SOBRE LA FORMULA DE GAUSS-BONNET PARA POLIEDROS EN ESPACIOS DE CURVATURA CONSTANTE

por L. A. SANTALO
(Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires)

SUMMARY:

For spaces S_n of constant curvature K, the generalized formula of Gauss-Bonnet for a closed, orientable surface S of class $\geqq 3$ which is the boundary of a body Q, takes the forms (1.4) and (1.5) according to the parity of n. In this paper we consider the case in which Q is a polyhedron. Then the formula takes the form (3.4), (3.5), where the terms $\alpha_{n-h-1}L_h$ are the sums (3.2) between the h-dimensional measures L_h^i of the h-dimensional edges of Q and the (n-h-1)-dimensional polyhedral angles "polar" of those formed by the faces of Q which are incident in L_h^i.

If Q is a simplex of S_n these formulae must contain the Poincaré's relations between the angles of spherical simplexes [11], [8], [10], [15]. This is computed for $n=2, 3, 4$ in N.° 4 and 5. However the computation in the general case it seems to be far from obvious.

1. *La fórmula de Gauss-Bonnet en espacios de curvatura constante.*

La clásica fórmula de Gauss-Bonnet de la teoría de superficies fue generalizada a variedades multidimensionales por Allendoefer-Weil en 1943 [1]. Poco después, otra demostración más simple fue dada por S. S. Chern [4], [5]. Para el caso particular de hipersuperficies de un espacio de curvatura constante la fórmula generalizada Gauss-Bonnet está contenida en unos resultados obtenidos independientemente, casi en la misma fecha, por Herglotz [7]. En este caso los elementos que intervienen en la fórmula de Gauss-Bonnet tienen significado geométrico bien preciso. Vamos a recordar esta fórmula, una demostración de la cual puede verse en [12].

Sea $S_n(K)$ el espacio de curvatura constante K de n dimensiones, o bien, si se quiere, el espacio no euclidiano n-dimensional. Sea S una hipersuperficie cerrada del mismo de clase $\geqq 3$ que sea contorno de un cuerpo Q. En cada punto de S, si $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$ son los radios de curvatura principales, están definidas las curvaturas medias (*)

$$(1.1)\qquad m_i = \left\{\frac{1}{R_{\alpha_1}}\,\frac{1}{R_{\alpha_2}}\cdots\frac{1}{R_{\alpha_i}}\right\},\quad m_0 = 1\ ,\ i = 1, 2, \ldots, n-1$$

donde el paréntesis indica la función simétrica elemental de orden i formada con las curvaturas principales $1/R_i$. De aquí se deducen las *integrales de curvatura media*

$$(1.2)\qquad M_i = \int_S m_i\, dF \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

donde dF indica el elemento de área ($(n-1)$-dimensional) de S. En particular es

$$(1.3)\qquad M_0 = F = \text{área de } S.$$

Con estas notaciones, la fórmula generalizada de Gauss-Bonnet para espacios de curvatura constante K, se escribe:

Para n par:

$$(1.4)\qquad c_{n-1} M_{n-1} + c_{n-3} M_{n-3} + \ldots + c_1 M_1 + K^{n/2}\, V = \tfrac{1}{2} O_n\, \chi(Q)$$

y para n impar

$$(1.5)\qquad c_{n-1} M_{n-1} + c_{n-3} M_{n-3} + \ldots + c_2 M_2 + c_0 F = \tfrac{1}{2} O_n\, \chi(Q)$$

donde las constantes c_i valen

$$(1.6)\qquad c_i = \frac{O_n}{O_i\, O_{n-1-i}}\, K^{(n-1-i)/2}$$

siendo O_h el área de la esfera euclidiana de radio unidad y dimensión h, o sea

$$(1.7)\qquad O_h = \frac{2\,\pi^{(h+1)/2}}{\Gamma\left((h+1)/2\right)}\,.$$

(*) En el trabajo [12], como es también mucha costumbre, definimos las curvaturas medias por

$$m_i' = \binom{n-1}{i}^{-1} m_i.$$

Esto modifica las fórmulas que siguen en un factor combinatorio. En el caso actual es preferible la definición aquí adoptada.

$\chi(Q)$ indica la característica de Euler-Poincaré del cuerpo Q limitado por S. Si Q se descompone en simples y a_i es el número de ellos de dimensión i, es

$$\chi(Q) = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n. \tag{1.8}$$

Para el contorno S de Q es

$$\chi(S) = 0 \text{ para } n \text{ par}, \quad \chi(S) = 2\,\chi(Q) \text{ para } n \text{ impar}. \tag{1.9}$$

Para el caso de una esfera topológica es

$$\chi(Q) = 1. \tag{1.10}$$

2. *Cuerpos polares.*

Consideremos en particular la esfera n-dimensional de radio unidad del espacio euclidiano E_{n+1}; es un espacio S_n de curvatura constante $K = 1$. Dada en este espacio una hipersuperficie S que limita un cuerpo Q, la hipersuperficie paralela exterior a distancia $\pi/2$ se llama la "dual" o "polar" de S: la representaremos por S^*. El cuerpo Q^* limitado por S^* por el lado que no contiene a Q será el dual o polar de Q. Evidentemente $S^{**} = S$ y $Q^{**} = Q$.

La hipersuperficie polar S^* puede obtenerse también como lugar geométrico de los extremos de los radios de la esfera unidad E_{n+1} normales a los hiperplanos diametrales tangentes a S.

