SOBRE LAS ECUACIONES DEL CAMPO UNIFICADO DE EINSTEIN

POR L. A. SANTALÓ
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES

(Recibido el 10/III/1958)

SUMMARY. — In a 4-dimensional space with an asymmetric affine connection we consider the family of tensors T_{ih} [1.7] or [2.4], where $A, B, \ldots, F$ are constants. These tensors are obtained by contraction of the generalized curvature tensor which appears in the difference between second covariant derivatives [1.1] (8).

Then we consider the variational principle [3.2] and obtain the field equations [3.17], [4.4]. Theorem 4.1 gives the conditions in order that these field equations be the same of the « weak system » [6] of Einstein's unified field theory.

In the second part we do the same with the family of hermitian tensors Q_{ih} [5.2]. Theorem 7.1 gives the conditions for the field equations of the variational principle [6.1] to coincide again with the system [6].

Introducción. — En las últimas teorías del campo unificado de Einstein se parte de una variedad de 4 dimensiones (espacio-tiempo) sobre la cual están definidos un tensor fundamental g_{ih} y una conexión afín Γ^m_{ih}. Ninguno de estos dos elementos geométricos se supone simétrico, de manera que el número total de componentes es $16 + 64 = 80$.

Para escribir las ecuaciones del campo, o sea las ecuaciones que han de permitir calcular estas 80 componentes, conviene introducir el tensor contravariante g^{ih} definido por las relaciones $g_{hk}\, g^{ik} = \delta^i_h$ ($\delta^i_h = 0$ para $i \neq h$, $= 1$ para $i = h$), la densidad tensorial

$$G^{ih} = g^{ih}\sqrt{|g|} \qquad [1]$$

donde g es el determinante $||g_{ih}||$ que se supone distinto de cero y el tensor de Ricci

$$R_{ih} = \Gamma^m_{ih,m} - \Gamma^m_{im,h} + \Gamma^m_{lm}\Gamma^l_{ih} - \Gamma^m_{lh}\Gamma^l_{im}\,. \qquad [2]$$

Entonces las ecuaciones del campo se deducen del principio variacional

$$\delta \int R_{ik}\,\mathbf{G}^{ik}\,d\tau = 0, \qquad (d\tau = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4) \qquad [3]$$

donde la integral está extendida a un dominio cuadridimensional y se supone que Γ^m_{ik} y $\mathbf{G}^{ik}$ varían independientemente, siendo su variación nula en el contorno. El resultado toma forma simple introduciendo la nueva *conexión*

$$L^m_{ik} = \Gamma^m_{ik} + \frac{2}{3}\,\delta^m_i\,\Gamma_k \qquad [4]$$

donde se ha puesto, como de costumbre,

$$\Gamma_k = \Gamma^m_{[km]} = \frac{1}{2}\,(\Gamma^m_{km} - \Gamma^m_{mk}). \qquad [5]$$

Llamando W_{ik} al tensor de Ricci correspondiente a la nueva conexión [4], las ecuaciones del campo resultan

$$\begin{aligned} a)&\quad \mathbf{G}^{ik}_{+-;s} = 0 \;, \quad \mathbf{G}^{[ik]}{}_{,k} = 0 \\ b)&\quad W_{(ik)} = 0 \;, \quad W_{[ik],k} + W_{[kk],i} + W_{[ki],k} = 0. \end{aligned} \qquad [6]$$

Este sistema de ecuaciones, llamado « sistema débil », es el tomado por Einstein en la cuarta edición de su *Significado de la Relatividad* (5), y el más estudiado en desarrollos posteriores (ver, por ejemplo, Lichnerowicz (6) y Tonnelat (9), este último libro con abundante bibliografía). Las ecuaciones [6] no son independientes; lo mismo que en Relatividad General, existen entre ellas 4 identidades (identidades de onservación en física o identidades de Bianchi en geometría) que justifican los posibles cambios de coordenadas. En cuanto a la notación, el punto y coma indica derivación covariante respecto a la conexión L^m_{ik}, con los signos + o — según se tome L^m_{ik} o la conexión transpuesta $\tilde{L}^m_{ik} = L^m_{ki}$; es decir,

$$\mathbf{G}^{ik}_{+-;s} = \mathbf{G}^{ik}{}_{,s} + L^i_{ms}\,\mathbf{G}^{mk} + L^k_{sm}\,\mathbf{G}^{im} - \mathbf{G}^{ik}\,L^m_{(sm)}\,. \qquad [7]$$

La coma indicará siempre derivación parcial ordinaria, y, como es costumbre, los paréntesis redondos en los índices indican « parte simétrica », y los paréntesis cuadrados, « parte antisimétrica ».

Tonnelat ([9], apéndice II) ha estudiado las ecuaciones del campo que resultan al sustituir en el principio variacional [3] el tensor de Ricci R_{ik} por otros tensores. En los tres casos que considera, si se impone a la variación como condición *a priori* la segunda ecuación [6, *a*] resulta el mismo sistema [6]. Winogradsky [10] y Einstein [2], [3] observan que se llega también a las mismas ecuaciones sustituyendo R_{ik} por el tensor que resulta al sustituir la conexión Γ^m_{ik} por $\Gamma^m_{ik} + \delta^m_i \lambda_k$ o bien por $\Gamma^m_{ik} + \delta^m_k \lambda_i$ siendo λ_i un vector arbitrario (λ — transformaciones). También Mishra [7] considera otros tensores que conducen al mismo sistema [6].

El objeto de este trabajo es ver a qué ecuaciones se llega a partir del mismo principio variacional [3] cuando R_{ik} se sustituye por otros tensores más generales que hemos obtenido en otro trabajo anterior [8]. Son los tensores T_{ik} dados por [1.7] o [2.4], donde $A, B, C, \ldots, F$ son constantes. Consideramos también, en la segunda parte, la familia de tensores Q_{ik} dados por [5.2] o [5.3] obtenidos como « parte hermitiana » de los tensores T_{ik} (según la definición de Einstein [1]). En ambos casos obtenemos las ecuaciones del campo, que resultan ser las [3.17] y [4.4] en el primer caso y las [6.6] y [7.2] en el segundo. Deducimos entonces las condiciones que deben cumplir las constantes $A, B, \ldots, F$ para que estas ecuaciones se reduzcan a las del sistema de Einstein [6]. Estas condiciones están expresadas en los Teoremas 4.1 y 7.1.

De esta manera, entre la gran variedad de tensores de segundo orden que se pueden formar con la conexión Γ^m_{ik} y que podrían servir de base para el principio variacional [3] se tiene un criterio muchas veces aplicable, para saber si el resultado será o no el mismo [6]. Ejemplos simples de tensores que dan lugar a ecuaciones del campo diferentes de las [6] son los [4.19]. A partir de los teoremas mencionados es también fácil construir tensores que tomados como base del principio variacional [3] den lugar al mismo primer grupo *a*) de ecuaciones [6], pero sean distintas las ecuaciones del segundo grupo *b*). Tal vez entre ellos haya que buscar los que permitan mejorar los resultados hasta ahora obtenidos con este tipo de teorías del campo unificado.

I. — Principio variacional con tensores analogos al de Ricci

1. Tensores análogos al de Ricci en un espacio de conexión afín no simétrica. — Supongamos por un momento que disponemos de 6 conexiones ${}^1\Gamma$, ${}^2\Gamma$, $\ldots$, ${}^6\Gamma$. Dado un vector covariante cualquiera U_i e indicando con un número debajo de cada índice la conexión respecto la cual se ha realizado la derivación covariante, se obtiene fácilmente

$$\begin{aligned} U_{\underset{\substack{1\\2}}{i};\underset{3}{j}h} - U_{\underset{\substack{4\\5}}{i};\underset{6}{h}j} = {} & U_s\,({}^4\Gamma^s_{ih,j} - {}^1\Gamma^s_{ij,h} + {}^1\Gamma^s_{lj}\,{}^2\Gamma^l_{ih} - {}^4\Gamma^s_{lh}\,{}^5\Gamma^l_{ij} + \\ & + {}^1\Gamma^s_{il}\,{}^3\Gamma^l_{jh} - {}^4\Gamma^s_{il}\,{}^6\Gamma^l_{hj}) + U_{i,l}\,({}^6\Gamma^l_{hj} - {}^3\Gamma^l_{jh}) + \\ & + U_{l,j}\,({}^4\Gamma^l_{ih} - {}^2\Gamma^l_{ih}) + U_{l,h}\,({}^5\Gamma^l_{ij} - {}^1\Gamma^l_{ij}) \end{aligned} \qquad [1.1]$$

Para más detalles, ver ([8]). De aquí

Teorema 1.1. — *Dadas 6 conexiones ${}^1\Gamma$, ${}^2\Gamma$, $\ldots$, ${}^6\Gamma$, para que la diferencia de derivadas segundas* [1.1] *sea siempre nula, cualquiera que sea el vector U_i, se deben cumplir las condiciones*

$${}^1\Gamma = {}^5\Gamma,\quad {}^2\Gamma = {}^4\Gamma,\quad {}^3\Gamma = {}^6\overline{\Gamma} \qquad [1.2]$$

y además ser nulo el tensor

$$\begin{aligned} R^s_{ihj}\,(1,2,3) = {} & {}^2\Gamma^s_{ih,j} - {}^1\Gamma^s_{ij,h} + {}^1\Gamma^s_{lj}\,{}^2\Gamma^l_{ih} - {}^2\Gamma^s_{lh}\,{}^1\Gamma^l_{ij} + \\ & + {}^1\Gamma^s_{il}\,{}^3\Gamma^l_{jh} - {}^2\Gamma^s_{il}\,{}^3\Gamma^l_{jh}. \end{aligned} \qquad [1.3]$$

Aquí y en todo lo que sigue indicamos con una raya encima a la conexión transpuesta, o sea,

$$\overline{\Gamma}^l_{hj} = \Gamma^l_{jh}.$$

Si las 6 conexiones son iguales, el último tensor coincide con el ordinario tensor de curvatura y la tercera condición [1.2] nos dice que el tensor de torsión debe ser nulo, de acuerdo con el resultado clásico.

