



## LA DESIGUALDAD ISOPERIMETRICA

SOBRE

# LAS SUPERFICIES DE CURVATURA CONSTANTE NEGATIVA

POR L. A. SANTALO

(Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional del Litoral, Rosario)

1. *Introducción.* — En el plano, se llama « problema isoperimétrico » al que consiste en determinar, entre todas las curvas de longitud dada, aquella que encierra una mayor área. La solución, como es bien sabido, es la circunferencia.

Se han dado, efectivamente, muchas demostraciones de que la circunferencia es la curva que con una longitud dada encierra un área máxima <sup>(1)</sup>. Las primeras de ellas, algunas muy elementales y conocidas, eran incompletas por admitir sin demostración la existencia de la solución. Las demás demostraciones se pueden clasificar en dos tipos: unas basadas en los métodos del cálculo de variaciones <sup>(2)</sup> y otras de tipo geométrico, consistentes generalmente en demostrar ciertas « desigualdades isoperimétricas » que llevan como consecuencia la solución del problema sin necesidad de demostrar previamente la existencia de una figura maximante <sup>(3)</sup>.

El mismo problema ha sido tratado y resuelto para curvas situadas sobre la superficie esférica; también para ellas las circunferencias menores son las curvas que para una longitud dada encierran una mayor área <sup>(4)</sup>.

<sup>(1)</sup> Para historia y bibliografía sobre este problema se puede ver [5], [7], [9], [13]. Estos paréntesis cuadrados se refieren a la bibliografía al final.

<sup>(2)</sup> Ver [8], [11] p. 202.

<sup>(3)</sup> Ver [5], [7], [6] p. 26.

<sup>(4)</sup> Ver [2], [7] p. 80, [9] p. 113, [14].

En el caso de una superficie cualquiera el problema consistiría en determinar sobre la misma, entre todas las curvas cerradas de longitud dada que limitan una región simplemente conexa, aquellas para las cuales el área limitada es máxima. Por los métodos del cálculo de variaciones es fácil demostrar <sup>(5)</sup> que las curvas que cumplen esta condición deben tener la *curvatura geodésica constante*, pero queda abierta la cuestión de la existencia de estas curvas maximantes.

En esta Nota nos proponemos resolver el problema isoperimétrico sobre las superficies de curvatura constante y negativa, es decir, sobre las superficies pseudoesféricas. El método seguido no se basa en el cálculo de variaciones, sino que es enteramente geométrico y nos lleva además de a la desigualdad isoperimétrica fundamental (22) a otras desigualdades mejoradas como las (21), (26), (27), que aborran toda cuestión de existencia y resuelven al mismo tiempo la cuestión de la unicidad.

Con métodos completamente distintos otra demostración de la misma cuestión ha sido dada por E. Schmidt [17] de cuya desigualdad fundamental (31) damos en el número 8 una nueva demostración.

En el número 9 se dan unas condiciones suficientes para que una figura convexa C de área F y longitud L pueda estar contenida o pueda contener un círculo geodésico de radio R.

**2. Fórmula de Gauss-Bonnet y círculos geodésicos.** — Vamos a resumir en este número 2 algunos resultados conocidos que nos serán útiles en lo sucesivo.

Por simplicidad en las fórmulas supondremos que la superficie pseudoesférica tiene curvatura  $K = -1$ . Entonces la clásica fórmula de Gauss-Bonnet aplicada a un contorno cualquiera C que limite una porción de superficie simplemente conexa de área F, se escribe

$$\int_C \frac{ds}{\rho_g} = 2\pi + F \quad (1)$$

indicando  $\rho_g$  el radio de curvatura geodésica en cada punto del contorno,  $ds$  el elemento de arco del mismo y estando la integración extendida a todo el contorno C.

Si se trata de un polígono geodésico, o sea, de una curva cerrada

<sup>(5)</sup> Ver, por ejemplo, [4] p. 154, [10] t. III, p. 151, [11] p. 203.

formada por arcos de líneas geodésicas, llamando  $\omega_i$  a sus ángulos exteriores, la fórmula anterior se escribe

$$\sum \omega_i = 2\pi + F. \quad (2)$$

Sea P un punto de la superficie. Otro punto cualquiera se puede determinar por su distancia geodésica a P, es decir, por la longitud  $r$  del arco de geodésica que lo une con P <sup>(6)</sup> más el ángulo  $\varphi$  que esta geodésica forma con una dirección fija por P; se tiene de esta manera lo que se llama un sistema de coordenadas polares geodésicas. En este sistema el elemento de arco  $ds$  de la superficie se expresa por <sup>(7)</sup>

$$ds^2 = dr^2 + \text{sh}^2 r d\varphi^2 \quad (3)$$

Las curvas lugar geométrico de los puntos  $r = R = \text{cte.}$  se llaman *círculos geodésicos* de radio R y centro P. La longitud y el área de estos círculos geodésicos se obtienen fácilmente de (3) y valen

$$L_0 = 2\pi \text{sh} R, \quad F_0 = 4\pi \text{sh}^2 \frac{R}{2} = 2\pi (\text{ch} R - 1). \quad (4)$$

**3. Curvas convexas paralelas.** — Llamaremos *curva convexa* a toda curva cerrada C que limite una porción simplemente conexa de superficie pseudoesférica y que no pueda ser cortada por ninguna línea geodésica en más de dos puntos.

