UNAS PROPIEDADES DE LA REPRESENTACION CONFORME LOCAL DE UNA SUPERFICIE SOBRE OTRA

por L. A. SANTALÓ

SUMMARY. — Let P, P' be two corresponding points in a conformal correspondence (local) between two twice differentiable surfaces S, S' and let π, π' be the tangent planes at P, P' respetively. Let C be a variable curve on S through P and $Q \varepsilon \pi$ be its center of geodesic curvature. If C' is the transformed curve of C and $Q' \varepsilon \pi'$ is its center of geodesic curvature at P', then we prove the following theorem: the correspondence $Q \to Q'$ between π and π' is a projectivity.

As inmediate consequences we obtain, among other, the following properties: a) By a conformal correspondence between two sufaces S, S', the geodesic curves through a point P of S transform in curves whose centres of geodesic curvature at P' lie on a line; b) If more than a geodesic curve through P transform in a curve of null geodesic curvature at P', all geodesic curves through P transform in curves with the same property; c) The centers of geodesic curvature of all loxodromes of a surface of revolution through a point P, lie on a line.

When S' is a plane these theorems may have applications to cartography.

1. *Enunciado del teorema.* Consideremos una representación conforme de una superficie S sobre otra S' y sean P, P' dos puntos homólogos. El problema que vamos a estudiar es de naturaleza «local», es decir, consideramos únicamente la representación conforme entre dos entornos de los puntos P y P'. Sean π y π' los planos tangentes a ambas superficies en P y P' respectivamente. A cada curva C de S que pasa por P corresponde una curva C' de S' por P'; sea Q el centro de curvatura geodésica de C (que es un punto de π, ver por ej. Eisenhart [2, p. 246]) y Q' el centro de curvatura geodésica de C' que es un punto de π'.. Al variar C, siempre pasando por P, tenemos así definida una correspondencia entre los planos π y π'. Puesto

que cada punto Q de π es centro de curvatura geodésica de curvas de S que pasan por P y la transformación conforme es biunívoca, resulta que dicha correspondencia es también biunívoca y se extiende a todos los puntos de los planos π y π'. El teorema principal que vamos a demostrar es el siguiente:

La correspondencia $Q \rightarrow Q'$ entre los planos π y π' es una proyectividad.

De este teorema se deducen muchos corolarios, entre ellos algunos, como veremos, de posible interés en cartografía.

Para el caso de ser S y S' dos planos, el mismo problema fué ya considerado por nosotros en otro lugar [5].

2. *Demostración del teorema.* Sea $X = X(u, v)$ la ecuación vectorial de la superficie S, que suponemos dos veces diferenciable, referida a un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonal, o sea

$$X_u \, . \, X_v = 0. \tag{2.1}$$

Tomemos el punto P como punto $u = 0$, $v = 0$ y en su plano tangente π tomemos un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales ξ, η tal que el eje ξ tenga la dirección de X_u y el eje η la de X_v.

Consideremos la curva C que pasa por P dada por las ecuaciones paramétricas $u = u(t)$, $v = v(t)$. La dirección de su tangente en P es la del vector $X_u u' + X_v v'$ (las derivadas tomadas en P). El ángulo φ que forma la normal a esta tangente contenida en el plano π con el eje ξ cumple las condiciones

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= -\frac{(X_u u' + X_v v') \, . \, X_v}{|X_u u' + X_v v'| \, . \, |X_v|} = -\frac{\sqrt{G}\, v'}{\sqrt{E u'^2 + G v'^2}} \\ \operatorname{sen}\varphi &= \frac{(X_u u' + X_v v') \, . \, X_v}{|X_u u' + X_v v'| \, . \, |X_v|} = \frac{\sqrt{E}\, u'}{\sqrt{E u'^2 + G v'^2}} \end{aligned} \tag{2.2}$$

habiendo puesto, como es costumbre,

$$E = X_u^2, \qquad G = X_v^2. \tag{2.3}$$

Las coordenadas, en el sistema ξ, η, del punto Q, centro de curvatura geodésica de C en P, serán

$$(2.4) \qquad \xi = \rho_g \cos \varphi, \qquad \eta = \rho_g \operatorname{sen} \varphi$$