Por contracción de índices obtenemos el tensor, análogo al de Ricci,

$$\begin{aligned} T_{ih}\,(1,2,3) = R^s_{ihs}\,(1,2,3) = {} & {}^2\Gamma^s_{ih,s} - {}^1\Gamma^s_{is,h} + \\ & + {}^1\Gamma^s_{ls}\,{}^2\Gamma^l_{ih} - {}^2\Gamma^s_{lh}\,{}^1\Gamma^l_{is} + {}^1\Gamma^s_{il}\,{}^3\Gamma^l_{sh} - {}^2\Gamma^s_{il}\,{}^3\Gamma^l_{sh}. \end{aligned} \qquad [1.4]$$

Supongamos ahora un espacio de 4 dimensiones con la conexión afín no simétrica única Γ^m_{ih}. Dada una matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{pmatrix} \qquad [1.5]$$

cuyos elementos sean constantes, de ella podemos deducir tres conexiones

$$^{\alpha}\Gamma^s_{ih} = \Gamma^s_{(ih)} + \lambda_\alpha \Gamma^s_{[ih]} + \mu_\alpha \delta^s_i \Gamma_h + \nu_\alpha \delta^s_h \Gamma_i \quad (\alpha = 1, 2, 3) \qquad [1.6]$$

Sustituyendo estas conexiones en [1.4] resulta el tensor

$$T_{ih} = R_{ih}(\Gamma_{()}) + A\, \Gamma^m_{[ih];m}(\Gamma_{()}) + B\, \Gamma^m_{[lh]} \Gamma^l_{[im]} + C\, \Gamma_{i;h}(\Gamma_{()})$$
$$+ D\, \Gamma_{h;i}(\Gamma_{()}) + E\, \Gamma_l \Gamma^l_{[ih]} + F\, \Gamma_i \Gamma_h \qquad]1.7]$$

donde $R_{ih}(\Gamma_{()})$ indica el tensor de Ricci referente a la conexión simétrica $\Gamma^m_{(ih)}$ y las derivadas covariantes indicadas se refieren también a esta conexión, o sea,

$$R_{ih}(\Gamma_{()}) = \Gamma^s_{(ih),s} - \Gamma^s_{(is),h} + \Gamma^s_{(ls)} \Gamma^l_{(ih)} - \Gamma^s_{(lh)} \Gamma^l_{(is)}$$
$$\Gamma^m_{[ih];m}(\Gamma_{()}) = \Gamma^m_{[ih],m} + \Gamma^m_{(lm)} \Gamma^l_{[ih]} - \Gamma^l_{(im)} \Gamma^m_{[lh]} - \Gamma^l_{(hm)} \Gamma^m_{[il]}$$
$$\Gamma_{i;h}(\Gamma_{()}) = \Gamma_{i,h} - \Gamma_l \Gamma^l_{(ih)} \qquad [1.8]$$

Los valores de las constantes $A, B, \ldots, F$ son

$$\begin{aligned} A &= \lambda_2 \\ B &= \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2 \lambda_3 \\ C &= \nu_2 - \lambda_1 - \mu_1 - 4\, \nu_1 \\ D &= \mu_2 \\ E &= \lambda_1 (\lambda_2 - \nu_2 + \nu_3) + \lambda_2 (4\, \nu_1 - \nu_3) + \lambda_3 (\mu_1 - \mu_2) \\ F &= \lambda_1 (\mu_2 + \nu_2) + \lambda_2 (\nu_1 - \mu_3) + \lambda_3 (\nu_2 - \nu_1) \\ &\quad + \mu_1 (\mu_3 + \nu_3) - \mu_2 (\mu_3 + \nu_3) + 4\, \mu_3 (\nu_1 - \nu_2) \\ &\quad + \nu_1 (\nu_3 + 3\, \nu_2) - \nu_2 \nu_3 \end{aligned} \qquad [1.9]$$

2. **Casos particulares y ejemplos.** — *a*) Si todas las λ_α tienen el mismo valor λ y análogamente todas las μ_α son iguales a μ y

las ν_a iguales a ν, el tensor T_{ik} es el de Ricci correspondiente a la conexión

$$\Gamma^s_{(ik)} + \lambda\, \Gamma^s_{[ik]} + \mu\, \delta^s_i\, \Gamma_k + \nu\, \delta^s_k\, \Gamma_i. \qquad [2.1]$$

En este caso se tienen los valores

$$A = \lambda\ ,\ B = -\lambda^2\ ,\ C = -\lambda - \mu - 3\,\nu, \qquad [2.2]$$
$$D = \mu\ ,\ E = \lambda^2 + 3\,\nu\lambda\ ,\ F = 2\,\lambda\nu + 3\,\nu^2.$$

Por ejemplo, para $\lambda = 1$, $\mu = 0$, $\nu = 0$ se tiene expresado el tensor de Ricci [2] correspondiente a la conexión Γ^m_{ik} en la forma

$$R_{ik} = R_{ik}(\Gamma_{()}) + \Gamma^m_{[ik];m}(\Gamma_{()}) - \Gamma^m_{[lk]}\,\Gamma^l_{[im]} -$$
$$- \Gamma_{i;k}(\Gamma_{()}) + \Gamma_l\,\Gamma^l_{[ik]} \qquad [2.3]$$

Por lo tanto, según [1.7] es también

$$T_{ik} = R_{ik} + (A-1)\,\Gamma^m_{[ik];m}(\Gamma_{()}) + (B+1)\,\Gamma^m_{[lk]}\,\Gamma^l_{[im]}$$
$$+ (C+1)\,\Gamma_{i;k}(\Gamma_{()}) + D\,\Gamma_{k;i}(\Gamma_{()}) +$$
$$+ (E-1)\,\Gamma_l\,\Gamma^l_{[ik]} + F\,\Gamma_i\,\Gamma_k. \qquad [2.4]$$

Por ejemplo, si en el caso de la conexión [2.1] se supone $\lambda = 1$, $\mu = 2/3$, $\nu = 0$, es

$$A = 1\ ,\ B = -1\ ,\ C = -5/3\ ,\ D = 2/3\ ,\ E = 1\ ,\ F = 0$$

y por tanto T_{ik}, que en este caso coincide con el tensor W_{ik} mencionado en la introducción y que figura en las ecuaciones [6], según [2.4] vale

$$W_{ik} = R_{ik} + \frac{2}{3}\,(\Gamma_{k,i} - \Gamma_{i,k})$$

b) Entre las conexiones [1.6] interesan muchas veces las que cumplen la condición

$${}^a\Gamma_i = 0$$

En el espacio de 4 dimensiones en que suponemos estar, un cálculo fácil prueba que para ello es necesario y suficiente que sea

$$2\,\lambda_a - 3\,\mu_a + 3\,\nu_a = 0. \qquad [2.5]$$

c) Junto con el tensor [1.4] se podría pensar en considerar el segundo tensor contraído $R^{s}_{ish}\,(1, 2, 3)$. Para el caso que nos interesa de las conexiones [1.6] deducidas de la matriz [1.5] un cálculo directo prueba que el resultado cae dentro del tensor general [1.7], salvo el signo, con sólo considerar en vez de la matriz [1.5], la

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ -\lambda_3 & \nu_3 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

Es decir, vale la fórmula [ver ([8])]

$$R^{s}_{ihs} = (1, 2, 3) = -R^{s}_{ish}\,(2, 1, \overline{3}).$$

Queda finalmente el tercer tensor contraído

$$R^{s}_{sih}\,(1, 2, 3) = {}^{2}\Gamma^{s}_{si,\,h} - {}^{1}\Gamma^{s}_{sh,\,i} + ({}^{1}\Gamma^{s}_{sl} - {}^{2}\Gamma^{s}_{sl})\,{}^{3}\Gamma^{l}_{hi} \qquad [2.6]$$

que para el caso de las conexiones [1.6] queda

$$\begin{aligned} T^{*}_{ih} = \Gamma^{s}_{(is),\,h} - \Gamma^{s}_{(hs),\,i} + C_1\,\Gamma_{i;h}\,(\Gamma_{(\,)}) + D_1\,\Gamma_{h;i}\,(\Gamma_{(\,)}) + \\ + E_1\,\Gamma_l\,\Gamma^{l}_{[ih]} + F_1\,\Gamma_i\,\Gamma_h \end{aligned} \qquad [2.7]$$

con

$$\begin{aligned} C_1 &= -\lambda_2 + 4\,\mu_2 + \nu_2 \;, \quad D_1 = \lambda_1 - 4\,\mu_1 - \nu_1 \\ E_1 &= -(C_1 + D_1)\,\lambda_3 \quad\;, \quad F = -(C_1 + D_1)\,(\mu_3 + \nu_3) \end{aligned} \qquad [2.8]$$

Por ejemplo, para el caso del tensor de curvatura ordinario ($\lambda_\alpha = 1$, $\mu_\alpha = \nu_\alpha = 0$; $\alpha = 1, 2, 3$) resulta la fórmula conocida

$$R^{s}_{sih} = \Gamma^{s}_{si,\,h} - \Gamma^{s}_{sh,\,i}\,.$$

3. El principio variacional y primer grupo de ecuaciones del campo. — Supongamos que además de la conexión afín Γ^{m}_{ih} disponemos de una densidad tensorial contravariante $\mathbf{G}^{ih}$, no necesariamente simétrica. Con el tensor T_{ih} y esta densidad tensorial podemos formar la densidad escalar

$$\mathbf{H} = T_{ih}\,\mathbf{G}^{ih} \qquad [3.1]$$

y con ella como hamiltoniano estudiar el principio variacional

$$\delta \int \mathbf{H}\, d\tau = 0 \qquad (d\tau = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4) \qquad [3.2]$$

con las condiciones: *a*) Las componentes $\Gamma^m_{(ih)}$, $\Gamma^m_{[ih]}$, $\mathbf{G}^{ih}$ se supone que varían independientemente unas de otras; *b*) Las variaciones de estas componentes se suponen nulas en el contorno del dominio de integración.

