SOBRE UNAS PROPIEDADES CARACTERISTICAS DE LA ESFERA

Por L. A. SANTALÓ

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Bs. Aires

Homenaje del autor a los profesores Terracini y Cernuschi

(Recibido el 14 de marzo de 1962)

SUMMARY

Theorem: *a*) Let κ be the curvature and τ the torsion of a closed curve C. Let s be the arc length of C and $f(\kappa, \tau)$ a function of κ and τ. If the relation

$$\int_C f(\kappa, \tau)\, ds = 0 \tag{1}$$

holds for every closed spherical curve C, then $f = \varphi(\kappa)\tau$, where $\varphi(\kappa)$ is an arbitrary function of κ. Reciprocally, if the function $f(\kappa, \tau)$ has the form $f = \varphi(\kappa)\tau$, then (1) holds for every closed spherical curve such that $\kappa^{-1} \neq 0$ at every point.

b) Given a function $\varphi(\kappa)$, if the relation

$$\int_C \varphi(\kappa)\tau\, ds = 0 \tag{2}$$

holds for every closed curve C on a given surface Σ, then Σ is either a plane or a sphere.

The curve C and the surface Σ are assumed of class C^3.

This theorem generalizes previous results of the author [4], B. Segre [8], P. Scherk [6], and G. Saban [3].

1. INTRODUCCION. — Según un resultado clásico de geometría diferencial, la torsión total de una curva esférica cerrada es nula, o sea,

$$\int_C \tau\, ds = 0 \tag{1.1}$$

siendo τ la torsión y s el arco de la curva esférica C. Ver por ejemplo, W. Fenchel [1]. Se supone que C tiene radio de curvatura distinto de cero en todo punto.

En un trabajo de 1935, [4], demostramos una especie de resultado inverso del anterior, a saber: "si una superficie es tal que la torsión total de todas sus curvas cerradas es igual a cero, la superficie es una parte de superficie esférica o de plano".

El teorema es de naturaleza local; por esto decimos una "parte" de superficie esférica, la cual naturalmente puede ser toda la esfera.

De este resultado se dieron posteriormente otras demostraciones, por ejemplo W. Scherrer [7], H. Geppert [2], A. Signorini [9], E. Vidal [10].

Un resultado de tipo análogo fue dado por B. Segre en 1947 [8], al demostrar que para las curvas esféricas cerradas vale también la relación

$$\int_C \frac{\tau}{\kappa}\, ds = 0 \tag{1.2}$$

siendo κ la curvatura y que, recíprocamente, si (1.2) vale para cualquier curva cerrada de una superficie, ésta es una parte de plano o de superficie esférica. Ver también P. Scherk [6].

El teorema de B. Segre fue generalizado en 1958 por G. Saban [3], al observar que (1.2) es un caso particular de la relación más general

$$\int_C \kappa^m \tau\, ds = 0 \tag{1.3}$$

con $m =$ número entero cualquiera (positivo, nulo o negativo), la cual vale también para cualquier curva esférica cerrada y el hecho de verificarse para toda curva cerrada de una superficie obliga a que ésta sea una parte de plano o de superficie esférica.

Aparece así de manera natural el siguiente problema:

"Hallar todas las funciones $f(\kappa, \tau)$ de la curvatura y torsión de una curva cerrada C, tal que para las curvas esféricas sea

$$\int_C f(\kappa, \tau)\, ds = 0\,. \tag{1.4}$$

Ver, entonces, si la relación (1.4), supuesta realizada para toda curva cerrada C de una superficie Σ, obliga a que Σ sea una parte de plano o de esfera".

La solución de este problema es el objeto del presente trabajo. El resultado está dado por el siguiente

TEOREMA. *Las únicas funciones* $f(\kappa, \tau)$ *para las cuales se cumple* (1.4) *para todas las curvas esféricas* C *son de la forma*

$$f = \varphi(\kappa)\tau \tag{1.5}$$

siendo $\varphi(\kappa)$ *una función arbitraria (tres veces diferenciable) de la curvatura* κ. *Recíprocamente, si* $f = \varphi(\kappa)\tau$, *la integral* (1.4) *es nula para toda curva esférica tal que* $\kappa^{-1} \neq 0$ *en todo punto.*

