Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 27, 1974.

CURVAS Y CUATERNIONES

Luis A. Santaló

RESUMEN. Es bien sabido que las rotaciones alrededor de un punto, en E_3 , se representan biyectivamente por los puntos del espacio elíptico S_3. A una curva γ de S_3 corresponderá una familia de rotaciones dependientes de un parámetro. El objeto de esta nota es:

1° Calcular la curvatura y la torsión de la curva γ de S_3 en función del vector V (velocidad instantánea) de la rotación correspondiente de E_3 (fórmulas (4.15) y (4.18)).

2° Aplicar el resultado al caso de las "rotaciones de Frenet", o sea, a las rotaciones correspondientes al triedro de Frenet (T,N,B) de una curva de E_3. Resultan así los teoremas del final del trabajo.

1. INTRODUCCION: RESULTADOS CONOCIDOS.

Sea E_3 el espacio euclidiano de 3 dimensiones.

Un cuaternión es un número hipercomplejo

$$(1.1) \qquad a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

donde a_i son números reales (componentes del cuaternión) y las unidades i, j, k cumplen, para el producto, las relaciones

$$(1.2) \qquad i^2 = j^2 = k^2 = i\,j\,k = -1$$

de las cuales se deducen

$$(1.3) \qquad i = jk = -kj \quad , \quad j = ki = -ik \quad , \quad k = ij = -ji$$

de manera que los cuaterniones forman un álgebra asociativa, no conmutativa. La primera componente a_0 se llama la *componente escalar* y las a_1, a_2, a_3 las *componentes vectoriales*.

A todo cuaternión a asociamos el vector

$$(1.4) \qquad A = a_1 I + a_2 J + a_3 K$$

que tiene por componentes a_1, a_2, a_3 respecto de una terna de vectores ortonormales I, J, K. En todo lo que sigue las letras minúsculas (sin índices) indicarán cuaterniones y las mismas letras, mayúsculas, indicarán los vectores correspondientes. Recíprocamente, a todo vector (1.4) haremos corresponder el cuaternión "puro" (con la parte escalar nula) que tiene por componentes vectoriales las componentes del vector. Obsérvese que en esta correspondencia, a los cuaterniones unidad i, j, k, corresponden los vectores de la base I, J, K.

Representaremos por $a^* = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$ al cuaternión *conjugado* de a. La norma de un cuaternión es entonces

$$(1.5) \qquad N(a) = aa^* = a^*a = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

y el inverso de a , es

$$(1.6) \qquad a^{-1} = \frac{a^*}{N(a)}$$

Se observa que es

$$(1.7) \qquad N(ab) = (ab)(ab)^* = abb^*a^* = N(a)N(b)$$

Para un cuaternión puro es

$$(1.8) \qquad u^* = -u \quad , \quad N(u) = u(-u) = -u^2$$

y si es de norma unidad, se cumple

$$(1.9) \qquad u^2 = -1$$

Es bien sabido que una rotación $X \rightarrow X'$ en E_3 alrededor del origen, se puede representar mediante cuaterniones por la expresión

$$(1.10) \qquad x' = q^*xq = q^{-1}xq$$

donde x es el cuaternión puro correspondiente al vector X y q es un cuaternión de norma unidad.

El cuaternión -q representa evidentemente la misma rotación. Como dar q equivale a dar sus componentes q_i , que por ser q de norma unidad satisfacen la relación $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$, resulta que a todo punto de la esfera unidad de E_4 corresponde una rotación de E_3 y a puntos diametralmente opuestos corresponde la misma rotación. Se puede demostrar fácilmente que esta correspondencia es biyectiva y como la esfera unidad de E_4, con los puntos diametralmente opuestos identificados, es el espacio proyectivo P_3, se puede enunciar:

Las rotaciones de E_3 alrededor de un punto, están en correspondencia biyectiva con los puntos del espacio proyectivo P_3. Más exactamente, este espacio P_3 es el espacio del grupo de las rotaciones de E_3 alrededor de un punto.

En el espacio proyectivo P_3 se puede introducir la distancia ϕ entre dos puntos a, b por la fórmula

$$(1.11)\quad \cos\phi = \frac{1}{2}(a^*b + b^*a) = \langle a,b\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

El espacio proyectivo P_3 con esta métrica se llama el *espacio elíptico* S_3.