El método que vamos a seguir es el clásico de Euler. La ecuación [3.2] equivale a

$$\int \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \Gamma^r_{(qs)}} \delta \Gamma^r_{(qs)} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \Gamma^r_{(qs),t}} \delta \Gamma^r_{(qs),t} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \Gamma^r_{[qs]}} \delta \Gamma^r_{[qs]} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \Gamma^r_{[qs],t}} \delta \Gamma^r_{[qs],t} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{G}^{qs}} \delta \mathbf{G}^{qs} \right) d\tau = 0. \qquad [3.3]$$

Integrando por partes el segundo y cuarto sumando y siendo, por hipótesis, nulas las variaciones de la conexión en el contorno, resulta que [3.3] equivale a

$$\int (M^{qs}_r \, \delta \Gamma^r_{(qs)} + N^{qs}_r \, \delta \Gamma^r_{[qs]} + I_{qs} \, \delta \mathbf{G}^{qs})\, d\tau = 0 \qquad [3.4]$$

con

$$\begin{aligned} M^{qs}_r &= \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \Gamma^r_{(qs)}} - \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \Gamma^r_{(qs),t}} \right)_{,t} \\ N^{qs}_r &= \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \Gamma^r_{[qs]}} - \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \Gamma^r_{[qs],t}} \right)_{,t} \\ I_{qs} &= \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{G}^{qs}}. \end{aligned} \qquad [3.5]$$

Al sumar respecto los índices q, s, dada la simetría de $\delta \Gamma^r_{(qs)}$ en el primer sumando de [3.4] la parte antisimétrica de M^{qs}_r desaparece, quedando únicamente la parte simétrica $M^{(qs)}_r$. Analogamente en el segundo sumando sólo interviene la parte antisimétrica $N^{[qs]}_r$. Por consiguiente las ecuaciones del campo deducidas del principio variacional [3.2] serán

$$M^{(qs)}_r = 0 \;, \; N^{[qs]}_r = 0 \;, \; I_{qs} = 0 \qquad [3.6]$$

que poniendo

$$M_r^{(qs)} + N_r^{[qs]} = K_r^{qs} \qquad [3.7]$$

equivalen al sistema

$$K_r^{qs} = 0 \quad , \quad I_{qs} = 0 . \qquad [3.8]$$

Tenemos que calcular ahora las expresiones [3.5] para llegar a la forma explícita de las ecuaciones del campo.

Dada la expresión [1.7] del tensor T_{ih} y los desarrollos [1.8], se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{ih}}{\partial \Gamma^r_{(qs)}} &= \delta^l_r\, \delta^q_i\, \delta^s_h\, \Gamma^m_{(lm)} + \delta^q_l\, \delta^m_r\, \delta^s_m\, \Gamma^l_{(ih)} - \delta^l_r\, \delta^q_i\, \delta^s_m\, \Gamma^m_{(lh)} \\
&\quad - \delta^m_r\, \delta^q_l\, \delta^s_h\, \Gamma^l_{(im)} + A\, (\delta^m_r\, \delta^q_l\, \delta^s_m\, \Gamma^l_{[ih]} - \delta^l_r\, \delta^q_i\, \delta^s_m\, \Gamma^m_{[lh]} \\
&\quad - \delta^l_r\, \delta^q_h\, \delta^s_m\, \Gamma^m_{[il]}) - C\, \delta^l_r\, \delta^q_i\, \delta^s_h\, \Gamma_l - D\, \delta^l_r\, \delta^q_h\, \delta^s_i\, \Gamma_l , \\
\frac{\partial T_{ih}}{\partial \Gamma^r_{(qs),t}} &= \delta^m_r\, \delta^q_i\, \delta^s_h\, \delta^t_m - \delta^m_r\, \delta^q_i\, \delta^s_m\, \delta^t_h , \\
\frac{\partial T_{ih}}{\partial \Gamma^r_{[qs]}} &= A\, (\delta^l_r\, \delta^q_i\, \delta^s_h\, \Gamma^m_{(lm)} - \delta^m_r\, \delta^q_l\, \delta^s_h\, \Gamma^l_{(im)} - \delta^m_r\, \delta^q_i\, \delta^s_l\, \Gamma^l_{(hm)}) \\
&\quad + B\, (\delta^l_r\, \delta^q_i\, \delta^s_m\, \Gamma^m_{[lh]} + \delta^m_r\, \delta^q_l\, \delta^s_h\, \Gamma^l_{[im]}) \\
&\quad - (C + D)\, \delta^m_r\, \delta^q_l\, \delta^s_m\, \Gamma^l_{(ih)} \\
&\quad + E\, (\delta^l_r\, \delta^q_i\, \delta^s_h\, \Gamma_l + \delta^m_r\, \delta^q_l\, \delta^s_m\, \Gamma^l_{[ih]}) \\
&\quad + F\, (\delta^m_r\, \delta^q_h\, \delta^s_m\, \Gamma_i + \delta^m_r\, \delta^q_i\, \delta^s_m\, \Gamma_h), \\
\frac{\partial T_{ih}}{\partial \Gamma^r_{[qs],t}} &= A\, \delta^m_r\, \delta^q_i\, \delta^s_h\, \delta^t_m + C\, \delta^m_r\, \delta^q_i\, \delta^s_m\, \delta^t_h + D\, \delta^m_r\, \delta^q_h\, \delta^s_m\, \delta^t_i ,
\end{aligned} \qquad [3.9]$$

Por lo tanto, según [3.1] y [3.5] será

$$\begin{aligned}
M^{qs}_r &= \mathbf{G}^{qs}\, \Gamma^m_{(rm)} + \mathbf{G}^{ih}\, \Gamma^q_{(ih)}\, \delta^s_r - \mathbf{G}^{qh}\, \Gamma^s_{(rh)} - \mathbf{G}^{is}\, \Gamma^q_{(ir)} \\
&\quad + A\, (\mathbf{G}^{ih}\, \Gamma^q_{[ih]}\, \delta^s_r - \mathbf{G}^{qh}\, \Gamma^s_{[rh]} - \mathbf{G}^{iq}\, \Gamma^s_{[ir]}) \\
&\quad - C\, \mathbf{G}^{qs}\, \Gamma_r - D\, \mathbf{G}^{sq}\, \Gamma_r - \mathbf{G}^{qs}{}_{,r} + \mathbf{G}^{qt}{}_{,t}\, \delta^s_r \\
N^{qs}_r &= A\, (\mathbf{G}^{qs}\, \Gamma^m_{(rm)} - \mathbf{G}^{is}\, \Gamma^q_{(ir)} - \mathbf{G}^{qh}\, \Gamma^s_{(hr)}) + B\, (\mathbf{G}^{qh}\, \Gamma^s_{[rh]} + \mathbf{G}^{is}\, \Gamma^q_{[ir]}) \\
&\quad - (C + D)\, \mathbf{G}^{ih}\, \Gamma^q_{(ih)}\, \delta^s_r + E\, (\mathbf{G}^{qs}\, \Gamma_r + \mathbf{G}^{ih}\, \Gamma^q_{[ih]}\, \delta^s_r) \\
&\quad + F\, (\mathbf{G}^{iq}\, \Gamma_i\, \delta^s_r + \mathbf{G}^{qh}\, \Gamma_h\, \delta^s_r) - A\, \mathbf{G}^{qs}{}_{,r} - C\, \mathbf{G}^{qt}{}_{,t}\, \delta^s_r - D\, \mathbf{G}^{tq}{}_{,t}\, \delta^s_r
\end{aligned} \qquad [3.10]$$

cuyas partes simétrica y antisimétrica respecto de los índices q, s son, respectivamente,

$$
\begin{aligned}
M_r^{(qs)} = {} & \mathbf{G}^{(qs)}\, \Gamma^m_{(rm)} + \frac{1}{2}\, \mathbf{G}^{ih}\, (\Gamma^q_{(ih)}\, \delta^s_r + \Gamma^s_{(ih)}\, \delta^q_r) \\
& - \mathbf{G}^{(qi)}\, \Gamma^s_{(ri)} - \mathbf{G}^{(si)}\, \Gamma^q_{(ri)} + A \left[\frac{1}{2}\, \mathbf{G}^{ih}\, (\Gamma^q_{[ih]}\, \delta^s_r + \Gamma^s_{[ih]}\, \delta^q_r) \right. \\
& \left. + \mathbf{G}^{[iq]}\, \Gamma^s_{[ri]} + \mathbf{G}^{[is]}\, \Gamma^q_{[ri]} \right] - (C + D)\, \mathbf{G}^{(qs)}\, \Gamma_r - \mathbf{G}^{(qs)}{}_{,r} \\
& + \frac{1}{2}\, (\mathbf{G}^{qt}{}_{,t}\, \delta^s_r + \mathbf{G}^{st}{}_{,t}\, \delta^q_r).
\end{aligned}
$$

