VALOR MEDIO DEL NUMERO DE REGIONES EN QUE UN CUERPO DEL ESPACIO ES DIVIDIDO POR n PLANOS ARBITRARIOS

por L. A. SANTALÓ

En una nota anterior (1) hallamos el valor medio del número de partes en que una figura convexa del plano es dividida por n rectas arbitrarias.

Queremos ahora generalizar este resultado al caso de un cuerpo del espacio cortado por n planos arbitrarios. Supondremos que el cuerpo tenga la conexión de la esfera, pero sin necesidad de que sea convexo.

1. Recordemos primero unas fórmulas conocidas. Un plano E queda determinado en el espacio por su distancia p a un punto fijo y por la dirección de su normal; si por el centro de una esfera de radio unidad se traza un radio paralelo a dicha dirección normal, esta dirección puede quedar definida por el punto Ω en que dicho radio corta a la superficie de la esfera. Siendo $d\Omega$ el elemento de área de la esfera de radio unidad correspondiente al punto Ω, para medir conjuntos de planos del espacio se toma la integral, extendida al conjunto, de la forma diferencial

$$dE = dp\, d\Omega \tag{1}$$

que se llama *densidad de planos* (2).

Sea K el cuerpo considerado. Llamemos V a su volumen y F a su área. Necesitamos también el invariante M, que llamaremos *integral de la curvatura media* y cuyo significado en los diversos casos vamos a recordar. Si la superficie que limita K

(1) *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por n rectas arbitrarias*, Revista de la Unión Matemática Argentina, vol. VII, 1940-41.

(2) Ver, por ej., R. DELTHEIL, *Probabilités géométriques*, Gauthier-Villars, París, 1926, pág. 92, o también W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Integralgeometrie*, Hamburger Mathematische Einzelschriften, nº 20 y 22, 1936-37, pág. 66.

tiene curvatura continua, M se puede definir como la integral de su curvatura media:

$$M = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) d\sigma,$$

siendo R_1, R_2 los radios principales de curvatura correspondientes al elemento superficial $d\sigma$ y entendiendo la integración extendida a toda la superficie de K. Si K es un poliedro, llamando l_i a las longitudes de sus aristas y α_i al ángulo diedro interno correspondiente, es

$$M = \frac{1}{2}\Sigma l_i \alpha_i \qquad (2)$$

extendida la sumatoria a todas las aristas de K (M es, en este caso, la curvatura en las aristas o *Kantenkrümmung*, de Steiner) (³). Si K es un cuerpo convexo, M es la medida del conjunto de planos que tienen algún punto común con él; si K se reduce a una figura plana convexa de perímetro u, es $M = \frac{\pi}{2} u$, y por extensión a los cuerpos convexos del espacio, Cartan propuso de llamar perímetro de la superficie que limita K al producto $\frac{2}{\pi} M$ (⁴). En muchos otros casos, para hallar M, es cómodo hallar el valor $M(\varepsilon)$ del mismo invariante correspondiente al cuerpo paralelo exterior a distancia ε y determinar el límite de $M(\varepsilon)$ para $\varepsilon \to 0$. Supondremos que la superficie de K es tal que alguna de las definiciones anteriores para M es aplicable y, por tanto, que están perfectamente determinados los invariantes V, F, M.

Sea un plano arbitrario E del espacio. Sea f el área de la sección de E con K, u la longitud de la sección de E con la superficie de K y ν el número de contornos cerrados de que se compone la misma intersección de E con la superficie de K.

(³) Blaschke, *loc. cit.*, pág. 94.

(⁴) Ver Deltheil, *loc. cit.*, pág. 94, o bien Cartan, *Le principe de dualité et certaines integrales multiples de l'éspace tagentiel et de l'éspace réglé*, Bulletin de la Societé Mathématique de France, tomo 24, 1896, pág. 176.