Tenemos así una correspondencia biyectiva entre las rotaciones de E_3 alrededor de un punto y los puntos de S_3. A una familia de rotaciones dependientes de un parámetro corresponderá una curva de S_3. Nuestro objeto es estudiar esta correspondencia.

Para ello necesitaremos algunas fórmulas que vinculan los vectores de E_3 con los cuaterniones (que son los puntos de S_3).
Se introduce la notación

$$(1.12)\qquad \langle a,b\rangle = \frac{1}{2}(a^*b + b^*a) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

y dos puntos se llaman *conjugados* (ortogonales) si su distancia es $\pi/2$, o sea

$$(1.13)\qquad \langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle = 0$$

Si a,b son cuaterniones puros, es

$$(1.14)\qquad \langle a,b\rangle = A.B$$

donde A.B indica el producto escalar de vectores de E_3.

Entre 3 vectores A, B, C de E_3 y sus correspondientes cuaterniones puros a, b, c se puede comprobar la relación

$$(1.15)\qquad (A\ B\ C) = \frac{1}{2}(cba - abc)$$

donde (A B C) es el producto mixto $(A \wedge B).C$, o sea, el determinan

te 3x3 formado por las componentes de los vectores A,B,C.
Si $[a,b,c,d]$ representa el determinante formado por las componentes de los 4 cuaterniones a, b, c, d vale

$$(1.16) \qquad [a,b,c,d] = \frac{1}{4}\,(cb^*ad^* + da^*bc^* - ab^*cd^* - dc^*ba^*)$$

2. CURVAS EN S_3.

Sea $q = q^0(t)$ la curva representada por el cuaternión q^0 de norma unidad (punto de S_3). Sus ecuaciones paramétricas son $q_i^0 = q_i^0(t)$, funciones que supondremos de clase C^3.
A cada punto q^0 de la curva consideramos unido un tetraedro autoconjugado q^i $(i=0,1,2,3)$, o sea,

$$(2.1) \qquad \langle q^i, q^j \rangle = \delta_{ij}$$

De estas condiciones se deduce que $[q^0q^1q^2q^3]^2 = 1$ y por tanto $[q^0q^1q^2q^3] = \pm 1$. Supondremos siempre que

$$(2.2) \qquad [q^0q^1q^2q^3] = +1$$

Por un desplazamiento elemental es

$$(2.3) \qquad dq^i = \sum_{h=0}^{3} \omega^i{}_h\, q^h \quad , \quad i=0,1,2,3$$

A partir de (2.1) se deduce

$$(2.4) \qquad \omega^i{}_i = 0 \quad , \quad \omega^i{}_j + \omega^j{}_i = 0$$

Tomando q^1 sobre la tangente en el punto q^0 es $\omega^0{}_2 = 0$ y tomando q^2 sobre el plano osculador es $\omega^0{}_3 = \omega^1{}_3 = 0$, con lo cual queda

$$(2.5) \qquad \begin{aligned} dq^0 &= \omega^0{}_1 q^1 \\ dq^1 &= -\omega^0{}_1 q^0 + \omega^1{}_2 q^2 \\ dq^2 &= -\omega^1{}_2 q^1 + \omega^2{}_3 q^3 \\ dq^3 &= -\omega^2{}_3 q^2 \end{aligned}$$

que son las *fórmulas de Frenet* para las curvas del espacio elíptico S_3.

Para futuros usos, conviene calcular q^1, q^2, q^3 en función de $q^0 = q$. Se tiene, por ser q de norma unidad

$$(2.6) \qquad q^0 = q \quad , \quad \langle q,q \rangle = q^*q = qq^* = 1 \quad , \quad \langle q,q' \rangle = 0$$

$$(2.7) \qquad q^1 = \frac{q'}{\sqrt{\langle q',q' \rangle}}$$

De aquí

$$(2.8) \qquad q^{1\prime} = \frac{\langle q',q' \rangle \, q'' - \langle q',q'' \rangle \, q'}{\langle q',q' \rangle^{3/2}}$$