Consecuencia de esta definición es que las geodésicas tangentes a C, como ya tienen dos puntos comunes confundidos, no pueden volver a cortar a C y por tanto dejan toda la curva de un mismo lado. Se deduce de aquí que fijando sobre C un sentido de recorrido y considerando 3 geodésicas tangentes infinitamente próximas, la primera y la última tendrán el punto de contacto a un mismo lado de la segunda; por consiguiente el ángulo entre las geodésicas tangentes va variando siempre en el mismo sentido. Recordando la definición de curvatura geodésica como límite del cociente entre el ángulo de dos geodésicas tangentes a la curva y la longitud del arco que separa sus puntos de contacto, se deduce de lo dicho que *las curvas convexas tienen la curvatura geodésica de signo constante.* En particular si se trata

<sup>(6)</sup> Recuérdese que por dos puntos reales de una superficie de curvatura constante negativa pasa una sola geodésica. Ver por ej. [10] t. III, pág. 400.

<sup>(7)</sup> Ver por ej. [3] Vol. I, p. 335.

de un polígono geodésico convexo, los ángulos  $\omega_i$  que figuran en (2) serán todos del mismo signo.

Dada una figura convexa  $C$ , por cada uno de sus puntos tracemos un arco de geodésica normal de longitud constante  $R$  hacia el exterior de  $C$ . El lugar geométrico de los extremos de estos arcos se llama *curva paralela exterior* a distancia  $R$  de  $C$ . Si  $C$  tiene vértices, la curva paralela se cerrará mediante arcos de círculos geodésicos de radio  $R$  cuyos centros sean estos vértices. Queremos hallar el área de esta curva paralela.

Consideremos primero el caso de una curva convexa formada por un número finito de arcos de líneas geodésicas, es decir, un polígono geodésico convexo.

Sea  $A_i A_{i+1}$  un lado de este polígono. Por los puntos de este arco de geodésica  $A_i A_{i+1}$  tracemos geodésicas normales y sobre cada una de ellas tomemos la longitud constante  $R$  hacia la parte exterior del polígono (\*). Hagamos lo mismo para todos los lados del polígono. Por cada vértice  $A_i$  tendremos de esta manera dos arcos de geodésica  $A_i A'_i$ ,  $A_i A''_i$  de longitud  $R$ , los cuales forman entre sí un ángulo  $\omega_i$  igual al ángulo exterior correspondiente al vértice  $A_i$ . Los extremos de todos los arcos de geodésicas normales a  $A_i A_{i+1}$  forman los arcos  $A''_i A'_{i+1}$  que ya no son geodésicas pero que junto con los arcos de círculo geodésico  $A''_i A''_i$  de centró  $A_i$  y radio  $R$  forman la curva paralela exterior a distancia  $R$  del polígono dado.

El área de un sector de círculo geodésico de radio  $R$  y ángulo  $\omega_i$ , según (4), vale  $(\text{ch } R - 1) \omega_i$ , y por lo tanto el área de todos los sectores será  $(\text{ch } R - 1) \sum \omega_i$ , o bien, según (2)

$$(\text{ch } R - 1) (2\pi + F). \quad (5)$$

Quedan los cuadriláteros  $A_i A''_i A'_{i+1} A_{i+1}$ . Para calcular su área tomemos para cada lado  $A_i A_{i+1}$  un sistema de coordenadas curvilíneas formado por las geodésicas normales al mismo como líneas  $v = \text{cte.}$  y las curvas que unen los puntos de estas geodésicas que

(\*) Estos arcos de geodésica no se pueden cortar, puesto que es sabido que por un punto de una superficie pseudoesférica no pasa más que una geodésica normal a otra. Ello es una consecuencia de la fórmula (2), puesto que si pasaran dos geodésicas normales tendríamos un triángulo geodésico con dos ángulos exteriores iguales a  $\frac{\pi}{2}$  con lo cual, según (2), el tercer ángulo exterior tendría que ser superior a  $\pi$  lo cual es absurdo.

son equidistantes de  $A_i A_{i+1}$  como líneas  $u = \text{cte}$ . En un sistema de coordenadas de este tipo, es sabido <sup>(9)</sup> que el elemento de arco se expresa en la forma

$$ds^2 = du^2 + \text{ch}^2 u dv^2, \quad (6)$$

y por tanto el elemento de área vale  $df_i = \text{ch} u du dv$ . Llamando  $l_i$  a la longitud del arco  $A_i A_{i+1}$ , el área  $f_i$  del cuadrilátero  $A_i A''_i A'_i A_{i+1}$  valdrá por tanto

$$f_i = \int_0^{l_i} \int_0^n \text{ch} u du = l_i \cdot \text{sh} R. \quad (7)$$

Sumando esta expresión para todos los lados del polígono, se obtiene  $L \text{sh} R$ . El área comprendida entre el polígono geodésico dado y su paralelo exterior a distancia  $R$  valdrá esta suma  $L \text{sh} R$  más la expresión (5), y por tanto, añadiendo el área  $F$  del polígono primitivo, se tiene

$$F(R) = L \text{sh} R + (2\pi + F) (\text{ch} R - 1) + F. \quad (8)$$

Este es el valor del área limitada por la curva paralela exterior a distancia  $R$  de un polígono geodésico convexo de perímetro  $L$  y área  $F$ .

