una variedad q-dimensional regular de E_n. Siendo regular, se sabe que posee un área q-dimensional cuyo elemento diferencial representaremos por $d\sigma_q^0$; supongamos que C_q^0 tiene área total finita A_q^0. Consideremos un punto P de C_q^0 y q vectores de módulo unidad $e_1, e_2, \ldots, e_q$ ortogonales entre sí, de origen P y tangentes a C_q^0. Por analogía con (1.6) usaremos la notación

$$dC_q^0 = |d\sigma_q^0 \, dO_{q-1} \, dO_{q-2} \ldots . \, dO_1] \qquad (3.1)$$

donde los dO_i tienen el mismo significado que en (1.6) respecto al q-edro $e_1, e_2, \ldots, e_q$.

Sea, por otra parte, C^1_{n-1} una hipersuperficie regular de E_n que supondremos también de área finita A^1_{n-1}. Siendo $d\sigma^1_{n-1}$ su elemento de área en un punto P y e_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ vectores unitarios de origen P tangentes a C^1_{n-1} y ortogonales entre sí, usaremos también la notación

$$dC^1_{n-1} = [d\sigma^1_{n-1} \, dO_{n-2} \, dO_{n-3} \ldots . \, dO_1] \qquad (3.2)$$

Supongamos que C_q^0 está fija y que, en cambio, C^1_{n-1} se mueve de manera indeformable en E_n. Consideremos una posición de C^1_{n-1} en que tenga punto común con C_q^0; sea C^{01}_{q-1} la variedad intersección y P un punto de la misma. La variedad C^{01}_{q-1} es regular, puesto que en cada punto tiene por variedad plana tangente la intersección de las variedades planas tangentes a C_q^0 y C^1_{n-1}.

Sea η el vector unidad tangente a C_q^0 y normal a C^{01}_{q-1} en el punto P y ξ el vector unidad normal a C^1_{n-1} en P. Si $d\sigma_{n-1}$ es el elemento de área de C^1_{n-1}, $d\sigma_q^0$ el elemento de área de C_q^0 y $d\sigma^{01}_{q-1}$ el de la intersección C^{01}_{q-1}, todos en el punto P, llamando dh a un desplazamiento elemental según el vector η y siendo θ el ángulo entre η y ξ se tiene

$$dP = \cos\theta \, [d\sigma^1_{n-1} \, dh], \qquad d\sigma_q^0 = [d\sigma^{01}_{q-1} \, dh] \qquad (3.3)$$

donde dP es el elemento de volumen de E_n en el punto P.

Tomemos el n-edro de los vectores e_i de origen P que sirve para determinar el movimiento de C^1_{n-1} de manera que η sea ortogonal a $e_1, e_2, \ldots, e_{n-q+1}$ y $e_{n-q+2}, \ldots, e_n$ estén en el plano $(q-1)$-dimensional tangente a C^{01}_{q-1} en P. Según (1.6), (3.3), (3.2), (2.4), (2.7) y (3.1), teniendo en cuenta que sólo consideramos valores absolutos y que por tanto podemos alterar el orden de los factores, resulta

$$dK_n = [dP\, dO_{n-1}\, dO_{n-2} \ldots\ldots dO_1] = \cos\theta\, [dh\, d\sigma^1{}_{n-1}\, dO_{n-1} \ldots\ldots dO_1] =$$
$$= \cos\theta\, [dh\, dO_{n-1}\, dC^1{}_{n-1}] = \cos\theta\, \mathrm{sen}^{n-2}\varphi_1\, \mathrm{sen}^{n-3}\varphi_2 .$$
$$\ldots\ldots \mathrm{sen}^{q-1}\varphi_{n-q}\, [dh\, dO_{q-1}\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots\ldots d\varphi_{n-q}\, dC^1{}_{n-1}] =$$
$$= \mathrm{sen}^{n-1}\varphi_1\, \mathrm{sen}^{n-2}\varphi_2 \ldots\ldots \mathrm{sen}^{q}\varphi_{n-q}\, [dh\, dO_{q-1}\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots\ldots$$
$$d\varphi_{n-q}\, dC^1{}_{n-1}], \tag{3.4}$$

y también

$$dC_q{}^0 = [d\sigma_q{}^0\, dO_{q-1} \ldots\ldots dO_1] = [dh\, d\sigma^{01}{}_{q-1}\, dO_{q-1} \ldots\ldots dO_1] =$$
$$= [dh\, dO_{q-1}\, dC^{01}{}_{q-1}]. \tag{3.5}$$