[3.11]

$$
\begin{aligned}
N_r^{[qs]} = {} & A\, (\mathbf{G}^{[qs]}\, \Gamma^m_{(rm)} - \mathbf{G}^{[is]}\, \Gamma^q_{(ir)} - \mathbf{G}^{[qi]}\, \Gamma^s_{(ir)}) \\
& + B\, (\mathbf{G}^{(is)}\, \Gamma^q_{[ir]} - \mathbf{G}^{(iq)}\, \Gamma^s_{[ir]}) \\
& - \frac{1}{2}\, (C + D)\, \mathbf{G}^{ih}\, (\Gamma^q_{[ih]}\, \delta^s_r - \Gamma^s_{[ih]}\, \delta^q_r) \\
& + E \left[\mathbf{G}^{[qs]}\, \Gamma_r + \frac{1}{2}\, \mathbf{G}^{ih}\, (\Gamma^q_{[ih]}\, \delta^s_r - \Gamma^s_{[ih]}\, \delta^q_r) \right] \\
& + F\, (\mathbf{G}^{(iq)}\, \Gamma_i\, \delta^s_r - \mathbf{G}^{(is)}\, \Gamma_i\, \delta^q_r) - A\, \mathbf{G}^{[qs]}{}_{,r} \\
& - \frac{1}{2}\, C\, (\mathbf{G}^{qt}{}_{,t}\, \delta^s_r - \mathbf{G}^{st}{}_{,t}\, \delta^q_r) - \frac{1}{2}\, D\, (\mathbf{G}^{tq}{}_{,t}\, \delta^s_r - \mathbf{G}^{ts}{}_{,t}\, \delta^q_r).
\end{aligned}
$$

Sumando y multiplicando por 2 para no arrastrar el factor $\frac{1}{2}$, resultan las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
2\, K_r^{qs} = {} & -2\, A\, \mathbf{G}^{[qs]}{}_{,r} - 2\, \mathbf{G}^{(qs)}{}_{,r} + \mathbf{G}^{(qt)}{}_{,t}\, \delta^s_r\, (1 - C - D) \\
& + \mathbf{G}^{[qt]}{}_{,t}\, \delta^s_r\, (1 - C + D) + \mathbf{G}^{(st)}{}_{,t}\, \delta^q_r\, (1 + C + D) \\
& + \mathbf{G}^{[st]}{}_{,t}\, \delta^q_r\, (1 + C - D) + \mathbf{G}^{ih}\, [(1 - C - D)\, \Gamma^q_{(ih)}\, \delta^s_r \\
& + (1 + C + D)\, \Gamma^s_{(ih)}\, \delta^q_r + (A + E)\, \Gamma^q_{[ih]}\, \delta^s_r + (A - E)\, \Gamma^s_{[ih]}\, \delta^q_r] \\
& + 2\, \mathbf{G}^{(qs)}\, (\Gamma^m_{(rm)} - (C + D)\, \Gamma_r) \\
& + 2\, \mathbf{G}^{(qi)}\, (-\Gamma^s_{(ri)} - B\, \Gamma^s_{[ir]} + F\, \Gamma_i\, \delta^s_r) \\
& + 2\, \mathbf{G}^{(si)}\, (-\Gamma^q_{(ri)} + B\, \Gamma^q_{[ir]} - F\, \Gamma_i\, \delta^q_r) \\
& + 2\, A\, \mathbf{G}^{[iq]}\, \Gamma^s_{ri} - 2\, A\, \mathbf{G}^{[is]}\, \Gamma^q_{ir} \\
& + 2\, \mathbf{G}^{[qs]}\, (A\, \Gamma^m_{(rm)} + E\, \Gamma_r) = 0
\end{aligned}
$$

[3.12]

En particular, por contracción de índices, resulta

$$2\,K_t^{ts} = -(2A + 5 + 3C - 3D)\,\mathbf{G}^{[ts]}{}_{,t} + 3\,(1 + \cancel{5} + D)\,\mathbf{G}^{(ts)}{}_{,t}$$

/C

$$+\,3\,(1 + C + D)\,\Gamma^s_{(ih)}\,\mathbf{G}^{(ih)} + 3\,(A - E)\,\Gamma^s_{[ih]}\,\mathbf{G}^{[ih]}$$

$$+\,2\,(B - C - D - 3F)\,\Gamma_i\,\mathbf{G}^{(is)} - 2\,(A - E)\,\Gamma_i\,\mathbf{G}^{[is]} = 0$$

[3.13]

$$2\,K_t^{qt} = (5 - 2A - 3C + 3D)\,\mathbf{G}^{[qt]}{}_{,t} + 3\,(1 - C - D)\,\mathbf{G}^{(tq)}{}_{,t}$$

$$+\,3\,(A + E)\,\Gamma^q_{[ih]}\,\mathbf{G}^{[ih]} + 3\,(1 - C - D)\,\Gamma^q_{(ih)}\,\mathbf{G}^{(ih)}$$

$$-\,2\,(B + C + D - 3F)\,\Gamma_i\,\mathbf{G}^{(iq)} - 2\,(A + E)\,\Gamma_i\,\mathbf{G}^{[iq]} = 0$$

La primera de estas ecuaciones permite despejar $\mathbf{G}^{(st)}{}_{,t}$ y la segunda, $\mathbf{G}^{(qt)}{}_{,t}$, valores que sustituidos en [3.12] y ordenando dan

$$K_r^{qs} = -A\,\mathbf{G}^{[qs]}{}_{,r} - \mathbf{G}^{(qs)}{}_{,r}$$

$$+\,\frac{1}{3}\,(A - 1)\,\delta^s_r\,\mathbf{G}^{[qt]}{}_{,t} - \frac{1}{3}\,(A + 1)\,\delta^q_r\,\mathbf{G}^{[st]}{}_{,t}$$

$$+\,\mathbf{G}^{(iq)}\left(\frac{1}{3}\,(B + C + D)\,\delta^s_r\,\Gamma_i - \Gamma^s_{(ir)} - B\,\Gamma^s_{[ir]}\right)$$

$$+\,\mathbf{G}^{[iq]}\left(\frac{1}{3}\,(A + E)\,\Gamma_i\,\delta^s_r + A\,\Gamma^s_{ri}\right)$$

$$+\,\mathbf{G}^{(is)}\left(-\frac{1}{3}\,(B - C - D)\,\Gamma_i\,\delta^q_r - \Gamma^q_{(ir)} + B\,\Gamma^q_{[ir]}\right)$$

$$+\,\mathbf{G}^{[is]}\left(\frac{1}{3}\,(A - E)\,\Gamma_i\,\delta^q_r - A\,\Gamma^q_{ir}\right)$$

$$+\,\mathbf{G}^{(qs)}\,(\Gamma^m_{(rm)} - (C + D)\,\Gamma_r) + \mathbf{G}^{[qs]}\,(A\,\Gamma^m_{(rm)} + E\,\Gamma_r) \qquad [3.14]$$

Esta expresión se puede escribir en forma condensada introduciendo las conexiones

$${}^*L^q_{ir} = \Gamma^q_{ir} + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{E}{A}\right)\delta^q_i\,\Gamma_r - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{E}{A}\right)\delta^q_r\,\Gamma_i$$

[3.15]

$${}^{**}L^q_{ir} = \Gamma^q_{(ir)} - B\,\Gamma^q_{[ir]} - \frac{1}{3}\,(B + C + D)\,\delta^q_i\,\Gamma_r$$

$$+\,\frac{1}{3}\,(B - C - D)\,\delta^q_r\,\Gamma_i.$$

las cuales cumplen las condiciones

$$^{*}L_r = 0 \quad , \quad ^{**}L_r = 0 \tag{3.16}$$

$$^{*}L^{m}_{(rm)} = \Gamma^{m}_{(rm)} + \frac{5}{3}\frac{E}{A}\Gamma_r \quad , \quad ^{**}L^{m}_{(rm)} = \Gamma^{m}_{(rm)} - \frac{5}{3}(C+D)\Gamma_r .$$

Con estas conexiones, las ecuaciones $K^{qs}_r = 0$, primeras del sistema [3.8], se escriben

$$A\, \mathrm{G}^{[qs]}_{+-;r}(^{*}L) + \mathrm{G}^{(qs)}_{+-;r}(^{**}L)$$
$$= \frac{1}{3}(A-1)\,\delta^{s}_{r}\,\mathrm{G}^{[qt]}{}_{,t} - \frac{1}{3}(A+1)\,\delta^{q}_{r}\,\mathrm{G}^{[st]}{}_{,t}. \tag{3.17}$$

En el primer miembro las derivadas covariantes se entienden respecto las conexiones indicadas. Con esto se tiene, en forma desarrollada, el primer grupo de ecuaciones [3.8]. Estas ecuaciones deberían servir para determinar las 64 componentes Γ^{m}_{ik}, lo cual parece extraordinariamente complicado. Para que ellas tomen una forma más simple, análoga a la que tienen las primeras ecuaciones del sistema [6], caben dos casos:

1° $A = 1$. En este caso, para que las dos conexiones [3.15] sean una misma, debe ser

$$B = -1 \quad , \quad E + C + D = 0 \tag{3.18}$$

Con estas condiciones las ecuaciones [3.17] quedan

$$\mathrm{G}^{qs}_{+-;r}(^{\circ}L) = -\frac{2}{3}\,\delta^{q}_{r}\,\mathrm{G}^{[st]}{}_{,t}$$

donde la derivada covariante se refiere a la conexión

$$^{\circ}L^{q}_{ir} = \Gamma^{q}_{ir} + \frac{1}{3}(1+E)\,\delta^{q}_{i}\,\Gamma_r - \frac{1}{3}(1-E)\,\delta^{q}_{r}\,\Gamma_i \tag{3.20}$$

que cumple la condición

$$^{\circ}L_i = 0 \tag{3.21}$$

2° $A = -1$. Observemos que para cualquier conexión es

$$\mathrm{G}^{[qs]}_{+-;r}(\Gamma) = -\mathrm{G}^{[qs]}_{+-;r}(\overline{\Gamma}) \tag{3.22}$$

indicando con $\overline{\Gamma}$ a la conexión transpuesta

$$\overline{\Gamma}^m_{ik} = \Gamma^m_{ki} \tag{3.23}$$

y también se cumple

$$\mathbf{G}^{(\underset{+}{q}\,\underset{-}{s})}{}_{;r}\,(\Gamma) = \mathbf{G}^{(\underset{+}{s}\,\underset{-}{q})}{}_{;r}\,(\overline{\Gamma}) \tag{3.24}$$

Para que las dos conexiones transpuestas de las [3.15] sean iguales debe ser

$$B = -1 \quad , \quad E - C - D = 0 \tag{3.25}$$

y si estas condiciones se cumplen las ecuaciones [3.17] se pueden escribir

$$\mathbf{G}^{\underset{+}{q}\,\underset{-}{s}}{}_{;r}\,({}^{\circ\circ}L) = -\frac{2}{3}\,\delta^q_r\,\mathbf{G}^{[st]}{}_{,t} \tag{3.26}$$

que son las mismas [3.19], pero ahora la derivación covariante se refiere a la conexión

$${}^{\circ\circ}L^q_{ir} = \overline{{}^{\circ}L^q_{ir}} = \Gamma^q_{ri} - \frac{1}{3}\,(1 + E)\,\delta^q_i\,\Gamma_r + \frac{1}{3}\,(1 - E)\,\delta^q_r\,\Gamma_i \tag{3.27}$$

que cumple la condición

$${}^{\circ\circ}L_i = 0. \tag{3.28}$$

4. **Segundo grupo de ecuaciones del campo.** — Si en el principio variacional [3.2] se supone que las $\mathbf{G}^{ik}$ varían independientemente unas de otras, el segundo grupo de ecuaciones del campo, según [3.5] y [3.1] es

$$T_{ik} = 0. \tag{4.1}$$

En el caso general, por lo tanto, habría que resolver las 64 ecuaciones algebraicas [3.17] para hallar las componentes Γ^m_{ik} en función de las $\mathbf{G}^{ik}$. Sustituyendo luego estos valores en [4.1] tendríamos un sistema de 16 ecuaciones diferenciales de segundo orden para determinar las componentes $\mathbf{G}^{ik}$.

Vamos a ver cuáles son las hipótesis necesarias que hay que añadir para que las ecuaciones tomen la forma del sistema [6] de Einstein.

Introduzcamos en el principio variacional la condición *a priori*

$$\mathbf{G}^{[il]}{}_{,l} = 0. \qquad [4.2]$$

Entonces las segundas ecuaciones del campo, aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange, toman la forma (ver por ej. Tonnelat [9, pág. 26]).

$$T_{ih} + \sigma_{i,h} - \sigma_{h,i} = 0 \qquad [4.3]$$

siendo σ_i un vector arbitrario (es decir, T_{ih} debe ser un rotor), que equivalen a

$$T_{(ih)} = 0 \quad , \quad T_{[ih,k]} + T_{[hk],i} + T_{[ki],h} = 0, \qquad [4.4]$$

Consideremos ahora los casos particulares tratados en el número anterior.

Primer caso.

$$A = 1 \ , B = -1 \quad , \quad E + C + D = 0. \qquad [4.5]$$

Las ecuaciones [3.19], por la condición [4.2] impuesta *a priori*, tienen el segundo miembro nulo, y por lo tanto tienen la forma de las primeras ecuaciones del sistema [6], o sea forman el sistema

$$\mathbf{G}^{\underset{+}{q}\underset{-}{s}}{}_{;r} = 0 \qquad [4.6]$$

que ha sido resuelto por Tonnelat (9) y Hlavaty (4), (5).

Hay que tener ahora en cuenta que la conexión es la [3.20] y que, por tanto, hay que introducir en las ecuaciones [4.4] esta conexión. Para ello debemos calcular ${}^{\circ}T_{ih} = T_{ih}\,({}^{\circ}L)$. Teniendo en cuenta [3.21], [4.5] y [2.4] es

$${}^{\circ}T_{ih} = R_{ih}\,({}^{\circ}L) \qquad [4.7]$$

y haciendo el cálculo resulta

$${}^{\circ}T_{ih} = T_{ih} + \frac{1}{3}\,(1 - C - 4\,D)\,(\Gamma_{h,i} - \Gamma_{i,h})$$

$$- \left(F + \frac{1}{3}\,(1 - E^2)\right)\Gamma_i\,\Gamma_h\,. \qquad [4.8]$$

Por tanto las ecuaciones [4.4] quedan

$$
\begin{aligned}
&{}^{\circ}T_{(ih)} + \left(F + \frac{1}{3}(1 - E^2)\right)\Gamma_i\,\Gamma_h = 0 \\
&{}^{\circ}T_{[ih],k} + {}^{\circ}T_{[hk],i} + {}^{\circ}T_{[ki],h} = 0.
\end{aligned}
\qquad [4.9]
$$

Para que estas ecuaciones tomen la forma [6], además de las condiciones ya supuestas [4.5], debe cumplirse la nueva condición

$$F + \frac{1}{3}(1 - E)^2 = 0. \qquad [4.10]$$

Teniendo en cuenta [4.7], o sea, que ${}^{\circ}T_{ih}$ es el tensor de Ricci correspondiente a la conexión que se obtiene al resolver el primer grupo de ecuaciones [4.6], resulta que *con las condiciones* [4.5] *y* [4.10] *las ecuaciones del campo son las mismas del sistema* [6].

Segundo caso. — Supongamos que sea

$$A = -1\ ,\ B = -1\ ,\ E - C - D = 0 \qquad [4.11]$$

En este caso, siendo también nulo el segundo miembro de [3.24] quedan las mismas primeras ecuaciones [4.6]. Hay que introducir la conexión [3.25] en las ecuaciones [4.4].

Teniendo en cuenta [3.28] y [2.4] es

$${}^{\circ\circ}T_{ih} = R_{ih}({}^{\circ\circ}L) - 2\,{}^{\circ\circ}L^{m}_{[ih];\,m}\,({}^{\circ\circ}L_{()}) \qquad [4.12]$$

donde el primer término del segundo miembro es el tensor de Ricci de la conexión [3.27] y en el segundo la derivada covariante está tomada respecto la parte simétrica de la misma conexión.

Haciendo el cálculo e introduciendo T_{ih} por su expresión [1.7] resulta

$$
\begin{aligned}
R_{ih}({}^{\circ\circ}L) = T_{ih} &+ \frac{1}{3}(1 + C + 4D)(\Gamma_{i,h} - \Gamma_{h,i}) \\
&- \left(F + \frac{1}{3}(1 - E^2)\right)\Gamma_i\,\Gamma_h
\end{aligned}
\qquad [4.13]
$$

Por tanto, poniendo ${}^{\circ\circ}R_{ih} = R_{ih}({}^{\circ\circ}L)$, resulta que el segundo grupo de ecuaciones del campo es en este caso

$$
\begin{aligned}
&{}^{\circ\circ}R_{(ik)} + \left(F + \frac{1}{3}(1 - E^2)\right)\Gamma_i\,\Gamma_k = 0 \\
&{}^{\circ\circ}R_{[ik],k} + {}^{\circ\circ}R_{[hk],i} + {}^{\circ\circ}R_{[ki],h} = 0.
\end{aligned}
\qquad [4.14]
$$

Para que estas ecuaciones sean las mismas [6, b] se debe cumplir nuevamente la condición [4.10].

En resumen se tiene el siguiente:

TEOREMA 4.1. — *Partiendo del principio variacional* [3.2] *con el tensor* T_{ik} *de la forma* [1.7] *y en el cual se supone que* $\Gamma^m_{(ik)}$, $\Gamma^m_{[ik]}$ *y* $\mathbf{G}^{ik}$ *pueden variar independientemente, estas últimas componentes sujetas a la condición* [4.2], *las ecuaciones del campo son las* [3.17] *y* [4.4]. *Ellas se reducen a las del sistema* [6] *de Einstein siempre y cuando se cumplan las condiciones*

$$\text{(I)}\quad A = 1\,,\ B = -1\,,\ E + C + D = 0\,,\ F + \frac{1}{3}(1 - E^2) = 0$$

o bien

$$\text{(II)}\quad A = -1\,,\ B = -1\,,\ E - C - D = 0\,,\ F + \frac{1}{3}(1 - E^2) = 0.$$

Ejemplos. — *a*) El caso particular más conocido es el de las llamadas λ-transformaciones, que consisten en substituir en el tensor de Ricci la conexión Γ^m_{ik} por $\Gamma^m_{ik} + \lambda\delta^m_i\,\Gamma_k$ o bien por $\Gamma^m_{ik} + \lambda\,\delta^m_k\,\Gamma_i$, siendo λ una constante. En el primer caso el tensor resultante es

$$R_{ik}\,(\Gamma^m_{ik} + \lambda\delta^m_i\,\Gamma_k) = R_{ik} + \lambda\,(\Gamma_{k,i} - \Gamma_{i,k}) \qquad [4.15]$$

o sea, según [2.4],

$$A = 1\,,\ B = -1\,,\ C = -1 - \lambda\,,\ D = \lambda\,,\ E = 1\,,\ F = 0$$

y por tanto, como se cumplen las condiciones (I) las ecuaciones del campo que resultan del principio variacional [3.2] con el tensor [4.15] en vez de T_{ik} son las mismas [6].