Supuesto ahora el caso general de una curva convexa  $C$  cualquiera, aproximando por polígonos geodésicos inscritos que tiendan a  $C$ , el área y longitud de los mismos tenderán al área y longitud de  $C$  y como las curvas paralelas a los polígonos inscritos tienden también a la curva paralela a  $C$ , resulta que la fórmula (8) es válida para cualquier curva convexa  $C$ .

**4. Una fórmula integral.** — Sea  $C$  una curva cualquiera de una superficie pseudo esférica. No es necesario que sea convexa: supondremos únicamente que tiene curvatura geodésica continua o que está formada por un número finito de arcos de esta naturaleza.

Cada punto  $P$  de la superficie pseudo esférica lo suponemos centro de un círculo geodésico de radio  $R$ . Sea  $dP$  el elemento de área correspondiente al punto  $P$  y  $n$  el número de puntos que el círculo geodé-

<sup>(9)</sup> Ver por ej. [3], Vol. I, pág. 333.

sico de centro P tiene comunes con la curva dada C. Queremos calcular la integral

$$I = \iint n dP \quad (9)$$

extendida la integración a todos los puntos P para los cuales es  $n \neq 0$ . Para ello vamos a expresar  $dP$  en un sistema de coordenadas curvilíneas conveniente.

Consideremos dos puntos A, B de la curva dada C distantes entre sí el elemento de arco  $ds$ . Por los puntos de este  $ds$  tracemos las geo-

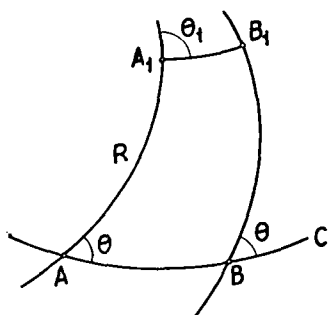


Fig. 1

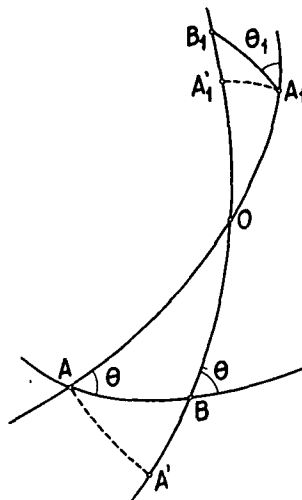


Fig. 2

désicas que forman con C un ángulo constante  $\theta$  y sobre estas geodésicas tomemos los arcos  $AA_1$ ,  $BB_1$  iguales a R. Llamando  $ds_1$  al arco  $A_1B_1$ , vamos a hallar una relación entre  $ds$ ,  $ds_1$  y el ángulo  $\theta$ .

Supongamos primero que los arcos  $AA_1$  y  $BB_1$  de longitud R no se cortan (fig. 1). Para la región  $AB B_1 A_1$ , tomando el arco  $AB$  de la curva C suficientemente pequeño, podemos definir un sistema regular de coordenadas curvilíneas formado por las geodésicas  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,... que forman con C el ángulo constante  $\theta$  como curvas  $u = \text{cte.}$  y las curvas obtenidas tomando sobre estas geodésicas arcos iguales a partir de los puntos de C como curvas  $v = \text{cte.}$  En este sistema de coordenadas curvilíneas el elemento de arco se expresará en la forma general

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Teniendo en cuenta que para  $u = \text{cte.}$  tomamos  $s = v$ , resulta  $G = 1$ . Además, para  $v = 0$  se tiene la curva  $C$  y por tanto  $E(u, 0) = 1$ . Según estos valores  $E$  y  $G$  será <sup>(10)</sup>

$$\cos \theta = F(u, 0) = \text{cte.} \quad (10)$$

Expresando que las líneas  $u = \text{cte.}$  son geodésicas se obtiene además la condición <sup>(11)</sup>

$$\frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

que junto con (10) nos dice que  $F$  es constante e igual a  $\cos \theta$ .

Llamamos  $\theta_1$  al ángulo que forma  $A_1B_1$  (o sea la línea  $v = R$ ) con  $AA_1$  es

$$\cos \theta_1 = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{E(u, R)}} \quad (11)$$

y además el arco  $ds_1 = A_1B_1$ , siendo  $u = s$  el arco de la curva  $C$  vale  $ds_1 = \sqrt{E(u, R)} ds$  y teniendo en cuenta (11) se deduce finalmente

$$ds_1 = \frac{\cos \theta}{\cos \theta_1} ds. \quad (12)$$

Esta demostración no sirve si los arcos de geodésicas  $AA_1$ ,  $BB_1$  de longitud  $R$  se cortan (fig. 2). En este caso teniendo en cuenta <sup>(6)</sup> que dos geodésicas no pueden cortarse en más de un punto  $O$ , podremos proceder de la manera siguiente. Tomemos  $O$  como origen de un sistema de coordenadas geodésicas polares. El elemento de arco se expresará en la forma (3). Por tanto siendo  $AA'$  y  $A_1A'_1$  arcos de círculo geodésico y llamando  $OA = r$ , será  $AA' = \text{sh } r d\varphi$ ,  $A_1A'_1 =$

<sup>(10)</sup> Recuérdese que el ángulo que forman entre sí las líneas coordenadas está dado por  $\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}$ .