Por tanto, multiplicando exteriormente ambos miembros de (3.4) por $dC^{01}{}_{q-1} = [d\sigma^{01}{}_{q-1}\, dO_{q-2} \ldots\ldots dO_1]$, tenemos el resultado

$$[dC^{01}{}_{q-1}\, dK_n] = \mathrm{sen}^{n-1}\varphi_1\, \mathrm{sen}^{n-2}\varphi_2 \ldots\ldots$$
$$\mathrm{sen}^{q}\varphi_{n-q}\, [d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots\ldots d\varphi_{n-q}\, dC_q{}^0\, dC^1{}_{n-1}]. \tag{3.6}$$

Esta es una fórmula fundamental que generaliza la obtenida por Blaschke para $n=3$, $q=2$ [2] y Chern-Yien [3] para $q=n-1$. Observemos que en ella los ángulos $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-q}$ son las coordenadas esféricas del vector ξ en la $(n-q)$-esfera unidad situada en el plano $(n-q+1)$ dimensional ortogonal a $C^{01}{}_{q-1}$ en P.

4. *Primera fórmula integral.* Integremos los dos miembros de (3.6) a todas las posiciones de $C^1{}_{n-1}$, o sea a todo el espacio del grupo de los movimientos de E_n. Llamando $A^{01}{}_{q-1}$ al área $(q-1)$-dimensional de la interseccion $C_q{}^0 . C^1{}_{n-1}$, el primer miembro da

$$O_{q-2}\, O_{q-3} \ldots\ldots O_1 \int A^{01}{}_{q-1}\, dK_n. \tag{4.1}$$

En el segundo miembro, para tener en cuenta todas las posiciones de $C^1{}_{n-1}$, el vector ξ debe integrarse a toda la $(n-q)$-esfera unidad mencionada al final del párrafo precedente, o sea los ángulos $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-q-1}$ deben integrarse entre 0 y π y el φ_{n-q} entre 0 y 2π.

[2] W. Blaschke, *Integralgeometrie 17. Ueber Kinematik.* Deltion, vol. 17, Atenas, 1936.

[3] S. S. Chern-C. T. Yien, *Sulla formula principale cinematica dello spazio ad n dimensioni,* Bolletino della Unione Matematica Italiana, serie II, año II, 1940.

Las integrales de dC_q^0 y dC'_{n-1} dan respectivamente, según (3.1) y (3.2), $A_q^0 O_{q-1} \ldots O_1$ y $A^1_{n-1} O_{n-2} \ldots O_1$ siendo A_q^0 y A^1_{n-1} las áreas de C_q^0 y C^1_{n-1}. De esta manera cada posición de C^1_{n-1} ha quedado contada dos veces, pues cambiando la orientación del n edro $e_1, e_2, \ldots, e_n$ se obtiene la misma posición, luego hay que dividir por 2. Teniendo en cuenta el valor

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^i \varphi \, d\varphi = \pi^{1/2} \frac{\Gamma\left(\dfrac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{i+2}{2}\right)}$$

resulta que la integral del segundo miembro de (3.6) vale

$$\pi^{(n-q)/2} \frac{\Gamma\left(\dfrac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)} O_{n-2} \ldots O_1 O_{q-1} \ldots O_1 A_q^0 A^1_{n-1}. \qquad (4.2)$$

Igualando con (4.1) y simplificando resulta la fórmula integral

$$\int A^{01}_{q-1} \, dK_n = \pi^{(n-q)/2} \frac{\Gamma\left(\dfrac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1+n}{2}\right)} O_{n-2} \ldots O_1 O_{q-1} A_q^0 A^1_{n-1} \qquad (4.3)$$

donde en el primer miembro la integración está extendida a todo el grupo de los movimientos de E_n, o sea, a todas las posiciones de C^1_{n-1}. Los valores de O_i están dados por (1.7).