En el segundo caso es

$$
\begin{aligned}
R_{ik}\,(\Gamma^m_{ik} + \lambda\delta^m_k\,\Gamma_i) = {}& R_{ik} - 3\,\lambda\Gamma_{i;k}\,(\Gamma_{()}) + \\
&+ 3\,\lambda\Gamma_l\,\Gamma^l_{[ik]} + (2\,\lambda + 3\,\lambda^2)\,\Gamma_i\Gamma_k
\end{aligned}
\qquad [4.16]
$$

y por tanto, comparando con [2.4],

$$A = 1\,,\, B = -1\,,\, C = -1 - 3\lambda\,,\, D = 0\,,\, E = 1 + 3\lambda\,,\; F = 2\lambda + 3\lambda^2$$

Como se cumplen las condiciones (I), también en este caso las ecuaciones del campo resultan las mismas [6]. Esta propiedad es la que se anuncia diciendo que *las ecuaciones* [6] *son invariantes respecto λ-transformaciones.*

b) Consideremos el caso de sustituir el tensor de Ricci por su transpuesto

$$\overline{R_{ih}} = R_{ih}(\Gamma_{()}) - \Gamma^m_{[ih];m}(\Gamma_{()}) - \Gamma^m_{[lh]}\Gamma^l_{[im]} + \\ + \Gamma_{i;h}(\Gamma_{()}) + \Gamma_l \Gamma^l_{[ih]}\,. \qquad [4.17]$$

y tomemos este tensor como el T_{ih} del principio variacional [3.2] Comparando con [1.7] es

$$A = -1\,,\, B = -1\,,\, C = 1\,,\, D = 0\,,\, E = 1\,,\, F = 0.$$

Puesto que se cumplen las condiciones (II) resulta que también *las ecuaciones del campo son invariantes al sustituir en el principio variacional* [3] *el tensor de Ricci por su transpuesto.*

Mas, generalmente, el tensor transpuesto del T_{ih} tiene por coeficientes

$$A' = -A\,,\; B' = B\,,\; C' = -C\,,\; D' = -D\,,\; E' = E\,,\; F' = F,$$

de manera que si se cumplen las condiciones (I) para T_{ih} se cumplirán las (II) para el transpuesto y viceversa. Es decir:

Si un tensor T_{ih} tomado como base del principio variacional [3.2] *da lugar al sistema de ecuaciones* [6], *también su transpuesto.*

c) Consideremos el caso particular en que los tensores T_{ih} formados a partir de las conexiones [1.6] corresponden a suponer $\mu_\alpha = \nu_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, 2, 3)$.

Según [1.9], las condiciones (I) o (II) se cumplirán en este caso solamente en los casos siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 1\,,\; \lambda_2 = 1\,,\; \lambda_3 = \text{cualquiera} \\ \lambda_1 = -1\,,\; \lambda_2 = 1\,,\; \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 = 1\,,\; \lambda_2 = -1\,,\; \lambda_3 = -1 \\ \lambda_1 = -1\,,\; \lambda_2 = -1\,,\; \lambda_3 = \text{cualquiera.} \end{array}\right. \qquad [4.18]$$

Por ejemplo, si se consideran los tensores obtenidos al sustituir en [1.4] las conexiones ${}^1\Gamma$, ${}^2\Gamma$, ${}^3\Gamma$ por una de las Γ^m_{ih}, $\overline{\Gamma}^m_{ih}$ (o sea $\lambda_a = \pm 1$), todos ellos dan lugar a las mismas ecuaciones [6] excepto los correspondientes a

$$(\lambda_1 = 1\ ,\ \lambda_2 = -1\ ,\ \lambda_3 = 1) \quad \text{o} \quad (\lambda_1 = -1\ ,\ \lambda_2 = 1\ ,\ \lambda_3 = -1)$$

que dan lugar a ecuaciones diferentes. Estos dos tensores son

$$\begin{aligned} {}^1T_{ih} &= \Gamma^m_{hi,\,m} - \Gamma^m_{im,\,h} + \Gamma^m_{lm}\,\Gamma^l_{hi} - \Gamma^m_{hl}\,\Gamma^l_{im} + 2\,\Gamma^m_{[il]}\,\Gamma^l_{mh} \\ {}^2T_{ih} &= \Gamma^m_{ih,\,m} - \Gamma^m_{mi,\,h} + \Gamma^m_{ml}\,\Gamma^l_{ih} - \Gamma^m_{lh}\,\Gamma^l_{mi} + 2\,\Gamma^m_{[li]}\,\Gamma^l_{hm}\,. \end{aligned} \qquad [4.19]$$

Se puede por lo tanto enunciar el siguiente

COROLARIO. — *Si en la expresión* [1.4] *de los tensores* T_{ih} *se supone que las conexiones* ${}^1\Gamma$, ${}^2\Gamma$, ${}^3\Gamma$ *pueden elegirse únicamente entre las* Γ^m_{ih} *y su transpuesta* $\overline{\Gamma}^m_{ih} = \Gamma^m_{hi}$, *todos los tensores que resultan tomados como base del principio variacional* [3.2] *dan lugar a las mismas ecuaciones del campo* [6], *excepto los dos tensores* [4.19].

II. — PRINCIPIO VARIACIONAL CON TENSORES HERMITIANOS

5. **Tensores hermitianos.** — Einstein (1) ha introducido los llamados tensores hermitianos, definidos por la propiedad de ser

$$Q_{ih} = \overline{Q}_{hi} \qquad [5.1]$$

donde en el segundo miembro figura el tensor transpuesto, o sea, el tensor en cuya expresión se ha sustituido la conexión Γ^m_{ih} por su transpuesta [3.23].

Vamos a considerar la familia de tensores hermitianos que se obtienen a partir de T_{ih} [1.7] tomando su parte hermitiana.

Representando por P.H. a la « parte hermitiana » es

$$\text{P.H. } T_{ih} = \frac{1}{2}\,(T_{ih} + \overline{T}_{hi})$$

Para el cálculo del segundo miembro tenemos:

$$\text{P.H. } R_{ih}\,(\Gamma_{(\,)}) = R_{ih}\,(\Gamma_{(\,)}) + \frac{1}{2}\,(\Gamma^s_{(is),\,h} - \Gamma^s_{(hs),\,i})$$

$$\text{P.H. } \Gamma^s_{[ih];\,s}\,(\Gamma_{(\,)}) = \Gamma^s_{[ih];\,s}\,(\Gamma_{(\,)})$$

$$\text{P.H. } \Gamma^{s}_{[lh]}\,\Gamma^{l}_{[is]} = \Gamma^{s}_{[lh]}\,\Gamma^{l}_{[is]}$$

$$\text{P.H. } \Gamma_{i;h}\,(\Gamma_{()}) = \frac{1}{2}\,(\Gamma_{i,h} - \Gamma_{h,i})$$

$$\text{P.H. } \Gamma_{l}\,\Gamma^{l}_{[ih]} = 0$$

$$\text{P.H. } \Gamma_{i}\,\Gamma_{h} = \Gamma_{i}\,\Gamma_{h}$$

con lo cual, llamando $Q_{ih} = \text{P.H. } T_{ih}$, según [1.7], será

$$Q_{ih} = R_{ih}\,(\Gamma_{()}) + \frac{1}{2}\,(\Gamma^{s}_{(is),h} - \Gamma^{s}_{(hs),i}) + A\,\Gamma^{s}_{[ih];s}\,(\Gamma_{()})$$

$$+ B\,\Gamma^{s}_{[lh]}\,\Gamma^{l}_{[is]} + \frac{1}{2}\,(C - D)\,(\Gamma_{i,h} - \Gamma_{h,i}) + F\,\Gamma_{i}\,\Gamma_{h} \qquad [5.2]$$

o bien, introduciendo el tensor T_{ih}

$$Q_{ih} = T_{ih} + \frac{1}{2}\,(\Gamma^{s}_{(is),h} - \Gamma^{s}_{(sh),i}) - E\,\Gamma_{l}\,\Gamma^{l}_{[ih]} -$$

$$- (C + D)\left(\frac{1}{2}\,(\Gamma_{i,h} + \Gamma_{h,i}) - \Gamma_{l}\,\Gamma^{l}_{(ih)}\right) \qquad [5.3]$$

Por ejemplo, el tensor de Einstein, introducido en (1),

$$E_{ih} = -\frac{1}{2}\,(\Gamma^{s}_{(is),h} + \Gamma^{s}_{(sh),i}) + \Gamma^{s}_{ih,s} + \Gamma^{l}_{ih}\,\Gamma^{s}_{(ls)} - \Gamma^{s}_{il}\,\Gamma^{l}_{sh}$$

puede escribirse en la forma

$$E_{ih} = R_{ih}\,(\Gamma_{()}) + \frac{1}{2}\,(\Gamma^{s}_{(is),h} - \Gamma^{s}_{(hs),i}) + \Gamma^{s}_{[ih];s}\,(\Gamma_{()}) - \Gamma^{s}_{[lh]}\,\Gamma^{l}_{[is]} \qquad [5.5]$$

y por tanto corresponde al caso

$$A = 1\ ,\ B = -1\ ,\ C = D\ ,\ F = 0. \qquad [5.6]$$

6. **Ecuaciones del campo para los tensores hermitianos.** — Consideremos ahora el principio variacional

$$\delta \int Q_{ih}\,\mathrm{G}_{ih}\,d\tau = 0 \qquad [6.1]$$

con las mismas condiciones del nº 3. Procederemos igual que en dicho nº 3.