Inversamente, dada una función cualquiera $\varphi(\kappa)$, *si la condición* (1.4) *(siendo* $f = \varphi(\kappa)\tau$*) se cumple para cualquier curva cerrada de una superficie* Σ, *entonces* Σ *es una parte de plano o de superficie esférica.*

2. DEMOSTRACION DEL TEOREMA. — En un trabajo anterior, [5], obtuvimos unos resultados que necesitamos recordar.

Sea Σ una superficie y C una curva sobre la misma. Tanto Σ como C se suponen tres veces diferenciables. Sea κ la curvatura y τ la torsión de C. Sea s el arco de C y $\theta = \theta(s)$ el ángulo que forma en cada punto la normal principal de C con la normal a la superficie Σ. Si C es una curva cerrada, en [5, teor. 1] demostramos que la condición necesaria y suficiente para que la integral

$$I = \int f(\kappa, \tau)\, ds \tag{2.1}$$

tome un valor estacionario (o sea $\delta I = 0$) para deformaciones de C sobre Σ, es que se cumpla en cada punto de C la relación

$$A \operatorname{tg} \theta - B = 0 \tag{2.2}$$

siendo

$$\begin{aligned} A &= f''_{\kappa} + (\kappa^2 - \tau^2) f_{\kappa} + 2\kappa\tau f_{\tau} + 2\tau\left(\frac{f'_{\tau}}{\kappa}\right)' + \tau' \frac{f'_{\tau}}{\kappa} - \kappa f \\ B &= \left(\frac{f'_{\tau}}{\kappa}\right)'' + (\kappa f_{\tau})' - \frac{\tau^2}{\kappa} f'_{\tau} - 2\tau f'_{\kappa} - \tau' f_{\kappa} \end{aligned} \tag{2.3}$$

En estas expresiones los acentos indican derivadas totales respecto del arco s; por ejemplo la notación f'_κ indica df_κ/ds. Los subíndices indican derivadas parciales.

Si se quiere que sea $I = 0$ para toda curva C de Σ, la relación (2.2) debe satisfacer idénticamente para cualquier curva de Σ. Consideremos al caso en que Σ es una superficie esférica. Sin restringir la generalidad podemos suponer que el radio es la unidad. En este caso, para una curva contenida en Σ se tiene

$$\kappa = \frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \tau = \theta' \tag{2.4}$$

como resulta inmediatamente de fórmulas conocidas (ver, por ejemplo, las fórmulas (3.9) y (3.12) de [5]).

De (2.4) resulta

$$\begin{aligned}
\kappa' &= \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\,\theta' \\
\kappa'' &= \frac{1+\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^3\theta}\,\theta'^2 + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\,\theta'' \\
\kappa''' &= \frac{5\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^3\theta}{\cos^4\theta}\,\theta'^3 + 3\,\frac{1+\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^3\theta}\,\theta'\,\theta'' + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\,\theta'''
\end{aligned} \tag{2.5}$$

y también

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{\kappa^2-1}}{\kappa} \ , \quad \operatorname{tg}\theta = \sqrt{\kappa^2-1}\,. \tag{2.6}$$

Teniendo en cuenta (2.4) y (2.5) se calculan fácilmente las siguientes expresiones

$$f'_{\kappa} = f_{\kappa\kappa}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\theta' + f_{\kappa\tau}\theta'' ,$$

$$f'_{\tau} = f_{\tau\kappa}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\theta' + f_{\tau\tau}\theta'' ,$$

$$(2.7)\quad \begin{aligned} f''_{\kappa} &= f_{\kappa\kappa\kappa}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^4\theta}\theta'^2 + 2f_{\kappa\kappa\tau}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\theta'\theta'' + f_{\kappa\tau\tau}\theta''^2 \\ &+ f_{\kappa\kappa}\left(\frac{1+\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^3\theta}\theta'^2 + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\theta''\right) + f_{\kappa\tau}\theta''' ; \\ \frac{f'_{\tau}}{\kappa} &= f_{\tau\kappa}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\theta' + f_{\tau\tau}\cos\theta\,\theta'' , \\ \left(\frac{f'_{\tau}}{\kappa}\right)' &= f_{\tau\kappa\kappa}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^3\theta}\theta'^2 + 2f_{\tau\kappa\tau}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\theta'\theta'' \\ &+ f_{\tau\kappa}\frac{1}{\cos^2\theta}\theta'^2 + f_{\tau\kappa}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\theta'' + f_{\tau\tau\tau}\cos\theta\,\theta''^2 \\ &- f_{\tau\tau}\operatorname{sen}\theta\,\theta'\theta'' + f_{\tau\tau}\cos\theta\,\theta''' , \end{aligned}$$