siendo ρ_g el radio de curvatura geodésica, o sea (ver Blaschke [1, p. 175]),

$$(2.5) \qquad \rho_g = \frac{\sqrt{EG}(Eu'^2 + Gv'^2)^{3/2}}{\Gamma}$$

siendo

$$(2.6) \qquad \Gamma = E\,G(u'\,v'' - v'\,u'') + \\ + E\,u'\,(-1/2\,E_v\,u'^2 + G_u\,u'\,v' + 1/2\,G_v\,v'^2) \\ - G\,v'(1/2\,E_u\,u'^2 + E_v\,u'\,v' - 1/2\,G_u\,v'^2).$$

Por tanto las coordenadas de Q resultan

$$(2.7) \qquad \xi = -\frac{G\sqrt{E}\,(E\,u'^2 + G\,v'^2)\,v'}{\Gamma}, \qquad \eta = \frac{E\sqrt{G}\,(E\,u'^2 + G\,v'^2)\,u'}{\Gamma}.$$

Dada una representación conforma entre S y S', siempre podemos hacer, por un cambio de parámetros conveniente, que los puntos homólogos correspondan a los mismos valores de u, v. Entonces, los coeficientes de las primeras formas fundamentales resultan proporcionales, o sea

$$(2.8) \qquad \frac{E'}{E} = \frac{G'}{G} = \alpha^2$$

y, además, las ecuaciones $u = u(t)$, $v = v(t)$ que definen la curva C serán las mismas que definen sobre S' la curva transformada C'. Por consiguiente el valor de la expresión (2. 6) para C'; poniendo $E' = \alpha^2 E$, $G' = \alpha^2 G$ en lugar de E, G y haciendo operaciones, resulta

$$(2.9) \qquad \Gamma' = \alpha^4\,\Gamma + (E\,u'^2 + G\,v'^2)\,(G\,v'\,\alpha_u - E\,u'\,\alpha_v)\,\alpha^3.$$

Las coordenadas del centro de curvatura geodésica Q' de la curva C' en el punto P', coordenadas sobre el plano tangente π', serán las mismas (2.7) después de sustituir E, G por E', G', o sea

$$\xi' = -\frac{\alpha^5 G\sqrt{E}\,(Eu'^2 + Gv'^2)v'}{\Gamma'}, \quad \eta' = \frac{\alpha^5 E\sqrt{G}\,(Eu'^2 + Gv'^2)u'}{\Gamma'}$$

que se pueden escribir

$$(2.10) \qquad \xi' = \frac{\alpha^2\,\xi}{\alpha - \frac{\alpha_u}{\sqrt{E}}\,\xi - \frac{\alpha_v}{\sqrt{G}}\,\eta}, \quad \eta' = \frac{\alpha^2\,\eta}{\alpha - \frac{\alpha_u}{\sqrt{E}}\,\xi - \frac{\alpha_v}{\sqrt{G}}\,\eta}.$$

Tanto las funciones α, E, G como las derivadas α_u, α_v deben tomarse en el punto P, es decir, son constantes al variar la curva C por P. Por tanto la correspondencia entre los puntos $Q(\xi, \eta)$ y $Q'(\xi', \eta')$, expresada por las ecuaciones (2.10) es una proyectividad, conforme al enunciado del teorema.

3. *Corolarios del teorema.* a) Supongamos tres curvas tangentes en el punto P y sean Q_1, Q_2, Q_3 sus centros de curvatura geodésica en P. Según el teorema principal, la razón anarmónica $(P\,Q_1\,Q_2\,Q_3)$ es invariante por transformaciones conformes, o sea, llamando $\rho_{g_i} = P\,Q_i$ y $\rho'_{g_i} = P'\,Q'_i$ $(i = 1, 2, 3)$ a los radios de curvatura geodésica y a sus transformados, es

$$\frac{\rho_{g2}(\rho_{g3} - \rho_{g1})}{\rho_{g3}(\rho_{g2} - \rho_{g1})} = \frac{\rho'_{g2}(\rho'_{g3} - \rho'_{g1})}{\rho'_{g3}(\rho'_{g2} - \rho'_{g1})}$$

o bien, introduciendo las curvaturas geodésicas $\varkappa_{g_i} = 1/\rho_{g_i}$, resulta, mas simplimente

$$\frac{\varkappa_{g1} - \varkappa_{g3}}{\varkappa_{g1} - \varkappa_{g3}} = \frac{\varkappa'_{g1} - \varkappa'_{g3}}{\varkappa'_{g1} - \varkappa'_{g2}}$$

