SOBRE LA CONICA OSCULATRIZ EN UN PUNTO ORDINARIO DE UNA CURVA PLANA

(Tema nº 29 - Vol. VII, p. 80)

Tomemos como eje x la tangente y como eje y la normal a la curva en el punto considerado. En un entorno de este punto la ecuación de la curva puede escribirse

$$y = \alpha x^2 + \beta x^3 + \gamma x^4 + \delta x^5 + \ldots \tag{1}$$

Para interpretar los coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ de manera intrínseca a la curva, vamos a calcular sus valores en función del radio de curvatura de la curva en el punto considerado y de sus derivadas sucesivas en el mismo punto.

De (1) se deduce que las derivadas sucesivas de y respecto x en el origen valen

$$y'_0 = 0, \qquad y''_0 = 2\alpha, \qquad y'''_0 = 6\beta, \qquad y^{IV}_0 = 24\gamma. \tag{2}$$

Por otra parte la fórmula clásica que da el radio de curvatura r permite escribir

$$r^2 y''^2 = (1 + y'^2)^3 \tag{3}$$

y también, derivando dos veces,

$$2\, r\, r'\, y''^2 + 2\, r^2\, y''\, y''' = 6\,(1 + y'^2)^2\, y'\, y'' \tag{4}$$

$$\begin{aligned} 2\, r'^2\, y''^2 + 2\, r\, r''\, y''^2 + 8\, r\, r'\, y''\, y''' + 2\, r^2\, y'''^2 + 2\, r^2\, y''\, y^{IV} \\ = 6\,(1 + y'^2)^2\, y''^2 + A\, y' \end{aligned} \tag{5}$$

indicando por A una expresión cuya forma explícita no interesa.

Tomando las expresiones (3), (4), (5) en el origen, para el cual valen las expresiones (2), se deduce

$$\alpha = \frac{1}{2r}, \qquad \beta = -\frac{r'}{6r^2}, \qquad \gamma = \frac{3 + 2r'^2 - r\, r''}{24\, r^3} \tag{5}$$

siendo r, r', r'' los valores del radio de curvatura y de sus dos primeras derivadas respecto la variable x en el origen.

Para que r' y r'' no dependan de los ejes coordenados elegidos conviene expresar estas derivadas, no respecto la variable x, sino respecto el arco s de la curva. Pero observando que es $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$ y que $y'_0 = 0$, se deduce fácilmente, haciendo el cambio de variables, que r', r'' toman en el origen los mismos valores tanto si las derivadas son respecto x como respecto el arco s. Supondremos, pues, que en (5) las derivadas son respecto el arco s y que, por tanto, tenemos los valores de α, β, γ en función de elementos intrínsecos de la curva.

Vamos a obtener ahora la ecuación de la cónica osculatriz a la currva (1). La ecuación general de una cónica tangente al eje x en el origen es:

$$y = L\,x^2 + 2\,M\,x\,y + N\,y^2. \tag{6}$$

Para hacer que esta cónica tenga con la curva (1) cinco puntos confundidos disponemos de los coeficientes L, M, N. Sustituyendo en (6) el desarrollo de y dado por (1) y ordenando se tiene

$$\begin{aligned}(\alpha - L)\,x^2 + (\beta - 2\,M\,\alpha)\,x^3 + (\gamma - 2\,M\,\beta - N\,\alpha^2)\,x^4 + \\ (\ldots)\,x^5 + \ldots = 0.\end{aligned} \tag{7}$$

Para que (6) sea la cónica osculatriz, los coeficientes L, M, N deben anular los 3 primeros coeficientes de este desarrollo (7) y por tanto tenemos 3 ecuaciones lineales que nos dan

$$L = \alpha, \qquad M = \frac{\beta}{2\alpha}, \qquad N = \frac{1}{\alpha^2}\left(\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}\right)$$

o bien, sustituyendo los valores (5),

$$L = \frac{1}{2r}, \qquad M = -\frac{r'}{6r}, \qquad N = \frac{9+2r'^2-3rr''}{18r}. \tag{8}$$

Tenemos así la ecuación de la cónica osculatriz (6) con los coeficientes, expresados por (8), dependientes de cantidades intrínsecas de la curva.