y por tanto, sustituyendo en (2.3), resulta

$$(2.8)\quad \begin{aligned} A &= f_{\kappa\kappa\kappa}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^4\theta}\theta'^2 + 2f_{\kappa\kappa\tau}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\theta'\theta'' + f_{\kappa\tau\tau}\theta''^2 \\ &+ f_{\kappa\kappa}\left(\frac{1+\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^3\theta}\theta'^2 + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\theta''\right) + f_{\kappa\tau}\theta''' \\ &+ \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - \theta'^2\right)f_{\kappa} + \frac{2}{\cos\theta}f_{\tau}\theta' \end{aligned}$$

$$+\ 2 f_{\tau\kappa\kappa} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\cos^3 \theta} \theta'^3 + 4 f_{\tau\kappa\tau} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \theta'^2 \theta''$$

$$+\ 2 f_{\tau\kappa} \frac{1}{\cos^2 \theta} \theta'^3 + 3 f_{\tau\kappa} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \theta' \theta''$$

$$+\ 2 f_{\tau\tau\tau} \cos \theta\, \theta' \theta''^2 - 2 f_{\tau\tau} \operatorname{sen} \theta\, \theta'^2 \theta''$$

$$+\ 2 f_{\tau\tau} \cos \theta\, \theta' \theta''' + f_{\tau\tau} \cos \theta\, \theta''^2 - \frac{1}{\cos \theta} f\,.$$

En la expresión de B, según (2.3), aparece el término

$$\left(\frac{f'_\tau}{\kappa}\right)'' = f_{\tau\tau}\, \theta\, \theta^{IV} + \ldots \tag{2.9}$$

Por tanto, si (2.2) debe cumplirse para cualquier curva de la superficie esférica, o sea, para cualquier valor de θ^{IV}, debe ser

$$f_{\tau\tau} = 0\,. \tag{2.10}$$

Esta primera condición que debe cumplir la función f si queremos que se cumpla (1.4) para cualquier curva esférica cerrada, permite simplificar la expresión (2.8), resultando

$$\begin{aligned} A = {} & f_{\kappa\kappa\kappa} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\cos^4 \theta} \theta'^2 + 2 f_{\kappa\kappa\tau} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta} \theta' \theta'' + f_{\kappa\kappa} \Big(\frac{1 + \operatorname{sen}^2 \theta}{\cos^3 \theta} \theta'^2 + \\ & \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta} \theta'' \Big) + f_{\kappa\tau} \theta''' + f_\kappa \Big(\frac{1}{\cos^2 \theta} - \theta'^2 \Big) + 2 f_\tau \frac{1}{\cos \theta} \theta' \\ & + 2 f_{\tau\kappa\kappa} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\cos^3 \theta} \theta'^3 + 2 f_{\tau\kappa} \frac{1}{\cos^2 \theta} \theta'^3 \\ & + 3 f_{\kappa\tau} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \theta' \theta'' - \frac{1}{\cos \theta} f\,. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Teniendo en cuenta la relación (2.10), la última expresión (2.7) toma la forma

$$\text{(2.12)} \qquad \left(\frac{f'_\tau}{\kappa}\right)' = f_{\tau\kappa\kappa}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^3\theta}\,\theta'^2 + f_{\tau\kappa}\frac{1}{\cos^2\theta}\,\theta'^2 + f_{\kappa\tau}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,\theta''.$$

De aquí

$$\text{(2.13)} \qquad \left(\frac{f'_\tau}{\kappa}\right)'' = f_{\tau\kappa\kappa\kappa}\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{\cos^5\theta}\,\theta'^3 + f_{\tau\kappa\kappa}\frac{2\operatorname{sen}\theta\cos^4\theta + 3\operatorname{sen}^3\theta\cos^2\theta}{\cos^6\theta}\,\theta'^3$$

$$+\ 3 f_{\tau\kappa\kappa}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^3\theta}\,\theta'\,\theta'' + f_{\kappa\tau\kappa}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^4\theta}\,\theta'^3 +$$

$$+\ 2 f_{\kappa\tau}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta}\,\theta'^3 + 3 f_{\kappa\tau}\frac{1}{\cos^2\theta}\,\theta'\,\theta'' + f_{\kappa\tau}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,\theta'''.$$