<sup>(11)</sup> La ecuación diferencial de las líneas geodésicas es

$$(EG - F^2)(u'v'' - v'u'') + (Eu' + Fv') \left[ \left( F_u - \frac{1}{2} E_v \right) u'^2 + G_{uu'}v' + \frac{1}{2} G_{vv'}v'^2 \right] - (Fv' + Gv'') \left[ \frac{1}{2} E_u u'^2 + E_v u'v' + \left( F_v - \frac{1}{2} G_u \right) v'^2 \right].$$

Ver por ej. [4] pág. 175. Expresando que las líneas  $u = \text{cte.}$  satisfacen a esta ecuación y siendo además  $G = 1$ , se obtiene  $F_v = 0$ .

$\text{sh}(R - r) d\varphi$ . Además, llamando como antes  $ds$  al arco  $AB$  y  $ds_1$  al  $A_1B_1$  es

$$\text{sen } \theta = \frac{AA'}{AB} = \text{sh } r \frac{d\varphi}{ds}, \quad \text{sen } \theta_1 = \frac{A_1A_1'}{A_1B_1} = \text{sh}(R - r) \frac{d\varphi}{ds_1}$$

y también

$$\text{tg } \theta = \frac{AA'}{A'B} = \frac{\text{sh } r d\varphi}{dr}, \quad \text{tg } \theta_1 = \frac{A_1A_1'}{A_1'B_1} = \frac{\text{sh}(R - r) d\varphi}{dr}$$

De estas igualdades, dividiendo ordenadamente, se obtiene de nuevo (12) la cual, por tanto, queda demostrada en todos los casos.

Una vez establecida la relación (12) observemos que para fijar un punto  $P$  de la superficie que sea centro de un círculo geodésico de radio  $R$  que corta en el punto  $A$  a la curva fija  $C$ , podemos dar el punto  $A$ , por su abscisa curvilínea  $s$  sobre la curva  $C$ , y el ángulo  $\theta$  que el radio geodésico  $AP$  forma con  $C$ . El punto  $P$  quedará determinado por las coordenadas  $s, \theta$ . En estas coordenadas el elemento de área  $dP$  se expresará por el producto del elemento  $ds_1$  de la curva  $\theta = \text{cte.}$  por el elemento de arco del círculo  $s = \text{cte.}$  que según (3) vale  $\text{sh } R d\theta$  y por el seno del ángulo que forman ambos elementos, o sea por el coseno de su complementario que es  $\theta_1$ . Es decir

$$dP = \text{sh } R \cos \theta_1 d\theta ds_1,$$

o bien, según (12)

$$dP = \text{sh } R \cos \theta d\theta ds.$$

Como el elemento de área se considera siempre positivo, en esta fórmula hay que tomar  $\cos \theta$  en valor absoluto.

Si integramos esta expresión para todos los valores de  $s$  a lo largo de la curva  $C$  y para cada valor de  $s$  se hace girar  $\theta$  de  $0$  a  $2\pi$ , cada elemento  $dP$  vendrá contado tantas veces como puntos de intersección con  $C$  tenga el círculo geodésico de centro  $P$  y radio  $R$ . Llamando  $n$  a este número es, pues

$$\iint n dP = \text{sh } R \int_0^L ds \int_0^{2\pi} |\cos \theta| d\theta = 4L \text{sh } R,$$

siendo  $L$  la longitud de la curva  $C$ .

Queda de esta manera calculada la integral (9); su valor es

$$\iint n dP = 4L \text{sh } R. \quad (13)$$



Esta fórmula generaliza sobre las superficies pseudoesféricas un caso particular de la llamada fórmula de Poincaré de la Geometría Integral. Para el plano, la fórmula análoga ha sido demostrada en [6] página 23. Para la esfera en [6] página 81. Para el espacio euclidiano  $n$ -dimensional en [15].

5. *Propiedad isoperimétrica de los círculos geodésicos.* — Vamos a aplicar las fórmulas (8) y (13) a la obtención de la desigualdad isoperimétrica fundamental sobre las superficies pseudoesféricas.

Sea  $C$  una figura convexa de longitud  $L$  y área  $F$ . Sea  $R$  un valor tal que ningún círculo geodésico de radio  $R$  pueda estar contenido totalmente en el interior de  $C$  ni pueda contener a  $C$  totalmente en su interior. Todos los círculos geodésicos de radio  $R$  cuyo centro esté contenido en el área limitada por la curva paralela exterior a  $C$  a distancia  $R$  cortan a  $C$  y recíprocamente, todo círculo geodésico de radio  $R$  que corta a  $C$  tiene su centro en el área dicha, cuyo valor está dado por (8). Llamemos  $M_i$  al área llenada por los puntos  $P$  que son centros de círculos geodésicos de radio  $R$  que cortan a  $C$  en  $i$  puntos. La expresión (8) se puede escribir

$$M_2 + M_4 + M_6 + \dots = L \operatorname{sh} R + (2\pi + F) (\operatorname{ch} R - 1) + F \quad (14)$$

puesto que, siendo  $C$  una curva cerrada, los puntos  $P$  para los cuales  $i$  es impar no llenan ningún área.