Para hallar el parámetro y la excentricidad de la cónica osculatriz (6) tenemos que hallar los semiejes a y b. El cálculo de los semiejes de una cónica dada por su ecuación (6) es un problema elemental de Geometría Analítica. Aplicando, por ejemplo, el método de los invariantes, se obtiene que entre los semiejes a, b y los coeficientes de (6) hay las relaciones:

$$a^2+b^2=\frac{L(L+N)}{4(MN-M^2)^2}, \qquad a^2 b^2=\frac{L^2}{16(LN-M^2)^3}. \tag{9}$$

Si $LN-M^2=0$, la cónica osculatriz (6) es una parábola, caso que estudiaremos después. Las ecuaciones (9) dan

$$\begin{aligned} a^2&=\frac{L(L+N)+L\sqrt{(L-N)^2+4M^2}}{8(LN-M^2)^2} \\ b^2&=\frac{L(L+N)-L\sqrt{(L-N)^2+4M^2}}{8(LN-M^2)^2}. \end{aligned} \tag{10}$$

La distancia focal c se deduce de

$$c^2=a^2-b^2=\frac{L\sqrt{(L-N)^2+4M^2}}{4(LN-M^2)^2}. \tag{11}$$

Conocidos los valores de a, b, c dados por (10), (11) se pueden escribir inmediatamente los valores del *parámetro* $p=\frac{b^2}{a}$ y de la *excentricidad* $e=\frac{c}{a}$ en función de los coeficientes L, M, N y por tanto, aplicando (8), en función del radio de curvatura r y sus dos primeras derivadas respecto el arco.

En el caso $LN-M^2=0$, en que la cónica (6) es una parábola, la excentricidad vale 1, y el parámetro se puede determinar, bien aplicando los invariantes como enseña la geometría analítica elemental, entre la ecuación (6) y la ecuación reducida $y^2=2px$, o bien escribiendo el valor del parámetro para el caso de elipse o hipérbola y hacer luego tender M^2 a LN. En ambos casos se obtiene sin dificultad

$$p=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{(L+N)^3}}.$$

De todo lo anterior se deducen algunas consecuencias notables:

a) Para que la cónica osculatriz sea un *círculo* debe ser en (6),

$$L = N, \quad M = 0$$

o sea, según (8), $r' = 0$, $r = \text{cte}$. Por tanto: excepto el caso trivial de los mismos círculos, no existen curvas planas cuyas cónicas osculatrices sean todas círculos.

b) Para que la cónica osculatriz (6) sea una parábola, debe ser $LN - M^2 = 0$, o sea, según (8),

$$9 + r'^2 - 3\,r\,r'' = 0 \tag{12}$$

Esta es, pues, la condición que debe cumplir el radio de curvatura de una curva y sus derivadas respecto el arco, para que la cónica osculatriz en el punto correspondiente sea una *parábola.*

c) Para que la cónica osculatriz (6) sea una hipérbola equilátera debe ser $L + N = 0$, o sea, según (8),

$$18 + 2\,r'^2 - 3\,r\,r'' = 0. \tag{13}$$

Esta es, por tanto, la condición que deben cumplir el radio de curvatura y sus derivadas respecto el arco en un punto de una curva, para que la cónica osculatriz en el mismo sea una *hipérbola equilátera.*

d) Análogamente, de (6) y (8) se deduce que la condición para que la cónica osculatriz en un punto sea una *elipse* es,

$$9 + r'^2 - 3\,r\,r'' > 0 \tag{14}$$

y para que sea una *hipérbola*

$$9 + r'^2 - 3\,r\,r'' < 0. \tag{15}$$

Estas condiciones (12), (13), (14), (15) se pueden enlazar con relaciones conocidas de la geometría diferencial afín de curvas planas.