Teniendo en cuenta la expresión [5.3] del tensor Q_{ik} los coeficientes de $\delta\,\Gamma^r_{(qs)}$ y $\delta\,\Gamma^r_{[qs]}$ en el integrando de la variación [6.1] serán ahora

$$
\begin{aligned}
{}^*M^{qs}_r &= M^{qs}_r + (C + D)\,\Gamma_r\,\mathbf{G}^{qs} - \mathbf{G}^{[qt]}{}_{,t}\,\delta^s_r \\
{}^*N^{qs}_r &= N^{qs}_r + (C + D)\,\mathbf{G}^{ik}\,\Gamma^q_{(ik)}\,\delta^s_r - E\,\mathbf{G}^{qs}\,\Gamma_r - E\,\mathbf{G}^{ik}\,\Gamma^q_{[ik]}\,\delta^s_r \\
&\quad + (C + D)\,\mathbf{G}^{(qt)}{}_{,t}\,\delta^s_r .
\end{aligned}
$$

Las partes simétricas y antisimétricas respectivas son

$$
\begin{aligned}
{}^*M^{(qs)}_r &= M^{(qs)}_r + (C + D)\,\Gamma_r\,\mathbf{G}^{(qs)} + \frac{1}{2}\,(\mathbf{G}^{[tq]}{}_{,t}\,\delta^s_r + \mathbf{G}^{[ts]}{}_{,t}\,\delta^q_r) \\
{}^*N^{[qs]}_r &= N^{[qs]}_r + \frac{1}{2}\,(C + D)\,\mathbf{G}^{ik}\,(\Gamma^q_{(ik)}\,\delta^s_r - \Gamma^s_{(ik)}\,\delta^q_r) \\
&\quad - E\,\mathbf{G}_{[qs]}\,\Gamma_r - \frac{1}{2}\,E\,\mathbf{G}^{ik}\,(\Gamma^q_{[ik]}\,\delta^s_r - \Gamma^s_{[ik]}\,\delta^q_r) \\
&\quad + \frac{1}{2}\,(C + D)\,(\mathbf{G}^{(qt)}{}_{,t}\,\delta^s_r - \mathbf{G}^{(st)}{}_{,t}\,\delta^q_r)
\end{aligned}
\qquad [6.2]
$$

Poniendo

$$
{}^*K^{qs}_r = {}^*M^{(qs)}_r + {}^*N^{[qs]}_r
$$

el primer grupo de las ecuaciones del campo será

$$
{}^*K^{qs}_r = 0. \qquad [6.3]
$$

Teniendo en cuenta los valores encontrados en el nº 3, resulta

$$
\begin{aligned}
2\,{}^*K^{qs}_r &= -2\,A\,\mathbf{G}^{[qs]}{}_{,r} - 2\,\mathbf{G}^{[qs]}{}_{,r} + \mathbf{G}^{(qt)}{}_{,t}\,\delta^r_s \\
&\quad - (C - D)\,\mathbf{G}^{[qt]}{}_{,t}\,\delta^s_r + \mathbf{G}^{(st)}{}_{,t}\,\delta^q_r + (C - D)\,\mathbf{G}^{[st]}{}_{,t}\,\delta^q_r \\
&\quad + \mathbf{G}^{ik}\,(\Gamma^q_{(ik)}\,\delta^s_r + \Gamma^s_{(ik)}\,\delta^q_r + A\,\Gamma^q_{[ik]}\,\delta^s_r + A\,\Gamma^s_{[ik]}\,\delta^q_r) \\
&\quad + 2\,\mathbf{G}^{(qs)}\,\Gamma^m_{(rm)} + 2\,A\,\mathbf{G}^{[qs]}\,\Gamma^m_{(rm)} \\
&\quad + 2\,\mathbf{G}^{(qi)}\,(-\,\Gamma^s_{(ri)} + B\,\Gamma^s_{[ir]} - F\,\Gamma_i\,\delta^q_r) + 2\,A\,\mathbf{G}^{[iq]}\,\Gamma^s_{ri} \\
&\quad - 2\,A\,\mathbf{G}^{[is]}\,\Gamma^q_{ir} + 2\,\mathbf{G}^{(is)}\,(-\,\Gamma^q_{(ri)} + B\,\Gamma^q_{[ir]} - F\,\Gamma_i\,\delta^q_r) = 0.
\end{aligned}
\qquad [6.4]
$$

Por contracción de índices se obtiene

$$2\ {}^*K_s^{qs} = (-2\,A - 3\,C + 3\,D)\,\mathbf{G}^{[qt]}{}_{,t} + 3\,\mathbf{G}^{(qt)}{}_{,t} + 3\,\Gamma^q_{(ih)}\,\mathbf{G}^{(ih)}$$
$$+ 3\,A\,\Gamma^q_{[ih]}\,\mathbf{G}^{[ih]} - 2\,(B - 3\,F)\,\Gamma_i\,\mathbf{G}^{(iq)} - 2\,A\,\Gamma_i\,\mathbf{G}^{[iq]} = 0$$

$$2\ {}^*K_q^{qs} = (-2\,A - 3\,C + 3\,D)\,\mathbf{G}^{[ts]}{}_{,t} + 3\,\mathbf{G}^{(ts)}{}_{,t} + 3\,\Gamma^s_{(ih)}\,\mathbf{G}^{(ih)}$$
$$+ 3\,A\,\Gamma^s_{[ih]}\,\mathbf{G}^{[ih]} + 2\,(B - 3\,F)\,\Gamma_i\,\mathbf{G}^{(is)} - 2\,A\,\Gamma_i\,\mathbf{G}^{[is]} = 0$$

Despejando $\mathbf{G}^{(qt)}{}_{,t}$ de la primera ecuación y $\mathbf{G}^{(ts)}{}_{,t}$ de la segunda, y sustituyendo en [6.4] resulta

$${}^*K_r^{qs} = -A\,\mathbf{G}^{[qs]}{}_{,r} - \mathbf{G}^{(qs)}{}_{,r} + \frac{1}{3}\,(A\,\mathbf{G}^{[qt]}{}_{,t}\,\delta^s_r + \mathbf{G}^{[ts]}{}_{,t}\,\delta^q_r)$$
$$+ \mathbf{G}^{(iq)}\left(\frac{1}{3}\,B\,\Gamma_i\,\delta^s_r - \Gamma^s_{(ri)} - B\,\Gamma^s_{[ir]}\right)$$
$$+ \mathbf{G}^{(is)}\left(-\frac{1}{3}\,\Gamma_i\,\delta^q_r - \Gamma^q_{(ir)} + B\,\Gamma^q_{[ir]}\right)$$
$$+ \mathbf{G}^{[iq]}\left(\frac{1}{3}\,A\,\Gamma_i\,\delta^s_r + A\,\Gamma^s_{ri}\right)$$
$$+ \mathbf{G}^{[is]}\left(\frac{1}{3}\,A\,\Gamma_i\,\delta^q_r - A\,\Gamma^q_{ir}\right)$$
$$+ \mathbf{G}^{(qs)}\,\Gamma^m_{(rm)} + A\,\mathbf{G}^{[qs]}\,\Gamma^m_{(rm)}\,.$$

Introduciendo las conexiones

$$\begin{aligned} {}^*\Gamma^q_{ir} &= \Gamma^q_{ir} + \frac{1}{3}\,\delta^q_i\,\Gamma_r - \frac{1}{3}\,\delta^q_r\,\Gamma_i \\ {}^{**}\Gamma^q_{ir} &= \Gamma^q_{(ir)} + B\,\Gamma^q_{[ri]} - \frac{1}{3}\,B\,\delta^q_i\,\Gamma_r + \frac{1}{3}\,B\,\delta^q_r\,\Gamma_i \end{aligned} \qquad [6.5]$$

la expresión última toma la forma condensada

$$A\,\mathbf{G}^{[q\,s]}_{+\,-;r}\,({}^*\Gamma) + \mathbf{G}^{(q\,s)}_{+\,-;r}\,({}^{**}\Gamma) =$$
$$= \frac{1}{3}\,A\,(\mathbf{G}^{[qt]}{}_{,t}\,\delta^s_r - \mathbf{G}^{[st]}{}_{,t}\,\delta^q_r) \qquad [6.6]$$

donde las derivadas covariantes del primer miembro se refieren a la conexión indicada entre paréntesis.

Estas [6.6] constituyen *el primer grupo de ecuaciones del campo*. Queremos ver en qué casos se reducirán a las primeras ecuaciones del sistema [6].