Para hallar q^2 procederemos por coeficientes indeterminados, poniendo

$$(2.9) \qquad q'' = \lambda q^0 + \mu q^1 + \nu q^2$$

de donde, dadas las condiciones de ortonormalidad (2.1), resulta

$$(2.10) \qquad \lambda = \langle q'',q \rangle \quad , \quad \mu = \langle q'',q^1 \rangle = \frac{\langle q',q'' \rangle}{\langle q',q' \rangle^{1/2}}$$

y por tanto

$$(2.11) \qquad q^2 = \frac{1}{\nu} \left(q'' - \langle q'',q \rangle \, q - \frac{\langle q',q'' \rangle}{\langle q',q' \rangle} q' \right)$$

El coeficiente ν se determina por ser q^2 de norma unidad, resultando

$$(2.12) \qquad \nu^2 = \langle q'',q'' \rangle - \langle q,q'' \rangle^2 - \frac{\langle q',q'' \rangle^2}{\langle q',q' \rangle}$$

La expresión de q^3 es más complicada y no la vamos a necesitar.

3. LA CURVATURA Y LA TORSION DE UNA CURVA DE S_3.

A partir de las fórmulas de Frenet (2.5) se introducen las siguientes definiciones

$$(3.1) \qquad \omega^0{}_1 = ds = \text{elemento de arco} = \langle q',q'\rangle^{1/2}\, dt$$

$$(3.2) \qquad \frac{\omega^1{}_2}{\omega^0{}_1} = k = \text{curvatura}$$

$$(3.3) \qquad \frac{\omega^2{}_3}{\omega^0{}_1} = w = \text{torsión}$$

Para calcular k a partir de la curva $q = q(t) = q^0(t)$, se observa que a partir de (2.5) se deduce

$$(3.4) \qquad \omega^1{}_2 = \langle dq^1,q^2\rangle = \langle q^{1\prime},q^2\rangle\, dt =$$

$$= \frac{1}{\nu}\left[\frac{\langle q',q'\rangle\langle q'',q''\rangle - \langle q',q''\rangle^2 - \langle q',q'\rangle\langle q'',q\rangle^2}{\langle q',q'\rangle^{3/2}}\right] =$$

$$= \left[\frac{\langle q',q'\rangle\langle q'',q''\rangle - \langle q',q'\rangle\langle q,q''\rangle^2 - \langle q',q''\rangle^2}{\langle q',q'\rangle^2}\right]^{1/2}$$

y por tanto

$$(3.5) \qquad k^2 = \frac{\langle q',q'\rangle\langle q'',q''\rangle - \langle q',q'\rangle\langle q,q''\rangle^2 - \langle q',q''\rangle^2}{\langle q',q'\rangle^3}$$

Teniendo en cuenta que

$$\langle q,q'\rangle = 0 \quad , \quad \langle q,q''\rangle + \langle q',q'\rangle = 0 \quad , \quad \langle q,q''\rangle = -\langle q',q'\rangle$$

se puede escribir también

$$(3.6) \qquad k^2 = \frac{\langle q',q'\rangle\langle q'',q''\rangle - \langle q',q''\rangle^2}{\langle q',q'\rangle^3} - 1$$

Comparando (3.5) con (2.12) resulta

$$(3.7) \qquad \nu^2 = \langle q',q'\rangle^2\, k^2$$

Para el cálculo de w procederemos de manera indirecta. Sabemos que es

$$q' = \langle q',q'\rangle^{1/2}\, q^1 \quad , \quad q'' = \lambda q^0 + \mu q^1 + \nu q^2$$

y pongamos $q''' = (..)\, q^0 + (..)\, q^1 + (..)\, q^2 + \eta q^3$, donde los valores de los paréntesis no interesan. Por ser el determinante $[q^0 q^1 q^2 q^3] = 1$, será

$$(3.8) \qquad [q\ q'\ q''\ q'''] = \langle q',q'\rangle^{1/2}\ \nu\ \eta$$

El valor de ν está dado por (3.7). Para hallar η observemos que es $\langle q'',q^3\rangle = 0$ y también

$$(3.9) \qquad \eta = \langle q''',q^3\rangle = \langle (\lambda q^0+\mu q^1+\nu q^2)',q^3\rangle = \nu\langle q^{2\prime},q^3\rangle$$

puesto que $\langle q^{1\prime},q^3\rangle = 0$ por tener $q^{1\prime}$ solamente componentes según q, q^1, q^2.