Análogamente (13) se puede escribir

$$2M_2 + 4M_4 + 6M_6 + \dots = 4L \operatorname{sh} R. \quad (15)$$

De (14) y (15) se deduce

$$M_4 + 2M_6 + 3M_8 + \dots = L \operatorname{sh} R - F - (2\pi + F) (\operatorname{ch} R - 1) \quad (16)$$

y como el primer miembro de esta igualdad es esencialmente positivo por tratarse de una suma de áreas, resulta que, mientras  $R$  cumpla la condición mencionada de que ningún círculo geodésico de radio  $R$  pueda estar contenido en  $C$  ni contener a esta curva en su interior, se verifica

$$L \operatorname{sh} R - F - (2\pi + F) (\operatorname{ch} R - 1) \geq 0. \quad (17)$$

Teniendo en cuenta los valores  $L_0, F_0$  dados en (4) para la longitud y el área del círculo geodésico de radio  $R$ , esta desigualdad (17) se puede escribir

$$\frac{1}{2\pi} (LL_0 - FF_0) - (F + F_0) \geq 0. \quad (18)$$

Según (4) es inmediato comprobar que se realiza la identidad

$$L_0^2 - F_0^2 - 4\pi F_0 = 0 \quad (19)$$

teniendo en cuenta la cual, es fácil también comprobar que se verifica idénticamente la igualdad

$$\frac{1}{2\pi} (LL_0 - FF_0) - (F + F_0) = \frac{1}{4\pi} \{ (L^2 - F^2 - 4\pi F) + (F - F_0)^2 - (L - L_0)^2 \}. \quad (20)$$

Tomemos R de manera que el círculo geodésico de radio R tenga la misma área que la figura convexa dada C, es decir, de manera que sea  $F = F_0$ . Evidentemente este círculo de radio R no podrá estar contenido ni contener a C; por consiguiente es aplicable la desigualdad (18), que teniendo en cuenta (20) se puede escribir

$$L^2 - F^2 - 4\pi F \geq (L - L_0)^2, \quad (21)$$

o sea, con mayor razón,

$$L^2 - F^2 - 4\pi F \geq 0. \quad (22)$$

Esta es la *desigualdad isoperimétrica fundamental* sobre las superficies de curvatura constante igual a  $-1$ . Ella nos dice, en efecto, que dada el área F, el mínimo valor de L es  $\sqrt{F^2 + 4\pi F}$  valor que, según (19) es alcanzado por los círculos geodésicos. La desigualdad (21) es una forma « mejorada » de la desigualdad isoperimétrica.

**6. Otras desigualdades isoperimétricas.** — Falta demostrar que los círculos geodésicos son las *únicas* figuras para las cuales vale el signo de igualdad en (22). Ello resultará de manera inmediata de otras desigualdades que vamos a obtener, las cuales, lo mismo que (21), mejoran la desigualdad isoperimétrica fundamental (22).

Por brevedad representaremos por  $\Delta$  el primer miembro de la desigualdad (22), o sea el llamado *déficit isoperimétrico*. Es decir

$$\Delta = L^2 - F(4\pi + F). \quad (23)$$

Con esta notación es fácil comprobar que tiene lugar la siguiente identidad

$$L \operatorname{sh} R - F - (2\pi + F)(\operatorname{ch} R - 1) = \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{R}{2}}{F} \left\{ \Delta - \left( L - F \operatorname{coth} \frac{R}{2} \right)^2 \right\}, \quad (24)$$

y por consiguiente, según (17), será

$$\Delta \geq \left( L - F \coth \frac{R}{2} \right)^2.$$

Esta desigualdad, lo mismo que la (17), será válida para todo  $R$  tal que ningún círculo geodésico de radio  $R$  pueda estar contenido ni contener a  $C$ . En particular, para el máximo radio  $R_e$  de todos los círculos geodésicos que no pueden contener a  $C$  en su interior y para el mínimo radio  $R_i$  de todos los círculos geodésicos que no pueden estar contenidos en  $C$ , o sea

$$\Delta \geq \left( L - F \coth \frac{R_e}{2} \right)^2$$

$$\Delta \geq \left( F \coth \frac{R_i}{2} - L \right)^2.$$

De aquí, recordando que cualesquiera que sean  $x$  e  $y$  se verifica siempre

$$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2} (x + y)^2, \quad (25)$$

resulta

$$\Delta \geq \frac{1}{4} F^2 \left( \coth \frac{R_i}{2} - \coth \frac{R_e}{2} \right)^2. \quad (26)$$

Esta nueva desigualdad, como el segundo miembro es siempre  $\geq 0$ , contiene a la desigualdad isoperimétrica fundamental (22) y además es mejor que ella, puesto que en el segundo miembro en lugar de 0 figura una cantidad que en general es superior.