Sustituyendo en la expresión (2.3) resulta (teniendo siempre en cuenta que suponemos ya satisfecha la condición (2.10)),

$$\text{(2.14)} \qquad B = f_{\tau\kappa\kappa\kappa}\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{\cos^5\theta}\,\theta'^3 + f_{\tau\kappa\kappa}\frac{2\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^3\theta}{\cos^4\theta}\,\theta'^3$$

$$+\ 3 f_{\tau\kappa\kappa}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^3\theta}\,\theta'\,\theta'' + f_{\tau\kappa\kappa}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^4\theta}\,\theta'^3$$

$$+\ 2 f_{\kappa\tau}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta}\,\theta'^3 + 3 f_{\kappa\tau}\frac{1}{\cos^2\theta}\,\theta'\,\theta'' + f_{\kappa\tau}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,\theta'''$$

$$+\ f_\tau\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\,\theta' + f_{\kappa\tau}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta}\,\theta' - f_{\kappa\tau}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,\theta'^3$$

$$-\ 2 f_{\kappa\kappa}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\,\theta'^2 - 2 f_{\kappa\tau}\,\theta'\,\theta'' - f_\kappa\,\theta''$$

Con estos valores (2.8) de A y (2.14) de B, sustituyendo en (2.2) resulta:

a. El coeficiente de θ''' se anula idénticamente, o sea, no da ninguna condición nueva para la función $f(\kappa,\tau)$.

b. El coeficiente de θ'', igualado a cero, da la ecuación

(2.15) $$f_{\kappa\kappa\tau}(\kappa^2 - 1)\,\kappa\,\tau - f_{\kappa\kappa}(\kappa^2 - 1)\,\kappa + f_{\kappa\tau}\,\tau - f_{\kappa} = 0\,.$$

Para integrar esta ecuación, pongamos

(2.16) $$\Phi = f_{\kappa\tau}\,\tau - f_{\kappa}\,,$$

con lo cual queda

$$\Phi_{\kappa}(\kappa^2 - 1)\,\kappa + \Phi = 0$$

Una integración inmediata da

$$\Phi = \frac{\psi(\tau)\,\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - 1}}$$

siendo $\psi(\tau)$ una función arbitraria.

Según (2.16) se tiene

(2.17) $$f_{\kappa\tau}\,\tau - f_{\kappa} = \frac{\psi(\tau)\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - 1}}\,.$$

Debiendo cumplirse la relación (2.10), derivando (2.17) respecto de τ, resulta $\psi'(\tau) = 0$ y por tanto $\psi = a =$ cte. Por consiguiente (2.17) se puede escribir

$$\left(f_{\tau}\,\tau - f\right)_{\kappa} = \frac{a\,\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - 1}}$$

de donde

(2.18) $$f_{\tau}\,\tau - f = a\sqrt{\kappa^2 - 1} + b\,.$$

En principio podría ser b una función de τ, pero igual que antes, derivando (2.18) respecto de τ y teniendo en cuenta (2.10) resulta b = constante.

A partir de (2.18), integrando primero la ecuación homogénea $f_\tau \tau - f = 0$ y luego la inhomogénea (2.18), resulta finalmente

$$f = \varphi(\kappa)\,\tau - a\sqrt{\kappa^2 - 1} - b \tag{2.19}$$

siendo $\varphi(\kappa)$ una función arbitraria.

c. Queda todavía por anular el término independiente de là ecuación (2.2) después de sustituir los valores (2.11) y (2.14) y poner $\theta' = \tau$, teniendo en cuenta los valores (2.4) y (2.6).

Este término independiente resulta ser

$$-\frac{a\,\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} + b\,\kappa\,.$$

Por tanto, para que se cumpla (2.2) idénticamente, debe ser

$$a = b = 0\,.$$

Queda así, según (2.19), que la forma de la función f debe ser

$$f = \varphi(\kappa)\,\tau \tag{2.20}$$

de acuerdo con el enunciado de la primera parte del teorema.