Ejemplos: 1. Para $q=1$, C_1^0 es una curva y A_1^0 es su longitud que llamaremos L_0. La intersección con una hipersuperficie C^1_{n-1} se compone de N puntos, número (que puede ser infinito) variable con la posición C^1_{n-1}. La fórmula (4.3) se escribe, en este caso

$$\int N \, dK_n = \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)} O_{n-2} \ldots O_1 L_0 A^1_{n-1}.$$

2. Consideremos el espacio ordinario E_3 y en él una superficie fija C_2^0 de área A_2^0 y otra móvil C_2^1 de área A_2^1. Llamando L a la longitud de la curva intersección $C_2^0 . C_2^1$, la fórmula (4.3) da

$$\int L \, dK_3 = 2\pi^3 A_2^0 A_2^1.$$

Observación. La fórmula (4.3) es un caso particular de la más general siguiente, cuya demostración no damos por no ser necesaria para nuestro objeto. Sea $C_q{}^0$ una variedad regular de dimensión q, que supondremos fija en E_n y de área q-dimensional finita $A_q{}^0$. Sea análogamente $C_p{}^1$ otra variedad regular de dimension p, móvil de manera indeformable en E_n y de p-dimensional área finita $A_p{}^1$; supongamos $p + q \geq n$. Llamando A_{p+q-n} al área $(p+q-n)$-dimensional de la intersección $C_p{}^1 . C_q{}^0$ vale

$$\int A_{p+q-n} dK_n = \frac{O_1 . \ldots . O_n O_{p+q-n} A_q{}^0 A_p{}^1}{O_p O_q} \tag{4.4}$$

siendo dK_n la densidad cinemática (1.6) y estando la integración del primer miembro extendida a todo el grupo de los movimientos de E_n. La (4.3) corresponde al caso $p = n - 1$.

5. *Segunda fórmula integral.* Consideremos ahora la misma variedad regular $C_q{}^0$ fija en E_n del número anterior y h variedades $C^i{}_{n-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$ de áreas $A^i{}_{n-1}$, móviles cada una con la densidad cinemática $dK^i{}_n$ de manera independiente de las demás. Es decir, a cada una se le asigna un n-edro invariablemente unido a la misma y respecto de él se calculan las expresiones análogas a la (1.6).

Supongamos $q \geq h$. En una posición general en que las $h+1$ variedades $C_q{}^0$, $C^i{}_{n-1}$ tengan punto común, la intersección será de dimensión $q-h$. Sea A_{q-h} el área $(q-h)$-dimensional de esta intersección $C_q{}^0 . C^1{}_{n-1} . C^2{}_{n-1} . \ldots . C^h{}_{n-1}$. Deseamos calcular la integral

$$I = \int A_{q-h} dK^1{}_n . \ldots . dK^h{}_n \tag{5.1}$$

extendida, respecto cada $dK^i{}_n$, a todas las posiciones de la correspondiente $C^i{}_{n-1}$.

Para simplificar escribiremos (4.3) en la forma

$$\int A^{01}{}_{q-1} dK_n = \alpha(n, q-1) A^0{}_q A^1{}_{n-1} \tag{5.2}$$

con

$$\alpha(n, q-1) = \pi^{(n-q)/2} \frac{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} O_{n-2} . \ldots . O_1 O_{q-1}. \tag{5.3}$$

Entonces, llamando en general A_{q-h+i} al área de la intersección $C_q^0 . C^1_{n-1} . C^2_{n-1} . \ldots . C_{n-1}^{h-i}$, fijando primero $C^1_{n-1}, \ldots, C_{n-1}^{h-1}$ e integrando a todas las posiciones de C^h_{n-1}, según (5.2) se tiene sucesivamente

$$
\begin{aligned}
I &= \alpha(n, q-h)\, A^h_{n-1} \int A_{q-h+1}\, dK^1_n . \ldots . dK_n^{h-1} \qquad (5.4)\\
&= \alpha(n, q-h)\, \alpha(n, q-h+1)\, A^h_{n-1}\, A_{n-1}^{h-1} \int A_{q-h+2}\, dK^1_n . \ldots . dK_n^{h-2}\\
&= \ldots\ldots\\
&= \prod_{i=0}^{h-1} \alpha(n, q-h+i)\, A_q^0\, A^1_{n-1}\, A^2_{n-1} . \ldots . A^h_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Llegamos así a la segunda fórmula integral que deseábamos obtener:

$$
\int A_{q-h}\, dK_n^1 . \ldots . dK_n^h = \prod_{i=0}^{h-1} \alpha(n, q-h+i)\, A_q^0\, A^1_{n-1} . \ldots . A^h_{n-1}. \qquad (5.5)
$$

donde, repetimos, A_{q-h} es el área $(q-h)$-dimensional de la intersección $C_q^0 . C^1_{n-1} . \ldots . C^h_{n-1}$ y la integración está extendida a todas las posiciones de las hipersuperficies C^i_{n-1}.