Por otra parte se tiene

$$(3.10) \qquad w = \frac{\omega^2{}_3}{\omega^0{}_1} = \frac{\langle q^{2\prime},q^3\rangle}{\langle q',q'\rangle^{1/2}} = \frac{\eta}{\nu\langle q',q'\rangle^{1/2}}$$

y comparando con (3.8) y aplicando (3.7) resulta

$$(3.11) \qquad k^2\ w = \frac{[q\ q'\ q''\ q''']}{\langle q',q'\rangle^3}$$

que, puesto que ya se conoce k, nos da el valor buscado de w en función de q y sus derivadas.

4. RELACIONES ENTRE LAS CURVAS DE S_3 Y LAS FAMILIAS DE ROTACIONES EN E_3.

Una rotación en E_3 alrededor del origen, se puede considerar definida por la posición de la terna ortonormal de vectores (E^1, E^2, E^3) transformada, por la rotación dada, de la base inicial I, J, K. Por la rotación definida por el cuaternión $q = q^0$, los vectores E^i son los correspondientes a los cuaterniones

$$(4.1) \qquad e^1 = q^*\ i\ q \quad , \quad e^2 = q^*\ j\ q \quad , \quad e^3 = q^*\ k\ q$$

o sea,

$$
\begin{aligned}
e^1 &= (q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2)i + 2(q_1q_2-q_0q_3)j + 2(q_1q_3+q_0q_2)k \\
e^2 &= 2(q_0q_3+q_1q_2)i + (q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2)j + 2(q_2q_3-q_0q_1)k \qquad (4.2)\\
e^3 &= 2(q_1q_3-q_0q_2)i + 2(q_0q_1+q_2q_3)j + (q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2)k
\end{aligned}
$$

Es decir, la terna ortonormal de vectores (E^1, E^2, E^3) que define la rotación correspondiente al cuaternión de norma unidad q, es la de los vectores E^i que tienen las mismas componentes que los cuaterniones e^i, dadas por las fórmulas anteriores.

Consideremos la familia de rotaciones correspondientes a los puntos de la curva $q(t) = q^0(t)$. Por ser (E^1, E^2, E^3) una terna ortonormal, es $E^i.dE^i = 0$, $E^i.dE^j + E^j.dE^i = 0$ $(i \neq j)$ y por tanto los vectores dE^i/dt se expresan en la base (E^1, E^2, E^3) en la forma

$$(4.3) \qquad \frac{dE^1}{dt} = \gamma E^2 - \beta E^3 \ , \quad \frac{dE^2}{dt} = -\gamma E^1 + \alpha E^3 \ , \quad \frac{dE^3}{dt} = \beta E^1 - \alpha E^2$$

Los coeficientes α, β, γ tienen claro significado geométrico. Ellos son, efectivamente, las componentes respectivas de la base móvil (E^1, E^2, E^3) del vector *rotación instantánea*

$$(4.4) \qquad H = \alpha E^1 + \beta E^2 + \gamma E^3$$

El nombre proviene de que el movimiento, en cada instante, es una rotación alrededor de H, puesto que $dE^i/dt = H \wedge E^i$.

Teniendo en cuenta que las componentes de E^i son las de e^i en (4.2), resulta

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{dE^2}{dt} \, . \, E^3 = 2(q_0'q_1 - q_1'q_0 + q_2'q_3 - q_3'q_2) \\
\beta &= \frac{dE^3}{dt} \, . \, E^1 = 2(q_0'q_2 - q_1'q_3 - q_2'q_0 + q_3'q_1) \qquad (4.5)\\
\gamma &= \frac{dE^1}{dt} \, . \, E^2 = 2(q_0'q_3 + q_1'q_2 - q_2'q_1 - q_3'q_0)
\end{aligned}
$$