Recíprocamente, si $f = \varphi(\kappa)\,\tau$ y C es una curva esférica, con $\kappa^{-1} \neq 0$ en todo punto, según (2.4) es

$$I = \int_C \varphi(\kappa)\,\tau\,ds = \int_C \varphi\left(\frac{1}{\cos\theta}\right) d\theta = [F(\theta)]_C\,. \tag{2.21}$$

Si $\kappa^{-1} \neq 0$ en todo punto, el ángulo θ no puede pasar por el valor $\pi/2$; por tanto, después de recorrer la curva C, el ángulo θ vuelve al mismo valor de partida y la integral (2.21) toma el valor nulo..

De otra manera, siendo el valor de la integral (2.21) estacionario ($\delta I = 0$) por la manera como ha sido obtenida, su valor no variará al deformar la curva de manera continua sobre la superficie de la esfera que la contiene; puede, por tanto, deformarse hasta pasar a ser una curva plana, en cuyo caso es $\tau = 0$ y, en consecuencia, $I = 0$.

Falta probar que la condición de ser $I = 0$ para toda curva cerrada de una superficie Σ es característica de la superficie esférica (el plano incluído).

Para ello puede repetirse el razonamiento que dimos en [5] para el caso de ser $f = \tau$. Para toda curva esférica que no sea una circunferencia, la relación (2.2) determina en cada punto la dirección normal a la curva según la cual una deformación infinitesimal conserva estacionaria la integral I (es, precisamente, la dirección tangente a la esfera). Esta dirección normal, dada por ser $\operatorname{tg} \theta = B/A$, es única. Consideremos las curvas de intersección de la superficie Σ con esferas variables. Si las curvas de intersección son siempre planas, Σ es una esfera o un plano (o una parte de superficie esférica o de plano). Si alguna curva de la intersección no es plana, para esta curva habría dos franjas según las cuales podría desplazarse manteniendo estacionaria la integral I, a saber: la franja tangente a Σ y la franja tangente a la esfera por la cual se corta. Como ésto no es posible, resulta que la intersección debe ser siempre plana y, por tanto, Σ debe ser una parte de plano o de superficie esférica.

Hemos utilizado la propiedad de que si las secciones de una superficie Σ por cualquier esfera, son siempre curvas planas, Σ es una parte de esfera o de plano. La demostración es inmediata: en caso contrario, tomando 4 puntos no coplanares de Σ, la esfera que ellos determinan o bien coincide con Σ o bien corta a Σ según una curva no plana.

BIBLIOGRAFIA

[1] W. Fenchel, *Ueber einen Jacobischen Satz der Kurventheorie*, The Tohoku Mathem. Journal, 39, 1934, 95-97.

[2] H. Geppert, *Sopra una caratterizzazione della sfera*, Annali di Matematica, (4), 20, 1941, 59-66.

[3] G. Saban, *Nuove caratterizzazioni della sfera*, Rend. Acc. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fis. Mat. e Nat. 8, XXV, 1958, 457-464.

[4] L. A. Santaló, *Algunas propiedades de las curvas esféricas y una característica de la esfera*, Revista Mat. Hispano-Americana, 10, 1935, 1-4.

[5] L. A. Santaló, *Curvas sobre una superficie extremales de una función de la curvatura y de la torsión*, Abhandlungen aus dem Math. Sem. Univ. Hamburg, 20, 1956, 216-222.

[6] P. Scherk, *Intorno alle curve sferiche*, Boll. Un. Mat. Italiana, (3), 9, 1954, 38-40.

[7] W. Scherrer, *Eine Kennzeichnung der Kugel*, Vierteljahrschrift der naturforsch. Ges. Zürich, 85, Beiblatt 32, 1940, 40-46.

[8] B. Segre, *Una nuova caratterizzazione della sfera*, Rend. Acc. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 8, III, 1947, 420-422.

[9] A. Signorini, *Sopra una caratterizzazione della sfera*, Annali di Mat., (4), 20, 1941, 211-212.

[10] E. Vidal, *Algunas propiedades de las curvas esféricas*, Revista Mat. Hispano-Americana, (4), 4, 1944, 239-242.