Por consiguiente se tiene:

Dadas tres curvas de una superficie tangentes en un punto, *y siendo* $\varkappa_{g_i}$ *los valores de sus curvaturas geodésicas en el mismo, la razón*

$$\frac{\varkappa_{g_1}-\varkappa_{g_3}}{\varkappa_{g_1}-\varkappa_{g_2}}$$

es invariante por transformaciones conformes.

b) Puesto que en una proyectividad las rectas se transforman en rectas, una consecuencia inmediata del teorema es:

En una transformación conforme de S sobre S' las curvas de S que pasan por un punto P y tienen en él curvatura geodésica nula (por ejemplo las geodésicas o las secciones planas normales) se transforman en curvas cuyos centros de curvatura geodésica en P' están en línea recta.

En consecuencia:

De las curvas de S con $\varkappa_g=0$ en P, o bien hay una sola que se transforma en una curva con $\varkappa_g'=0$ en P' o bien todas se transforman en curvas con $\varkappa_g'=0$ en P'.

Por ejemplo, en la proyección Mercator por todo punto no perteneciente al ecuador pasa únicamente el meridiano como curva geodésica que se transforma en otra geodésica. En los puntos del ecuador, en cambio, todas las geodésicas de la esfera se transforman en curvas con $\varkappa_g'=0$, o sea, en curvas que tienen en el ecuador un punto de inflexión.

c) Consideremos curvas de S por P que tengan en este punto la misma curvatura geodésica $\varkappa_g$. El lugar geométrico de los centros de curvatura geodésica será una circunferencia de centro P y radio $\rho_g=1/\varkappa_g$. Por tanto, según el teorema principal, el lugar geométrico de los centros de curvatura geodésica de las curvas transformadas será una cónica. Vamos a demostrar, además, que esta cónica tiene un foco en P'.

En efecto, la ecuación de la misma en coordenadas polares de origen P' será $R^2=\xi'^2+\eta'^2$, o bien, según (2.10) y (2.4),

$$R=\frac{\alpha^2\rho_g}{\alpha-\left(\frac{\alpha_u}{\sqrt{E}}\cos\varphi+\frac{\alpha_v}{\sqrt{G}}\operatorname{sen}\varphi\right)\rho_g}. \tag{3.1}$$

Introduciendo el ángulo ϑ tal que

$$(3.2) \qquad \alpha_u = a\sqrt{E}\cos\vartheta, \quad \alpha_v = a\sqrt{G}\operatorname{sen}\vartheta, \quad a^2 = \frac{\alpha_u^2}{E} + \frac{\alpha_v^2}{G}$$

donde las funciones α_u, α_v, E, G están tomadas en el punto P, resulta

$$(3.3) \qquad R = \frac{\alpha\,\rho_g}{1 - \frac{a\rho_g}{\alpha}\cos(\vartheta - \varphi)}$$

que pone de manifiesto que la curva transformada es efectivamente una cónica de foco P' y excentricidad $a\,\rho_g/\alpha$.

Esta cónica será una elipse, hipérbola o parábola, según que la excentricidad sea menor, mayor o igual que uno, o sea, según que en el punto P se verifique

$$\left(\frac{\alpha_u^2}{E} + \frac{\alpha_v^2}{G}\right)\rho_g^2 \lesseqgtr \alpha^2.$$

Resulta así el siguiente teorema, generalización de un resultado de Ringleb [4] para la transformación conforme entre planos:

Por una transformación conforme cualquiera entre las superficies S y S', las curvas de S que pasan por un punto P y tienen en él la misma curvatura geodésica, se transforman en curvas cuyos centros de curvatura geodésica en el punto P' están sobre una cónica, la cual tiene a P' como foco.