Teniendo dE el valor (1) y estando las integraciones extendidas a todos los planos que cortan a K, son válidas las fórmulas siguientes [5]

$$\int f\,dE = 2\pi V, \qquad \int u\,dE = \frac{\pi^2}{2} F, \qquad \int \nu\,dE = M. \tag{3}$$

Además, fijada en el espacio una curva de longitud L y siendo n el número de puntos en que es cortada por el plano E en cada posición variable del mismo, se verifica también

$$\int n\,dE = \pi L \tag{4}$$

extendida la integración a todos los planos del espacio.

2. Pasemos ahora al problema enunciado. Sean $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$, n planos que cortan a K. Llamando R al número de regiones en que K queda dividido por estos n planos, el valor medio buscado es, por definición,

$$\bar{R} = \frac{\int R\,dE_1\,dE_2\,dE_3 \ldots dE_n}{\int dE_1\,dE_2\,dE_3 \ldots dE_n} \tag{5}$$

teniendo dE_h los valores correspondientes de la forma (1) y estando las integraciones extendidas a todos los planos que cortan a K.

La integral del denominador se calcula inmediatamente. Sea M_0 la integral de la curvatura media del cuerpo convexo mínimo que contiene a K, cuya superficie es la llamada *envoltura convexa mínima* de K. Como la integral de dE_h es igual a la medida de los planos que cortan a K y por tanto igual a la medida de los planos que cortan a su envoltura convexa mínima, se tiene

$$\int dE_1\,dE_2\,dE_3 \ldots dE_n = M_0{}^n. \tag{6}$$

Si K es convexo, es $M_0 = M$.

---

(5) Ver BLASCHKE, *loc. cit.*, págs. 70-73-74-100, o también DELTHEIL, *loc. cit.*, págs. 93-94.

Las posiciones de los planos en las cuales haya más de 3 pasando por un mismo punto, o más de 2 pasando por una misma recta, son posiciones excepcionales, de medida nula y, por tanto, se puede dejar de tenerlas en cuenta para el cálculo de la integral del numerador de (5).

Sea, pues, una posición de $E_1, E_2, E_3, \ldots E_n$ en la cual no pasan más de 3 por un mismo punto, ni más de 2 por una misma recta. Sea R el número de regiones en que los n planos, para esta posición particular, dividen a K. Cada una de estas regiones será un cuerpo de la conexión de la esfera. Los puntos de intersección interiores a K de 3 planos E_h o de dos planos y de la superficie de K, serán los *vértices* V de la descomposición de K en regiones; los segmentos de recta de intersección de dos E_h o los arcos de intersección de un E_h con la superficie de K, que unen dos vértices, serán las *aristas* A y las partes de planos E_h o de superficie de K limitadas por las aristas, serán las *caras* C de dicha descomposición de K en regiones por los planos E_h.

Se sabe entonces que formando las regiones R una variedad abierta de 3 dimensiones, vale la fórmula generalizada de Euler (6)

$$V - A + C - R = 1$$

de donde

$$R = V - A + C - 1. \tag{7}$$

Para aplicar esta fórmula hay que procurar que todas las caras C sean equivalentes topológicamente a un círculo. No hay duda que así será siempre para las caras interiores a K, por pro-

(6) Ver, por ej., O. VEBLEN, *Analysis Situs*, Colloquium Publications of the American Mathematical Society, vol. V, parte II, 2ª edición, 1931, pág. 82. También P. ALEXANDROFF - H. HOPF, *Topologie*, tomo I, Springer, Berlín, 1925, pág. 250. En estos lugares se encuentra únicamente la fórmula para variedades tridimensionales cerradas, en cuyo caso es $V - A + C - R = 0$. En el caso que necesitamos, siendo la superficie que limita a K de la conexión de la esfera, para convertir la variedad abierta en cerrada bastaría añadir una región que tuviese la misma superficie por contorno. Con ello no se modifican V, A, C y únicamente R aumenta en una unidad; aplicando entonces la fórmula para variedades cerradas se obtiene inmediatamente la correspondiente a variedades abiertas que nosotros necesitamos.