Supongamos en particular que las C^i_{n-1} sean esferas de radios R_i. Entonces es

$$
A^i_{n-1} = R_i^{n-1}\, O_{n-1}. \qquad (5.6)
$$

Además, en este caso, según (1.6), tomando como origen P_i del n-edro ligado a C^i_{n-1} el centro de la esfera, en cada posición se pueden integrar los dO_j sin que altere la intersección A_{q-h}, o sea

$$
\int A_{q-h}\, dK_n^1\, dK_n^2 . \ldots . dK_n^h = (O_{n-1} O_{n-2} . \ldots . O_1)^h \qquad (5.7)
$$
$$
\int A_{q-h}\, dP_1\, dP_2 . \ldots . dP_h
$$

siendo dP_i el elemento de volumen de E_n correspondiente al centro P_i de C^i_{n-1}. Por otra parte es

$$
\prod_{i=0}^{h-1} \alpha(n, q-h+i) = \left(\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \right)^h \frac{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q-h+1}{2}\right)} (O_{n-2} . \ldots . O_1)^h
$$

y por tanto queda

$$\int A_{q-h}\, dP_1\, dP_2 \ldots dP_h = \beta(n, q, h)\, A_q^0\, R_1^{n-1} R_2^{n-1} \ldots R_h^{n-1} \qquad (5.8)$$

donde la integración respecto $dP_i = [dx_i^1\, dx_i^2 \ldots dx_i^n]$ está extendida a todo el espacio E_n y se ha puesto

$$\beta(n, q, h) = \left(\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \right)^h \frac{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q-h+1}{2}\right)}. \qquad (5.9)$$

En particular, tomando todas las esferas del mismo radio R, queda

$$\int A_{q-h}\, dP_1 \ldots dP_h = \beta(n, q, h)\, R^{h(n-1)}\, A_q^0. \qquad (5.10)$$

Por ejemplo, para el espacio ordinario E_3, tomando una superficie C_2^0 de área A_2^0 y dos esferas móviles de radio R, llamando N al número de puntos comunes a C_2^0 y a las dos esferas, número variable con la posición de las mismas, es $n=3$, $q=2$, $h=2$ y por tanto queda

$$\int N\, dP_1\, dP_2 = 2\pi^3 R^4 A_q^0. \qquad (5.11)$$

6. ***Una expresión del área*** q-***dimensional para variedades regulares.*** Nos interesa particularmente aplicar (5.10) al caso $q-h=0$. En este caso la intersección se compone de un número discreto de puntos N_q, salvo para posiciones excepcionales de las esferas C^i_{n-1}. La fórmula (5.10) se escribe en este caso

$$\int N_q\, dP_1 \ldots dP_q = \beta(n, q, q)\, R^{q(n-1)}\, A_q^0. \qquad (6.1)$$

Hemos demostrado esta fórmula en el caso de ser C_q^0 una variedad regular. Desde luego, por el carácter aditivo de la integral del primer miembro y del área A_q^0, la fórmula vale igualmente para cualquier variedad compuesta de un número finito de partes regulares de dimensión q.

De (6.1) deducimos el resultado:

Sea en E_n ***una variedad*** C_q^0 ***compuesta de un número finito de partes regulares de dimensión*** q. ***Consideremos*** q (n – 1)-***esferas*** C^i_{n-1} ***de radio*** R ***y centro variable*** P_i. ***Sea*** dP_i ***el elemento de volumen de*** E_n ***correspondiente al punto*** P_i. ***Llamando*** N_q ***al número de puntos de la intersección***

$C_q^0 . C^1_{n-1} . \dots . C^q_{n-1}$ *el área* q-*dimensional de* C_q^0 *está dada por la fórmula*

$$A_q^0 = (\beta(n, q, q)\, R^{q(n-1)})^{-1} \int N_q \, dP_1 \, dP_2 \dots . dP_q \qquad (6.2)$$

donde la integral está extendida, para cada P_i, ***a todo el espacio*** E_n ***y*** $\beta(n, q, q)$ ***está dado por*** (5.9) [4].

