SOBRE LA DISTRIBUCION DE PLANOS EN EL ESPACIO

por L. A. SANTALÓ

1. *Enunciado del teorema.* Derivado de un problema físico, Goudsmit ha estudiado el problema de hallar el valor medio del cuadrado del área de las regiones en que el plano queda dividido por rectas arbitrarias distribuídas de manera que el valor medio del área de dichas regiones valga la unidad (¹).

Desde el punto de vista matemático puede ofrecer interés considerar el problema análogo en el espacio. Esto es lo que vamos a hacer en la presente nota.

El problema y resultado obtenido se pueden enunciar de la siguiente manera:

Supuesto el espacio dividido por planos arbitrarios en regiones cuyo volumen v tenga por valor medio la unidad, el valor medio de v^2 vale $\frac{4}{3}\pi^2$.

La demostración dada por Goudsmit para el caso del plano no es fácil de generalizar al espacio. Con ligeras variantes puede, sin embargo, hacerse esta generalización, si bien el método resulta largo y las consideraciones de probabilidad que es preciso utilizar no del todo convincentes.

Por esta razón vamos a seguir un método completamente distinto, que puede aplicarse también en el caso del plano para obtener el resultado de Goudsmit y que, posiblemente, puede también ser generalizado a un espacio de cualquier número de dimensiones.

2. *Demostración.* Consideremos primero una esfera S de radio R y un número finito n de planos que la cortan.

(¹) S. GOUDSMIT, *Random distribution of lines in a plane,* Review of Modern Physics, vol. 17, pág. 321, 1945.

Supuestos los planos dados arbitrariamente, ellos dividirán a S en un cierto número de regiones. El *valor medio* de este número de regiones sabemos que vale (²)

$$<N> = \binom{n}{3} \frac{\pi^4 V}{M^3} + \binom{n}{2} \frac{\pi^3 F}{4M^2} + n + 1 \qquad (1)$$

siendo V el volumen, F el área y M la integral de curvatura media de S, o sea,

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad F = 4\pi R^2, \quad M = 4\pi R. \qquad (2)$$

El valor medio del volumen de estas regiones será

$$<v> = \frac{V}{<N>}$$

y para que se cumpla la condición de que valga 1 debe ser

$$R = \left[\binom{n}{3} \frac{\pi}{4^3} + \frac{3}{4} \binom{n}{2} \frac{\pi}{16} + \frac{3}{4\pi}(n+1) \right]^{1/3}. \qquad (3)$$

Recordemos que la medida del conjunto de planos que cortan a un cuerpo convexo cualquiera es igual a la integral de curvatura media del mismo (³). Por ejemplo, en los casos particulares de la esfera S y de un segmento de recta de longitud a, dicha medida vale, respectivamente,

$$\int_S dE = 4\pi R, \quad \int_a dE = \pi a \qquad (4)$$

siendo dE la «densidad de planos» y estando la primera integración extendida a todos los planos que cortan a S y la segunda a todos los que cortan al segmento.

(²) L. A. Santaló, *Valor medio del número de regiones en que un cuerpo del espacio es dividido por* n *planos arbitrarios*. Revista de la Unión Matemática Argentina, vol. 10, pág. 101, 1945.

(³) W. Blaschke, *Vorlesungen über Integralgeometrie*, Hamburger Mathemastische Einzelschriften, 1936 (pág. 66).

Consideremos dos puntos P_1 y P_2 interiores a S y sean dP_1, dP_2 los elementos de volumen correspondientes a los mismos.

Sean, además, $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$, n planos arbitrarios que cortan a S. Consideremos la integral múltiple

$$I = \int dP_1\, dP_2\, dE_1\, dE_2 \ldots dE_n \tag{5}$$

en la cual la integración está extendida, para cada plano E_i, a todas las posiciones en que corta a S pero no separa a los dos puntos P_1, P_2. La integración respecto estos puntos está extendida a todo el interior de S.