En el tratado de Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie, II. Affine differentialgeometrie,* después de definir la *curvatura afín* de una curva plana en un punto, se encuentra para la misma la expresión (pág. 32)

$$k=p^3\left(p+\frac{d^2p}{d\tau^2}\right) \tag{16}$$

siendo $p=r^{-\frac{1}{3}}$ y τ el ángulo que forma la tangente a la curva con una dirección fija. Por tanto, es $ds=r\,d\tau$ y de aquí, a partir de (16), por simple cambio de variables, se obtiene como valor de la curvatura afín en función del radio de curvatura ordinario y sus derivadas respecto el arco ordinario, la expresión

$$k=\frac{9+r'^2-3rr''}{9r^{4/3}}. \tag{17}$$

Según esto, las condiciones a), c), d) anteriores equivalen al hecho conocido (Blaschke, loc. cit., pág. 27) de que la cónica osculatriz en un punto de una curva es una parábola, elipse o hipérbola, según que la curvatura afín en el mismo punto sea igual, mayor o menor que cero.

Además, las únicas curvas con curvatura afín nula en todo punto son las parábolas (Blaschke, loc. cit., p.ª 18) y por tanto: si la cónica osculatriz en todos los puntos de una curva es una parábola, la misma curva es una parábola. Por consiguiente, (12) será la ecuación intrínseca de las parábolas.

En cuanto al caso c) en que la cónica osculatriz es una hipérbola equilátera, observemos que si se verifica (13) para todos los puntos de una curva, la curvatura afín es constante. En efecto, de (13) y (17) se deduce

$$k=-\frac{9+r'^2}{9r^{4/3}},$$

y de aquí, derivando respecto el arco s y teniendo en cuenta (13),

$$\frac{dk}{ds}=\frac{(18+2r'^2-3rr'')r'}{6r^{7/3}}=0.$$

Se sabe que las curvas que tienen k constante son cónicas

(Blaschke, loc. cit., p. 18) y por tanto: si la cónica osculatriz a una curva es siempre una hipérbola equilátera, la misma curva es una hipérbola equilátera.

Según esto, la ecuación (13) será la ecuación intrínseca de las hipérbolas equiláteras.

Nota. — Agradezco al Prof. A. Terracini la indicación anterior de que la relación (12) podía relacionarse con la curvatura afín. Al mismo tiempo el Prof. Terracini nos ha indicado la elegante demostración sintética siguiente del hecho de que toda curva plana cuyas cónicas osculatrices son parábolas o hipérbolas equiláteras, es ella misma una de estas curvas, o bien, más generalmente: «No pueden las cónicas osculatrices de una curva C, consideradas como lugares o como envolventes, pertenecer a un mismo sistema lineal S, sin que la propia curva C se reduzca a una cónica de dicho sistema». Consideremos primero el caso de las cónicas como lugar; si reemplazamos el plano de la línea C por una superficie de Veronese representada sobre el mismo de manera que las secciones hiperplanas de la superficie tengan como imágenes las cónicas del plano, la curva C viene a ser la imágen de una curva C_1 de la superficie cuyos S_4 osculadores pasan todos por un punto fijo G, de forma que lo mismo ocurre, si es que dichos S_4 son distintos, para los S_3 y los S_2 osculadores y por tanto también para las rectas tangentes, lo que es manifiestamente imposible.

Esto explica porqué si las cónicas osculatrices son hipérbolas equiláteras, la propia curva es una hipérbola equilátera.

Por una razón análoga y dual, si las cónicas osculatrices, consideradas como envolventes, pertenecen a un sistema lineal, la curva es una cónica del mismo sistema, lo cual explica el caso en que todas las cónicas osculatrices sean parábolas.

Luis A. Santaló