$$(4.6)\quad \begin{aligned} 2\,q_0' &= \alpha\, q_1 + \beta\, q_2 + \gamma\, q_3 \\ 2\,q_1' &= -\alpha\, q_0 - \beta\, q_3 + \gamma\, q_2 \\ 2\,q_2' &= \alpha\, q_3 - \beta\, q_0 - \gamma\, q_1 \\ 2\,q_3' &= -\alpha\, q_2 + \beta\, q_1 - \gamma\, q_0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones pueden condensarse en

$$(4.7)\qquad -2\,q' = v\,q \quad , \quad v = -2\,q'\,q^{-1}$$

donde

$$(4.8)\qquad v = \alpha i + \beta j + \gamma k$$

es el cuaternión correspondiente al vector

$$(4.9)\qquad V = \alpha I + \beta J + \gamma K$$

Nuestro objeto es calcular ahora la curvatura y la torsión k, w de la curva q(t) de S_3, en función del cuaternión v (4.8) cuyas componentes α, β, γ tienen significado geométrico en el espacio de las rotaciones E_3.

Para ello, de (4.7) se deduce

$$(4.10)\quad \begin{aligned} q' &= -\frac{1}{2}\,v\,q \\ q'' &= -(1/2)(v'q + vq') = -\frac{1}{2}\left(v'q - \frac{1}{2}\,v\,v\,q\right) \\ q''' &= -\frac{1}{2}\left(v''q - v'vq - \frac{1}{2}\,v\,v'q + \frac{1}{4}\,v\,v\,v\,q\right) \\ q'^{*} &= -\frac{1}{2}\,q^{*}\,v^{*} \\ q''^{*} &= -\frac{1}{2}\left(q^{*}v'^{*} - \frac{1}{2}\,q^{*}\,v^{*}\,v^{*}\right) \\ q'''^{*} &= -\frac{1}{2}\left(q^{*}v''^{*} - q^{*}v^{*}v'^{*} - \frac{1}{2}\,q^{*}v'^{*}v^{*} + \frac{1}{4}\,q^{*}v^{*}v^{*}\right) \end{aligned}$$

Introduciendo el vector V definido por (4.9), tenemos

$$(4.11)\qquad V^2 = v^{*}v = v\,v^{*} \quad , \quad VV' = \frac{1}{2}\left(v^{*}v' + v'^{*}v\right)$$

que son, ambas, expresiones escalares, a saber: $V^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, $V\,V' = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$. Por otra parte, siendo v un cuaternión puro, es

$$(4.12) \qquad v + v^* = 0 \quad , \quad v\,v = v^*\,v^*$$

y por ser q de norma unidad, es

$$(4.13) \qquad q^*q = qq^* = 1 \quad , \quad q^{*\prime}q + q^*q' = 0 \; , \; \langle q',q \rangle = \langle q,q' \rangle = 0$$

Con estas relaciones, de (4.10) se deduce fácilmente

$$\langle q',q' \rangle = \frac{1}{4} V^2 \quad , \quad \langle q'',q'' \rangle = \frac{1}{16} (V^2)^2 + \frac{1}{4} V'^2 \quad , \quad \langle q',q'' \rangle = \frac{1}{4} V\,V'$$

con lo cual queda

$$(4.14) \qquad k^2 = 4\,\frac{V^2\,V'^2 - (V\,V')^2}{(V^2)^3}$$

o sea, en notación vectorial

$$(4.15) \qquad k^2 = \frac{4\,(V \wedge V')^2}{(V^2)^3}$$

Para hallar la torsión w, aplicamos la relación (1.16),

$$(4.16)\,[q\;q'q''q'''] = \frac{1}{4}(q''q'^*qq'''^* + q'''q^*q'q''^* - qq'^*q''q'''^* - q'''q''^*q'q^*)$$

Teniendo en cuenta los valores (4.10) y las relaciones (4.11), (4.12) y (4.13), después de un cálculo un poco largo, pero sin artificios, resulta

$$(4.17) \quad [q\;q'q''q'''] = -\frac{1}{8}(V\,V'V'') + \frac{1}{16}((V\,V')^2 - V^2\,V'^2)$$

donde en el segundo miembro se trata de operaciones con el vector V.

Por tanto, teniendo en cuenta (3.11) y (4.14), resulta

$$(4.18) \qquad k^2\,w = \frac{[q\;q'q''q''']}{\langle q',q' \rangle^3} = -8\,\frac{(V\,V'V'')}{(V^2)^3} - k^2$$

de donde, conociendo k por (4.15), se puede expresar w en función de V y sus derivadas.