Para que las dos conexiones [6.5] sean iguales, debe ser

$$B = -1, \tag{6.7}$$

y para que se puedan juntar los dos sumandos del primer miembro caben dos posibilidades:

1° $A = 1$. En este caso las ecuaciones [6.6] quedan

$$\mathbf{G}^{\underset{+}{q}\,\underset{-}{s}}{}_{;r} = \frac{1}{3}\left(\mathbf{G}^{[qt]}{}_{,t}\,\delta^s_r - \mathbf{G}^{[st]}{}_{,t}\,\delta^q_r\right) \tag{6.8}$$

con la derivación covariante del primer miembro hecha respecto la conexión

$${}^{\circ}\Gamma^q_{ir} = \Gamma^q_{ir} + \frac{1}{3}\,\delta^q_i\,\Gamma_r - \frac{1}{3}\,\delta^q_r\,\Gamma_i \tag{6.9}$$

2° $A = -1$. Teniendo en cuenta [3.22] y [3.24], las ecuaciones [6.6] se pueden escribir

$$\mathbf{G}^{[\underset{+}{q}\,\underset{-}{s}]}{}_{;r}\,({}^{*}\Gamma) + \mathbf{G}^{(\underset{+}{q}\,\underset{-}{s})}{}_{;r}\,({}^{**}\overline{\Gamma}) = \frac{1}{3}\left(\mathbf{G}^{[st]}{}_{,t}\,\delta^q_r - \mathbf{G}^{[qt]}{}_{,t}\,\delta^s_r\right). \tag{6.10}$$

Para que las conexiones transpuestas de [6.5] sean iguales, debe ser también $B = -1$ y queda entonces la conexión única

$${}^{\circ\circ}\Gamma^q_{ir} = {}^{\circ}\overline{\Gamma}{}^q_{ir} = \Gamma^q_{ri} - \frac{1}{3}\,\delta^q_i\,\Gamma_r + \frac{1}{3}\,\delta^q_r\,\Gamma_i \tag{6.11}$$

con la cual las ecuaciones [6.10] se escriben

$$\mathbf{G}^{\underset{+}{q}\,\underset{-}{s}}{}_{;r} = \frac{1}{3}\left(\mathbf{G}^{[st]}{}_{,t}\,\delta^q_r - \mathbf{G}^{[qt]}{}_{,t}\,\delta^s_r\right). \tag{6.12}$$

Observemos que se cumplen las condiciones

$${}^{\circ}\Gamma_i = 0 \quad , \quad {}^{\circ\circ}\Gamma_i = 0. \tag{6.13}$$

7. Segundo grupo de ecuaciones del campo para el caso de los tensores Q_{ik}. — Pasemos al segundo grupo de ecuaciones del campo para este caso de los tensores hermitianos Q_{ik}.

Imponiendo en el principio variacional [6.1] la condición *a priori*

$$\mathbf{G}^{[st]}{}_{,t} = 0 \tag{7.1}$$

dichas ecuaciones son (igual que en el n° 4)

$$Q_{(ih)} = 0 \quad , \quad Q_{[ih],k} + Q_{[hk],i} + Q_{[ki],h} = 0. \tag{7.2}$$

Consideremos por separado los dos casos siguientes:
1° Supongamos

$$A = 1 \quad , \quad B = -1. \tag{7.3}$$

Las ecuaciones son entonces las [7.2] más las [6.8] que con la condición [7.1] se reducen a

$$\mathbf{G}^{\underset{+}{q}\underset{-}{s}}{}_{;r} = 0 \tag{7.4}$$

donde la derivación covariante se refiere a la conexión [6.9].
Estas ecuaciones permiten calcular esta conexión [6.9], y por tanto hay que introducirla en el sistema [7.2].
Según [6.9] y [5.3], teniendo en cuenta [6.13], es

$$Q_{ih}\,({}^{\circ}\Gamma) = T_{ih}\,({}^{\circ}\Gamma) + \frac{1}{2}\,(\Gamma^{s}_{(is),h} - \Gamma^{s}_{(hs),i})$$

y según [2.4],

$$Q_{ih}\,({}^{\circ}\Gamma) = R_{ih}\,({}^{\circ}\Gamma) + \frac{1}{2}\,(\Gamma^{s}_{(is),h} - \Gamma^{s}_{(hs),i})$$

$$= Q_{ih} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\,(C - D)\right)(\Gamma_{i,h} - \Gamma_{h,i}) - \left(F + \frac{1}{3}\right)\Gamma_i\,\Gamma_h$$

Por tanto, poniendo ${}^{\circ}R_{ih} = R_{ih}\,({}^{\circ}\Gamma)$ las ecuaciones [7.2] equivalen a

$${}^{\circ}R_{ih} + \left(F + \frac{1}{3}\right)\Gamma_i\,\Gamma_h = 0 \ , \ {}^{\circ}R_{[ih],k} + {}^{\circ}R_{[hk],i} + {}^{\circ}R_{[ki],h} = 0. \tag{7.5}$$

Por tanto, ellas serán las mismas [6] siempre y cuando, además de [7.3], se cumpla la condición

$$F = -\frac{1}{3}\,. \tag{7.6}$$

2° Sea ahora

$$A = -1 \;,\; B = -1. \qquad [7.7]$$

Observemos que es

$$R_{ih}({}^{\circ\circ}\Gamma) = Q_{ih} - \frac{1}{2}\left(\Gamma^{s}_{(is),h} - \Gamma^{s}_{(hs),i}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{2}(C-D) - \frac{1}{3}\right)(\Gamma_{i,h} - \Gamma_{h,i}) - \left(F + \frac{1}{3}\right)\Gamma_i\,\Gamma_h \qquad [7.8]$$

Por lo tanto, las ecuaciones [7.2] se pueden escribir en la forma

$$\begin{aligned} &{}^{\circ\circ}R_{(ih)} + \left(F + \frac{1}{3}\right)\Gamma_i\,\Gamma_h = 0 \\ &{}^{\circ\circ}R_{[ih],k} + {}^{\circ\circ}R_{[hk],i} + {}^{\circ\circ}R_{[ki],h} = 0. \end{aligned} \qquad [7.9]$$

Para que estas ecuaciones, junto con [7.4] y [7.1], formen el mismo sistema [6], debe cumplirse también la condición [7.6]. Se tiene por tanto el siguiente

TEOREMA 7.1. — *Partiendo de los tensores hermitianos de la forma* [5.2] *y del principio variacional* [6.1] *con la condición suplementaria* [7.1], *las ecuaciones del campo son las* [6.6], [7.2]. ***Ellas se reducen a las del sistema de Einstein*** [6] *en los casos siguientes*:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) \quad A = 1 \;,\; B = -1 \;,\; F = -1/3 \\ &(\mathrm{II}) \quad A = -1 \;,\; B = -1 \;,\; F = -1/3. \end{aligned} \qquad [7.10]$$

Ejemplos. — 1. Para el tensor de Einstein [5.4], que corresponde a los valores [5.6], no se cumplen las condiciones del teorema; por tanto, tomado como base del principio variacional [6.1], no conduce al sistema [6]. Si no se impone la condición [7.1] se llega al sistema formado por [6.8] más la ecuación $E_{ih} = 0$ [ver ([1])].

2. Si para un tensor Q_{ih} se cumplen las condiciones (I) o (II), para el tensor transpuesto se cumplirán respectivamente las (II) o (I), de manera que se tiene: *Si un tensor Q_{ih} de la forma* [5.2] *tomado como base del principio variacional* [6.1] *da lugar al sistema de ecuaciones* [6], *también su transpuesto.*

3. De los teoremas 4.1 y 7.1 se deduce:

Para que un tensor T_{ih} de la forma [1.7] *sea tal que tanto él como su parte hermitiana y los transpuestos de ambos den lugar al mismo sistema* [6], *deberá ser*

$$A = +1 \ , \ B = -1 \ , \ C + D = 0 \ , \ E = 0 \ , \ F = -\frac{1}{3} \, .$$

El tensor más simple de este tipo corresponderá al caso de ser $A = 1$, $C = D = 0$, resultando

$$T_{ih} = R_{ih} + \Gamma_{i;h} - \frac{1}{3} \Gamma_i \Gamma_h$$

donde R_{ih} es el tensor de Ricci [2] y la derivada covariante está tomada respecto la conexión Γ^m_{ih}.

Bibliografía

1. Einstein, A. — « The meaning of Relativity ». Princeton, 1950, 3° edición, Apéndice II.
2. Einstein, A. — « The meaning of Relativity ». Princeton, 1953, 4° edición, Apéndice II.
3. Einstein, A. — « Extension du groupe relativiste ». Louis de Broglie Physicien et Penseur, Albin Michel, Paris, 1952.
4. Hlavaty, V. — « The elementary basic principles of the unified theory of Relativity. B. ». *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, vol. 2, 1953, pp. 1-52.
5. Hlavaty, V., y Sáenz, A. W. — « Uniqueness theorems in the unified theory of Relativity ». *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, vol. 2, 1953, pp. 523-536.
6. Lichnerowicz, A. — « Les théories relativistes de la gravitation et de l'electromagnetisme ». Masson, Paris, 1955.
7. Mishra, R. S. — « Basic principles of Unified Field Theory ». « Il nuovo Cimento », serie X, vol. 4, 1956, pp. 907-916.
8. Santaló, L. A. — « Sobre unos tensores análogos al de curvatura en espacios de conexión afín no simétrica ». *Revista de Mat. y Física Teórica*, Universidad de Tucumán, vol. 10, 1954, pp. 19-26.
9. Tonnelat, M. A. — « La Théorie du Champ Unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements ». Gauthier Villars, Paris, 1955.
10. Winogradzki, J. — « Sur les λ-transformations de la théorie unitaire d'Einstein-Schroedinger ». *Journal de Physique et Radium*, vol. 16, 1955.