Fijando primero P_1 y P_2 y llamando a a la distancia entre los mismos, según (4) la integral de cada dE_i vale $(4\pi R - \pi a)$ y por tanto queda

$$I = \int (4\pi R - \pi a)^n\, dP_1\, dP_2. \tag{6}$$

Además, en un sistema de coordenadas polares de centro P_1. llamando $d\omega$ a la dirección del espacio según la cual se encuentra P_2, es $dP_2 = a^2\, da\, d\omega$. Fijada la dirección $d\omega$ y la distancia a, el elemento dP_1 puede entonces integrarse a todo el volumen común a la esfera S y a la que se obtiene por traslación de la misma de un segmento a. El volumen común a estas esferas vale

$$\frac{4}{3}\pi R^3 - \pi R^2 a + \frac{1}{12}\pi a^3. \tag{7}$$

Al hacer variar $d\omega$ a todas las direcciones este volumen no varía, de manera que la integral (6) queda reducida a la integral simple

$$I = \int_0^{2R} (4\pi R - \pi a)^4 \left(\frac{4}{3}\pi R^3 - \pi R^2 a + \frac{1}{12}\pi a^3\right) 4\pi\, a^2\, da. \tag{8}$$

Por otra parte, si en la primera expresión (5) de la integral I, para llevar a cabo la integración, se mantienen primero fijos los planos E_i', los puntos P_1, P_2 pueden entonces variar en el interior de cada una de las N regiones en que S es dividida por los planos. Llamando v_i $(i=1, 2, 3, \ldots, N)$ al volumen de estas regiones, es por tanto

$$I=\int (\sum_1^N v_i^2)\, dE_1\, dE_2 \ldots dE_n. \tag{9}$$

Siendo, por definición,

$$<v^2>_R=\frac{\int (\sum_1^N v_i^2)\, dE_1\, dE_2 \ldots dE_n}{<N>\int dE_1\, dE_2 \ldots dE_n} \tag{10}$$

donde $<v^2>_R$ indica el *valor medio del cuadrado* de v para el caso considerado de una esfera de radio R, teniendo en cuenta (4) y que el cociente $V/<N>$ vale 1, resulta

$$<v^2>_R=\frac{I}{(4\pi R)^n V}. \tag{11}$$

El problema se reduce por tanto a hallar el límite de este cociente cuando n y R, ligados por la relación (3), tienden a infinito, de manera que la esfera S pase a llenar todo el espacio.

Según (8) y (11) es

$$<v^2>_R=\int_0^{2R}\left(1-\frac{a}{4R}\right)^n\left(1-\frac{3}{4}\frac{a}{R}+\frac{1}{16}\frac{a^3}{R^3}\right) 4\pi\, a^2\, da. \tag{12}$$

Hagamos el cambio de variable

$$a=2Rt$$

con el cual la integral anterior queda

$$<v^2>_R=\int_0^1\left(1-\frac{t}{2}\right)^n\left(1-\frac{3}{2}\,t+\frac{1}{2}\,t^3\right) 32\pi\, R^3\, t^2\, dt \tag{13}$$

donde R está ligado con n por (3).

Observemos ahora que por integraciones por partes sucesivas se obtiene inmediatamente

$$\int_0^1 \left(1-\frac{t}{2}\right)^n t^2\,dt = \frac{16}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{A}{2^{n+1}}$$

$$\int_0^1 \left(1-\frac{t}{2}\right)^n t^3\,dt = \frac{32}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{B}{2^{n+1}}$$

$$\int_0^1 \left(1-\frac{t}{2}\right)^n t^5\,dt = \frac{128}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)} + \frac{C}{2^{n+1}}$$

siendo A, B, C factores cuya forma explícita no interesa, pero que tienden a 0 al crecer n infinitamente.

Teniendo en cuenta estos valores y sustituyendo R por su valor en función de n dado por (3), de (13) se deduce

$$<v^2> = \lim_{n\to\infty} <v^2>_R = \frac{4}{3}\,\pi^2 \qquad (14)$$

que es el resultado enunciado.

N o t a. — Obsérvese que si en lugar de suponer los planos dados arbitrariamente, se supone que se dan independientemente 3 haces de planos perpendiculares a 3 ejes coordenados rectangulares, siendo para cada haz los planos dados también arbitrariamente, pero de manera que su distancia media sea la unidad, el valor medio de v^2 que se obtiene en este *caso régular,* no coincide con el anterior del caso general.

Procediendo como Goudsmit para el plano, se encuentra inmediatamente que en el caso regular es

$$<v^2> = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty (\xi\,\eta\,\zeta)^2\, e^{-(\xi+\eta+\zeta)}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = 8$$

valor inferior al del caso general considerado.

BUENOS AIRES, *Seminario Matemático de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.*