Como consecuencia se tiene:

Si una variedad regular q-***dimensional de*** E_n ***tiene área*** q-***dimensional finita, el número de puntos de intersección de ella con*** q ***esferas de radio*** R, ***es siempre finito, salvo para un conjunto de posiciones de las esferas de medida nula.***

7. ***Una definición de dimensión y de*** q-***dimensional área de un conjunto de puntos de*** E_n. La última integral de (6.2) tiene sentido para conjuntos de puntos mucho más generales que los que componen una variedad regular; además ella es de cómodo manejo en muchos casos, pues se trata de una integral de volumen del espacio euclidiano de nq dimensiones. Podemos, por tanto, ***siempre que la integral del segundo miembro exista,*** tomar (6.2) como ***definición*** de q-dimensional área de un conjunto de puntos de E_n.

El método puede servir también para determinar la dimensión q. Procederemos de la manera siguiente:

Sea C un conjunto de puntos cualquiera de E_n. Sea $dP_i = [dx_i^1 dx_i^2 . \dots . dx_i^n]$ el elemento de volumen de E_n correspondiente al punto P_i. Sea N_s el número de puntos comunes de C con $s\,(n-1)$-esferas de radio R y centros $P_1, P_2, \dots, P_s$. Consideremos las integrales (en el sentido Lebesgue)

$$I_1 = \int N_1 dP_1, \quad I_2 = \int N_2 dP_1 dP_2, \quad I_3 = \int N_3 dP_1 dP_2 dP_3, \dots \qquad (7.1)$$

todas ellas extendidas a todo E_n respecto cada dP_i (es decir I_s es una integral sobre E_{sn}). ***Si estas integrales existen*** y I_{q+1} es la primera que vale cero, el número q se llamará la ***dimensión*** de C y la q-dimensional área estará dada por (6.2).

[4] El caso $q = 1$ en que la fórmula anterior da la longitud de la curva C^0_1 fué considerado, ya en otro lugar (L. A. SANTALÓ, *A theorem and an inequality referring to rectifiable curves*, American Journal of Mathematics, vol. 63, 1941).

Obsérvese que para $s<q$ el área s-dimensional así definida vale infinito y para $s>q$ vale cero.

Según lo demostrado en el número precedente esta definición de q-dimensional área coincide con la clásica para variedades regulares, pero la definición es aplicable siempre que las integrales (7.1) existan. Siguiendo un camino similar al de G. Nöbeling ([5]) para un caso análogo se puede demostrar *que estas integrales existen para todo conjunto* C *analítico* (o conjunto de Suslin ([6])).

En efecto, vamos a demostrar que en este caso I_s existe. Bastará demostrar que el conjunto de puntos de E_{sn} correspondientes a esferas C_{n-1} cuya intersección tiene por lo menos i puntos comunes con C es analítico y por tanto medible en el sentido de Lebesgue. Supondremos C acotado, lo que no restringe la generalidad. Siendo C analítico, el conjunto $C(i)$ de todos los conjuntos de i puntos de C es también analítico. Consideremos, por otra parte, todas las r-esferas S_r ($r \leq n-q$) de radio $\leq$ R y el conjunto $S_r(i)$ de conjuntos de i puntos sobre ellas que no estén en una esfera de dimensión menor; $S_r(i)$ es analítico, y por tanto también la intersección $S_r(i) . C(i)$. A cada punto de esta intersección corresponden en E_{sn} los puntos imágenes de los centros de los conjuntos de s esferas de radio R que contienen a S_r; este conjunto es analítico, luego lo será también el total de los correspondientes a toda la intersección $S_r(i) . C(i)$ que es precisamente el conjunto de puntos correspondientes a esferas C_{n-1} cuya intersección tiene por lo menos i puntos comunes con C.

Queda así demostrado el enunciado.

Facultad de Ciencias Físico-matemáticas.
La Plata.

([5]) G. Nöbeling, *Ueber den Flächeninhalt dehnungsbeschränkter Flächen*, Mathematische Zeitschrift, vol. 48, 1943, pág. 757.

([6]) Ver por ej.: N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques*, París, 1930.