De (26) se deduce que únicamente será  $\Delta = 0$  cuando  $R_e = R_i$ , en cuyo caso la figura  $C$  debe coincidir con el círculo geodésico de este radio. Queda así demostrada la *unicidad*.

Otra desigualdad isoperimétrica, análoga a la (26), se puede obtener considerando, en lugar de la identidad (24), la siguiente identidad análoga, también de fácil comprobación,

$$L \operatorname{sh} R - F - (2\pi + F) (\operatorname{ch} R - 1) =$$

$$= \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{R}{2}}{4\pi + F} \left\{ \Delta - \left( (4\pi + F) \operatorname{tgh} \frac{R}{2} - L \right)^2 \right\},$$

de la cual, teniendo en cuenta (17), se deduce,

$$\Delta \geq \left( (4\pi + F) \operatorname{tgh} \frac{R}{2} - L \right)^2.$$

De la misma manera que antes esta desigualdad se verifica para todos los radios  $R$  de los círculos geodésicos que no pueden contener ni estar contenidos en  $C$ . En particular para sus valores extremos  $R_e$  y  $R_i$ . Por consiguiente

$$\begin{aligned} \Delta &\geq \left( (4\pi + F) \operatorname{tgh} \frac{R_e}{2} - L \right)^2 \\ \Delta &\geq \left( L - (4\pi + F) \operatorname{tgh} \frac{R_i}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

De aquí, sumando y teniendo en cuenta (25), se deduce la nueva desigualdad

$$\Delta \geq \frac{1}{4} (4\pi + F)^2 \left( \operatorname{tgh} \frac{R_e}{2} - \operatorname{tgh} \frac{R_i}{2} \right)^2, \quad (27)$$

la cual, lo mismo que (26), lleva consigo la unicidad del problema isoperimétrico, es decir, el hecho de que los círculos geodésicos son las únicas figuras para las cuales vale en (22) el signo de igualdad.

7. *Paso al caso del plano.* — Si la curvatura de la superficie pseudo-esférica considerada es  $K = -\frac{1}{a^2}$  en lugar de  $K = -1$ , las fórmulas anteriores subsisten con sólo observar que, por semejanza, las longitudes son proporcionales a  $a$  y las áreas a  $a^2$ . La desigualdad isoperimétrica fundamental (22) se escribirá, después de multiplicar los dos miembros por  $a^2$ ,

$$L^2 - \frac{F^2}{a^2} - 4\pi F \geq 0.$$

Las otras desigualdades (21), (26), (27), se escribirán análogamente. La (27) por ejemplo, después de multiplicar ambos miembros por  $a^2$  da

$$L^2 - \frac{F^2}{a^2} - 4\pi F \geq \frac{1}{4} \left( 4\pi + \frac{F}{a^2} \right)^2 \left( a \operatorname{tgh} \frac{R_e}{2a} - a \operatorname{tgh} \frac{R_i}{2a} \right)^2$$

que para  $a \rightarrow \infty$  nos da

$$L^2 - 4\pi F \geq \pi^2 (R_e - R_i)^2,$$

que es una desigualdad isoperimétrica clásica debida a Bonnesen [7] página 69, para las figuras planas convexas. En ella  $R_e$  es el mínimo radio de los círculos que contienen a  $C$  y  $R_i$  el máximo de los que están contenidos en la misma figura.

**8. La desigualdad isoperimétrica de E. Schmidt.** — Vamos a ver cómo de (17) se puede deducir la desigualdad isoperimétrica en la forma dada por E. Schmidt [17].

Sea  $\Gamma$  una geodésica de la superficie pseudo esférica. Trazando las geodésicas normales a  $\Gamma$  y llevando sobre cada una de ellas, a uno y otro lado de  $\Gamma$ , arcos de longitud constante  $R$ , se obtienen dos curvas llamadas *curvas de igual distancia respecto  $\Gamma$* . Si la curva convexa  $C$  está inscrita entre dos curvas de igual distancia  $R$  de una geodésica  $\Gamma$ , se dice que  $\Gamma$  es una *geodésica bisectora* <sup>(12)</sup> de  $C$  y que, respecto a ella, la *anchura* de  $C$  es  $2R$ . Todas las geodésicas bisectoras de un círculo geodésico de radio  $R$  pasan por su centro y respecto cualquiera de ellas la anchura es siempre igual a  $2R$ .

En lugar de la anchura  $2R$  tal como la hemos definido, introduzcamos un ángulo  $\alpha$  ligado a  $R$  por la relación <sup>(13)</sup>

$$R = -\log \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right). \quad (28)$$

<sup>(12)</sup> E. Schmidt en [17] se refiere a la representación de Poincaré de las superficies pseudo esféricas sobre el semiplano  $x > 0$ ; entonces en lugar de geodésicas habla de *rectas* del plano hiperbólico y a lo que llamamos geodésicas bisectoras las llama *Mittelgeraden*.