ceder de la intersección de planos E_h. En cambio las caras formadas sobre la superficie de K podrían no serlo; entonces añadimos sobre la superficie de K un número conveniente de *vértices auxiliares* V_a y *aristas auxiliares* A_a para descomponer las caras que no tuvieran la conexión del círculo en otras que la tengan. Esto se puede hacer siempre; bastará tomar puntos interiores a las caras que se deban descomponer y unirlos convenientemente con puntos de las aristas situadas sobre la superficie; de esta manera algunas aristas quedan descompuestas en dos, de las cuales solamente consideraremos una como arista auxiliar.

Los vértices V se clasifican de esta manera en tres clases: los V_i interiores a K, los V_s situados sobre la superficie y procedentes de la intersección de la superficie de K con la recta de intersección de dos planos E_h y los vértices auxiliares V_a. Indicando con las mismas letras el número de ellos de cada clase, será

$$V = V_i + V_s + V_a. \tag{8}$$

Las aristas A pueden también ser de tres clases: las interiores A_i, las contenidas en la superficie de K procedentes de las intersecciones de esta superficie con los planos E_h, que llamaremos A_s, y las auxiliares A_a. Observemos que por cada vértice interior pasan 6 aristas interiores y por cada vértice de la superficie, no auxiliar, pasa una sola arista interior; como de esta manera cada arista queda contada dos veces, será

$$A_i = {}^1/_2\,(6V_i + V_s). \tag{9}$$

Las caras C pueden ser también interiores C_i o bien situadas sobre la superficie, las cuales indicaremos con C_s. Para calcular el número de caras interiores, consideremos un plano determinado E_h. Sea ν_h el número de contornos cerrados de que se compone la intersección de K con E_h; v_{hi}, v_{hs} y v_{ha} los números de vértices respectivamente internos, de superficie y auxiliares contenidos en esta sección y a_{hi}, a_{hs}, a_{ha} los números análogos para las aristas; sea, además, c_h el número de caras contenidas en la misma sección de E_h con K. Por el mismo teorema de Euler citado, aplicado ahora a la sección plana de E_h con K, se tiene [7]

$$(v_{hi}+v_{hs}+v_{ha})-(a_{hi}+a_{hs}+a_{ha})+c_h=\nu_h. \tag{10}$$

Por tratarse de puntos sobre contornos cerrados y los arcos que ellos dividen, es $v_{hs}+v_{ha}=a_{hs}+a_{ha}$. Por tanto la fórmula anterior queda

$$v_{hi}-a_{hi}+c_h=\nu_h. \tag{11}$$

Sumando todas las igualdades análogas a ésta para los distintos planos $h=1,2,3,\ldots,n$, se tiene: cada vértice interno V_i, por pertenecer a 3 planos, habrá venido contado 3 veces y cada arista A_i por pertenecer a dos planos habrá venido contada 2 veces, por tanto

$$3V_i-2A_i+C_i=\sum_1^n \nu_h. \tag{12}$$

En cuanto a las caras C_s de la superficie, por el teorema de Euler sobre las superficies de la conexión de la esfera, es

$$(V_s+V_a)-(A_s+A_a)+C_s=2. \tag{13}$$

De estas igualdades (8), (9), (12), (13) y de (7), o sea,

$$R=(V_i+V_s+V_a)-(A_i+A_s+A_a)+(C_i+C_s)-1$$

se deduce

$$R=V_i+{}^1/_2\,V_s+\sum_1^n \nu_h+1. \tag{14}$$

3. Podemos pasar ahora a calcular la integral del numerador de (5), y con ello el valor medio buscado. Llamando N_{hjk} a una función que toma el valor 1 si los planos E_h, E_j, E_k se cortan en el interior de K y el valor 0 en caso contrario y llamando L_{hj} a la longitud de la parte de recta de intersección de E_h, E_j que es interior a K y F_h al área de la sección de E_h con K,