d) La cónica anterior (3.3) será una circunferencia únicamente en el caso $a\rho_g = 0$, o sea, solamente en el caso en que, *en el punto P*, se verifique $a = 0$, o bien, según (3.2),

$$(3.4) \qquad \alpha_u = 0, \qquad \alpha_v = 0.$$

Por tanto, para que una transformación conforme transforme *en toda una región* curvas de curvatura geodésica constante en curvas de curvatura geodésica constante, debe verificarse $\alpha = \text{constante}$. De aquí:

Las únicas transformaciones entre dos superficies que transforman las curvas de curvatura geodésica constante en otras de curvatura geodésica constante son las semejanzas, entendiendo por tales aquellas transformaciones para las cuales se cumple

$$ds'^2 = \alpha^2 \, ds^2 \quad \text{con} \quad \alpha = \text{constante}.$$

En particular resulta el teorema conocido (Hlavaty [3, p. 227]): *Salvo las semejanzas, no existen transformaciones que sean conformes y geodésicas a la vez.*

4. *Una aplicación a las superficies de revolución.* Una superficie de revolución cuyo eje sea el eje z de un sistema cartesiano ortogonal tiene sus ecuaciones de la forma

$$x = g(z) \cos \varphi, \qquad y = g(z) \operatorname{sen} \varphi, \qquad z = z. \tag{4.1}$$

La representación de la misma sobre el plano ξ, η definida por las ecuaciones

$$\xi = \varphi, \quad \eta = \int_0^z \frac{\sqrt{1+g'^2}}{g} \, dz$$

es conforme y, además, transforma las loxodrómicas de la superficie en rectas del plano (ver, por ejemplo, Hlavaty [3, p. 176-177]).

La existencia de una representación conforme que transforma las loxodrómicas por un punto P en rectas del plano, o sea en geodésicas del mismo, nos prueba según el corolario $b)$ que:

En toda superficie de revolución, las loxodrómicas que pasan por un punto tienen los centros de curvatura geodésica correspondientes al mismo en línea recta.

De aquí, según el teorema principal:

Toda representación conforme de una superficie de revolución sobre otra superficie cualquiera, transforma las loxodrómicas que pasan por un punto P en curvas cuyos centros de curvatura geodésica en P' están en línea recta.

En particular, siendo la esfera una superficie de revolución el teorema es aplicable a cualquier mapa que represente la esfera sobre el plano conservando los ángulos.

BIBLIOGRAFIA

[1] W. Blaschke, *Vorl. über Differentialgeometrie I, Springer*, Berlin, 1930.

[2] L. P. Eisenhart, *An introduction to Differential Geometry*, Princeton University Press, 1940.

[3] V. Hlavaty, *Differentialgeometrie* (traducción de M. Pinl), P. Noordhoff, 1939, Groningen - Batavia.

[4] F. Ringleb, *Ueber das Verhalten der Krümmung ebener Kurven bei konformer Abbildung*, Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung, vol. 45, 1935, pág. 57.

[5] L. A. Santaló, *Un teorema sobre representación conforme*, Mathematicae Notae, Año V, págs. 29-40.

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Buenos Aires.

CRONICA

AGRUPACION RIOPLATENSE DE LOGICA Y FILOSOFIA CIENTIFICA

El 6 de octubre de 1956, un grupo de profesores universitarios se reunió en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, bajo la presidencia del Ing. José Babini, y resolvió fundar la Agrupación Rioplatense de Lógica y Filosofía Científica. Esta sociedad científica agrupará a los cultores y estudiosos de la lógica moderna y de la epistemología residentes en Argentina y Uruguay. La primera asamblea ordinaria de socios, realizada el 10 denoviembre, aprobó el estatuto de la sociedad, eligió sus autoridades, y formuló el plan de trabajo de la misma.

La finalidad de la A.R.L. y F.C. es contribuir al estudio, discusión y difusión de los siguientes temas: (I) lógica moderna y sus aplicacioens; (II) epistemología y fundamentación de las ciencias; (III) métodos científicos en filosofía. Para lograr estos fines, la Agrupación propenderá a: (I) vincular a los estudiosos de estas disciplinas; (II) estimular las investigaciones en estos campos, mediante la organización de seminarios, grupos de estudio, etc.; (III) difundir los conocimientos relacionados con estos temas median-