<sup>(13)</sup> Este ángulo  $\alpha$  que aquí aparece de manera artificial, en la memoria citada de Schmidt aparece como consecuencia de la representación plana utilizada de las superficies pseudo esféricas y se llama *ángulo de anchura* (*Breitenwinkel*). En la interpretación no euclídea de la geometría sobre las superficies de curvatura constante negativa (nº 8), este ángulo  $\alpha$  es igual al complemento del *ángulo de paralelismo* a distancia  $R$ . En efecto, el ángulo de paralelismo  $\beta$  está ligado a la distancia  $R$  por la fórmula

$$R = -\log \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$

Ver por ej. [3] t. I, pág. 621.

Según esto será

$$\operatorname{sh} R = \frac{1}{2} (e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = \operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{ch} R = \frac{1}{2} (e^{\alpha} + e^{-\alpha}) = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad (29)$$

con lo cual el área  $F_0$  y la longitud  $L_0$  de un círculo geodésico de radio  $R$  se expresarán por

$$\begin{aligned} L_0 &= 2\pi \operatorname{sh} R = 2\pi \operatorname{tg} \alpha \\ F_0 &= 2\pi (\operatorname{ch} R - 1) = 2\pi \left( \frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Si  $2R$  es una anchura de  $C$  respecto una geodésica bisectora cualquiera, evidentemente ningún círculo geodésico de radio  $R$  podrá contener ni estar contenido totalmente en  $C$ , y por tanto valdrá la desigualdad (17).

Sea  $\alpha'$  el valor de  $\alpha$  para el cual el valor de  $R$  correspondiente según (28) es el radio del círculo geodésico cuya longitud es igual a la de la curva convexa dada  $C$  y  $\alpha''$  el valor para el cual el círculo geodésico cuyo radio es el  $R$  correspondiente tiene la misma área  $F$  que  $C$ . Entonces, en (17), según (30), podremos poner

$$L = 2\pi \operatorname{tg} \alpha', \quad F = 2\pi \left( \frac{1}{\cos \alpha''} - 1 \right)$$

y sustituyendo además los valores (29) queda, después de simples transformaciones

$$\cos \alpha'' \geq \frac{\cos \alpha'}{\cos(\alpha - \alpha')}. \quad (31)$$

Esta es la forma dada por E. Schmidt ([17] pág. 206) a la desigualdad isoperimétrica. De ella se deduce, efectivamente, que  $\alpha'' \leq \alpha'$ , o sea, según (28)  $R'' \leq R'$ . Por consiguiente el radio del círculo geodésico de igual área que  $C$  es menor o igual que el radio del círculo geodésico de igual longitud; el área de  $C$  es por lo tanto siempre  $\leq$  que el área del círculo geodésico de la misma longitud, lo cual es la propiedad isoperimétrica.

**9. Condiciones suficientes para que una figura convexa  $C$  pueda estar contenida en el interior de un círculo geodésico de radio  $R$  (<sup>14</sup>). —** Sea  $C_0$

(<sup>14</sup>) Cuestiones análogas a las de este n° 9 para figuras planas han sido estudiadas por Hadwiger [12]. Para figuras sobre la superficie esférica, ver [16].

un círculo geodésico de radio  $R$  y representemos por  $L_0$  su longitud y por  $F_0$  su área, dados por (4). Hemos demostrado que si  $R$  es tal que ningún círculo geodésico de radio  $R$  puede estar contenido ni contener totalmente a  $C$ , se verifica (18). Por consiguiente, si esta desigualdad no se verifica, quiere decir que existe algún círculo geodésico  $C_0$  de radio  $R$  que, o bien está contenido íntegramente en el interior de  $C$ , o bien contiene a  $C$  en su interior.

Por consiguiente una condición *suficiente* (aunque no necesaria) para que exista algún círculo geodésico  $C_0$  de radio  $R$  que contiene o está contenido en  $C$ , es que se verifique la desigualdad inversa de la (18), a saber,

$$2\pi(F + F) - LL_0 + FF_0 > 0. \quad (32)$$

Esta condición tiene el inconveniente de que no permite saber si es la figura convexa  $C$  la que puede estar contenida en el interior de algún  $C_0$ , o si es que existe algún  $C_0$  que puede estar contenido en el interior de  $C$ . Vamos a distinguir estos dos casos, desdoblando la desigualdad (32).

Observemos que, según (22) y (19), se puede escribir

$$L^2 \geq F(4\pi + F), \quad L_0^2 = F_0(4\pi + F_0), \quad (33)$$

de donde

$$L^2 L_0^2 \geq FF_0(4\pi + F)(4\pi + F_0), \quad (34)$$

desigualdad que se verifica para toda figura convexa  $C$  (de área  $F$  y longitud  $L$ ) y para todo círculo geodésico  $C_0$  (de área  $F_0$  y longitud  $L_0$ ).

Consideremos ahora la desigualdad

$$LL_0 - F(4\pi + F_0) > \sqrt{L^2 L_0^2 - FF_0(4\pi + F)(4\pi + F_0)} \quad (35)$$

cuya cantidad subradical no puede ser negativa en virtud de (34).

Si (35) se cumple, es fácil comprobar, elevando al cuadrado y simplificando, que se cumplirá también (32) y por lo tanto una de las dos figuras,  $C$  o  $C_0$ , puede estar contenida en el interior de la otra.