5. ROTACIONES DE FRENET.

Llamaremos *rotaciones de Frenet* a las rotaciones alrededor de un punto de E_3 que corresponden al movimiento del triedro de Frenet (T,N,B) de una curva del espacio E_3. Esto quiere decir, que los versores T,N,B que definen el movimiento (tangente, normal principal y binormal de una curva) satisfacen a las ecuaciones de Frenet

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N$$

$$(5.1) \qquad \frac{dN}{ds} = -\kappa T + \tau B$$

$$\frac{dB}{ds} = -\tau N$$

Es decir, comparando con (4.3) resulta que el vector V tiene las componentes $\alpha = \tau$, $\beta = 0$, $\gamma = \kappa$, o sea, es el vector $V = \tau I + \kappa K$, siendo κ, τ la curvatura y la torsión de la curva de E_3.

Según esto, la curva de S_3 correspondiente a una rotación de Frenet, tendrá la curvatura y la torsión dadas por

$$(5.2) \qquad k = \frac{2(\kappa\tau' - \kappa'\tau)}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}} = 2\frac{d}{ds}\arc\tan\frac{\tau}{\kappa}$$

y, si $k \neq 0$, entonces

$$(5.3) \qquad w = -1$$

De aquí se deduce:

1° *A las hélices de* E_3 (κ/τ = constante) *corresponden las rectas* (k=0) *de* S_3.

2° *A las curvas de* E_3 *que no son hélices, corresponden curvas de torsión constante* (w=-1) *de* S_3. *Para estas curvas, la curvatura total* $\int k\, ds$ *es un múltiplo de* 4π (*incluído* 0).

Podemos preguntar, ¿cuál es la condición para que la rotación definida por las ecuaciones (4.3) sea un movimiento de Frenet?

Para ello será necesario y suficiente que exista un cambio de base ortonormal, sea

$$(5.4) \qquad A^i = \sum_{h=1}^{3} a^i_h \, E^h \quad , \quad i=1,2,3$$

con la matriz (a^i_h) ortogonal, tal que el versor rotación instantánea H (4.4) no tenga componente según A^2, o sea, se verifique $A^2.H = 0$, lo que equivale a

$$(5.5) \qquad \alpha a^2_1 + \beta a^2_2 + \gamma a^2_3 = 0$$

de donde se deduce (puesto que las a^i_j son constantes) .

$$(5.6) \quad \alpha' a^2_1 + \beta' a^2_2 + \gamma' a^2_3 = 0 \ , \ \alpha' a^2_1 + \beta' a^2_2 + \gamma' a^2_3 = 0$$

y para que este sistema (5.5), (5.6) tenga solución debe ser

$$(5.7) \qquad (V\ V'V'') = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0$$

Recíprocamente, si esta condición se cumple, el sistema (5.5), (5.6) tiene solución y se tiene el versor A^2, que completado con A^1, A^3 de manera que formen una terna ortonormal, determinan un triedro de Frenet. Por tanto se puede enunciar:

3° *La condición necesaria y suficiente para que una rotación definida por el sistema* (4.3) *sea una rotación de Frenet, es que sea* $(V\ V'V'') = 0$, *siendo* V *el vector* (4.8), *lo que equivale a la condición* (5.7). *Según* (4.18), *la condición es equivalente a que sea* $w=-1$, *siendo* w *la torsión de la curva de* S_3 *asociada a la rotación, siempre que esta curva sea de curvatura* k *distinta de cero.*

BIBLIOGRAFIA

[1] BLASCHKE, Wilhelm, *Kinematik und Quaternionen*, Mathematische Monographien, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960.

En este trabajo se citan otros de Clifford, Hjelmslev, Study relacionados con la representación de rotaciones por cuaterniones y por puntos de S_3. Para problemas referentes a la integración del sistema (4.3) ver también el clásico tratado de DARBOUX, *Théorie des Surfaces*, Parte I, págs.1-64, Gauthier-Villars, Paris, 1914.

Recibido en octubre de 1974

Universidad de Buenos Aires
Argentina