[7] VEBLEN, *loc. cit.*, pág. 54.

según (3) y (4) y con el significado de M_0 explicado para obtener (6), es

$$\int V_i\, dE_1\, dE_2 \ldots dE_n = \binom{n}{3} M_0^{n-3} \int N_{hjk}\, dE_h\, dE_j\, dE_k$$

$$= \binom{n}{3} M_0^{n-3}\, \pi \int L_{hj}\, dE_h\, dE_j = \binom{n}{3} M_0^{n-3}\, \pi \frac{\pi^2}{2} \int F_h\, dE_h$$

$$= \binom{n}{3} M_0^{n-3}\, \pi^4\, V. \tag{15}$$

De aquí: *Dados n planos arbitrarios que cortan a un cuerpo K equivalente topológicamente a una esfera, el valor medio del número de puntos de intersección de tres planos, que son interiores a K, es*

$$\overline{V_i} = \binom{n}{3} \pi^4 \frac{V}{M_0^3}, \tag{16}$$

siendo V el volumen de K y M_0 la integral de la curvatura media de su envoltura convexa mínima. Si K es un cuerpo convexo es $M_0 = M$.

4. Análogamente, sea N_{hk} una función que toma el valor 0 si la recta de intersección de los planos E_h, E_k no corta a K y es igual al número de puntos de intersección de esta recta con la superficie de K en caso contrario; sea, aedmás, L_h la longitud de la sección del plano E_h con K. Se tiene

$$\int V_s\, dE_1\, dE_2 \ldots dE_n = \binom{n}{2} M_0^{n-2} \int N_{hk}\, dE_h\, dE_k$$

$$= \binom{n}{2} M_0^{n-2}\, \pi \int L_h\, dE_h = \binom{n}{2} M_0^{n-2}\, \frac{\pi^3}{2} F. \tag{17}$$

De aquí: *Dados n planos que cortan a un cuerpo K equivalente topológicamente a una esfera, el valor medio del número* *de puntos en que sus rectas de intersección cortan a la superficie de K es*

$$\overline{V_s} = \binom{n}{2} \frac{\pi^3 F}{2M_0^2}. \tag{18}$$

5. Aplicando la tercera igualdad de (3) se tiene también

$$\int \sum_1^n \nu_h \, dE_1 \, dE_2 \ldots dE_n = M_0^{n-1} \sum_1^n \int \nu_h \, dE_h = M_0^{n-1} \, nM. \tag{19}$$

Con esta igualdad y las (17), (15) y (14) se tiene el valor medio buscado

$$\overline{R} = \binom{n}{3} \frac{\pi^4 V}{M_0^3} + \binom{n}{2} \frac{\pi^3 F}{4M_0^2} + n \frac{M}{M_0} + 1. \tag{20}$$

Luego: *Dados n planos arbitrarios que cortan a un cuerpo K equivalente topológicamente a una esfera, el valor medio del número de regiones en que K es dividido por los n planos está dado por* (20). V es el volumen, F el área y M la integral de la curvatura media de K. M_0 es la integral de la curvatura media de la envoltura convexa mínima de K y, por tanto, si K es convexo es $M = M_0$.

Si K degenera en una figura plana de área f, limitada por una curva simple de longitud u, es

$$V = 0, \quad F = 2f, \quad \mathrm{M} = \frac{\pi}{2} u, \quad M_0 = \frac{\pi}{2} u_0$$

llamando u_0 a la longitud de la envoltura convexa mínima de la curva plana K. Por tanto

$$\overline{R} = \binom{n}{2} \frac{2\pi f}{u_0^2} + n \frac{u}{u_0} + 1,$$

fórmula más general que la obtenida en el trabajo citado ([1]), y que coincide con ella cuando K es una figura plana convexa.

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD N. DEL LITORAL
Rosario, septiembre 1944.