Vamos a demostrar ahora que si se cumple (35) se verifica además que  $F < F_0$  con lo cual ya quedará dilucidado que la única posibilidad es que sea  $C$  la figura que puede estar contenida en el interior de un círculo geodésico  $C_0$ . En efecto, de (32), que es una consecuencia de (35), se deduce

$$LL_0 < 2\pi(F + F_0) + FF_0, \quad (36)$$

y según esta desigualdad, si fuera  $F \geq F_0$  sería con mayor razón  $LL_0 < (4\pi + F_0) F$  y por tanto (35) no se podría realizar, puesto que el segundo miembro es esencialmente positivo.

Sustituyendo  $L_0$  y  $F_0$  por sus valores (4) y recordando que

$$\operatorname{ch}^2 R - \operatorname{sh}^2 R = 1, \quad \frac{1 + \operatorname{ch} R}{\operatorname{sh} R} = \operatorname{coth} \frac{R}{2},$$

la desigualdad (35) se escribe, después de simples operaciones,

$$L - F \operatorname{coth} \frac{R}{2} > \sqrt{L^2 - F(4\pi + F)}. \quad (37)$$

Por consiguiente: *La desigualdad (37) es una condición suficiente (no necesaria) para que la figura convexa C de área F y longitud L pueda estar contenida totalmente en el interior de un círculo geodésico de radio R.*

De manera análoga se puede considerar la desigualdad

$$LL_0 - F_0(4\pi + F) > \sqrt{L^2 L_0^2 - FF_0(4\pi + F)(4\pi + F_0)} \quad (38)$$

que tiene como consecuencia (32) y además exige que sea  $F_0 < F$ ; en efecto, si fuera  $F_0 \geq F$  de (36) se deduciría  $LL_0 < (4\pi + F) F_0$  y por tanto el primer miembro de (38) sería negativo, lo cual no es posible. La condición (38) será, pues, una condición *suficiente* para afirmar que C puede contener totalmente en su interior a un círculo geodésico  $C_0$ .

Sustituyendo en (38) los valores de  $L_0$  y  $F_0$  dados en (4) y después de inmediatas transformaciones se obtiene

$$L - (4\pi + F) \operatorname{tgh} \frac{R}{2} > \sqrt{L^2 - F(4\pi + F)}. \quad (39)$$

Luego: *La condición (39) es una condición suficiente (si bien no necesaria) para que una figura convexa C de área F y longitud L pueda contener en su interior a un círculo geodésico de radio R.*

**10. Interpretación en geometría hiperbólica.** — Desde Beltrami [1] se sabe que la geometría sobre las superficies a curvatura constante negativa equivale a la geometría no euclidiana hiperbólica. Todo lo anterior puede, por tanto, interpretarse como relaciones establecidas entre las figuras convexas del plano hiperbólico. En particular, las desigualdades (22), (26), (27) expresan la propiedad isoperimétrica del círculo en la geometría plana no euclidiana hiperbólica o de Lobachewsky-Bolyai.



BIBLIOGRAFIA

- [1]. BELTRAMI, E., *Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea. Opere*, t. I, pág. 374.
- [2]. BERNSTEIN, F., *Ueber die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auf der Kugeloberfläche und in der Ebene. Mathematische Annalen*, t. 60, 1905.
- [3]. BIANCHI, L., *Lezioni di Geometria Differenziale*, N. Zanichelli, Bologna.
- [4]. BLASCHKE, W., *Differentialgeometrie I*, J. Springer, Berlin, 1930.
- [5]. BLASCHKE, W., *Kreis und Kugel*, Leipzig, 1916.
- [6]. BLASCHKE, W., *Vorlesungen über Integralgeometrie. Hamburg Mathematische Einzelschriften*, 20 Heft., 1936.
- [7]. BONNESEN, T., *Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes*, Gauthier-Villars, Paris, 1929.
- [8]. BONNESEN, T., *Quelques problèmes isopérimétriques. Acta Mathematica*, Bd. 48, 1926.
- [9]. BONNESEN, T. und FENCHEL, W., *Theorie der konvexen Körper*, J. Springer, Berlin, 1934.
- [10]. DARBOUX, G., *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. III.
- [11]. HADAMARD, J., *Leçons sur le calcul des variations*. Hermann, Paris, 1910.
- [12]. HADWIGER, H., *Ueberdeckung ebener Bereiche durch Kreise und Quadrate. Comm. Math. Helvetici*, 13, 1941.
- [13]. PORTER, TH. ISAAC, *A history of the classical isoperimetric problem, These submitted to the department of Mathematics of the University of Chicago, 1931-1932*, The University of Chicago Press.
- [14]. SANTALÓ, L. A., *Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo. Publicaciones del Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional del Litoral*, Vol. II, nº 3, Rosario, 1940.
- [15]. SANTALÓ, L. A., *A theorem and an inequality referring to rectifiable curves. American Journal of Mathematics*, vol. 63, 1941.
- [16]. SANTALÓ, L. A., *Algunos valores medios y desigualdades referentes a curvas situadas sobre la superficie esférica. Revista de la Unión Matemática Argentina*, vol. VIII, 1942.
- [17]. SCHMIDT, E., *Ueber die isoperimetrische Aufgabe im n-dimensionalen Raum konstanter negativer Krümmung. Mathematische Zeitschrift*, Bd. 46, 1940.