Llamando V y V^* a los volúmenes de Q y Q^* y F, F^* a las áreas respectivas de S y S^*, valen las siguientes fórmulas (ver [12]):

Para n par

$$\left\{\begin{aligned} &c_{n-1} F + c_{n-3} M_2 + \ldots + c_1 M_{n-2} + V^* = \tfrac{1}{2} O_n\, \chi(Q), \\ &c_{n-1} F^* + c_{n-3} M_{n-3} + \ldots + c_1 M_1 + V = \tfrac{1}{2} O_n\, \chi(Q) \end{aligned}\right. \tag{2.1}$$

y para n impar

$$\left\{\begin{aligned} &c_{n-1} F + c_{n-3} M_2 + \ldots + c_2 M_{n-3} + c_0 F^* = \tfrac{1}{2} O_n\, \chi(Q), \\ &c_{n-2} M_{n-2} + c_{n-4} M_{n-4} + \ldots + c_1 M_1 + V + V^* = (1 - \tfrac{1}{2}\chi(Q))\, O_n. \end{aligned}\right. \tag{2.2}$$

En estos últimos casos de n impar, según (1.9), puede sustituirse $\chi(Q) = \frac{1}{2}\chi(S)$. Las constantes c_i son las mismas (1.6).

Además, en todos los casos, vale

$$M_i^* = M_{n-1-i} \tag{2.3}$$

Con esto se tienen, por ejemplo, los siguientes casos particulares:

Para $n = 2$, llamando F al área de un dominio Q y L a la longitud de su contorno (que serán los valores V y F de antes respectivamente), resultan las fórmulas elementales

$$L + F^* = 2\pi\,\chi(Q) \quad , \quad L^* + F = 2\pi\,\chi(Q). \tag{2.4}$$

Para $n = 3$ se tiene

$$\begin{cases} F + F^* = 2\pi\,\chi(S) \\ \frac{1}{2} M_1 + V + V^* = (2 - \chi(Q))\,\pi^2 \end{cases} \tag{2.5}$$

Para $n = 4$ resulta

$$\begin{cases} 2\,F + M_2 + 6\,V^* = 4\,\pi^2\,\chi(Q) \\ 2\,F^* + M_1 + 6\,V = 4\,\pi^2\,\chi(Q). \end{cases} \tag{2.6}$$

3. *Caso de poliedros.*

Consideremos el caso en que Q es un poliedro. Queremos ver el valor que debe atribuirse en este caso a las integrales de curvatura media M_i que ya no pueden definirse directamente por las fórmulas (1.1) y (1.2) por tener aristas en las cuales algunos R_i se anulan.

Consideremos el cuerpo Q_ε paralelo exterior a Q a distancia ε (conjunto de puntos de $S_n(K)$ cuya distancia a Q es $\leq \varepsilon$); sus curvaturas principales son $1/(R_i + \varepsilon)$ y por tanto sus curvaturas medias

$$m_i(Q_\varepsilon) = \left\{ \frac{1}{R_{\alpha_1} + \varepsilon}, \frac{1}{R_{\alpha_2} + \varepsilon}, \ldots, \frac{1}{R_{\alpha_i} + \varepsilon} \right\}.$$

Las partes de Q_ε correspondientes a las caras de Q son también planas y por tanto su curvatura media es nula. La parte de Q_ε obtenida a partir de una arista $L_h^\bullet$ de dimensión h $(0 \leq h \leq n-2)$ es un sector de cilindro cuya sección recta es un simple de dimensión $n - h - 1$ de la esfera de radio ε y dimensión $n - h - 1$ contenida en el plano normal a $L_h^\bullet$. Para este sector de cilindro las curvaturas principales son $1/R_1 = 1/R_2 = \ldots = 1/R_{n-h-1} = 1/\varepsilon$, $1/R_{n-h} = \ldots = 1/R_{n-1} = 0$ y el elemento de área vale ε^{n-h-1} $dO_{n-h-1}\, dL_h^\bullet$ siendo dO_{n-h-1} el elemento de área de la esfera unidad $(n-h-1)$-dimensional y $dL_h^\bullet$ el elemento de volumen h-dimensional de $L_h^\bullet$.

Al calcular la integral de curvatura media M_i correspondiente al sector cilíndrico de eje $L_h^\bullet$ y hacer $\varepsilon \longrightarrow 0$, resulta que vale cero si $i < n - h - 1$ o bien $i > n - h - 1$, quedando únicamente el valor $\alpha^s_{n-h-1} L_h^s$ para el caso $i = n - h - 1$, siendo $\alpha_n{}^s{}_{-h-1}$ la integral de dO_{n-h-1} e indicando con las mismas letras L_h^s el volumen h-dimensional de la arista L_h^s. Para $h = 0$, L_0^s es un vértice de Q y como medida del mismo hay que tomar la unidad (o sea, hay que poner, $L_0^s = 1$) puesto que el elemento de área de Q_s correspondiente a los vértices no contiene el factor dL_0^s.

Sumando los valores obtenidos para todas las aristas L_h^s de la misma dimensión h, resulta que para un poliedro Q es

$$M_{n-h-1} = \sum_s \alpha^s_{n-h-1} L_h^s$$

que conviene escribir en la forma

$$M_h = \sum_s \alpha_h^s L^s_{n-h-1} \tag{3.1}$$

siendo:

L^s_{n-h-1} = volumen $(n - h - 1)$-dimensional de la arista L^s_{n-h-1} de dimensión $n - h - 1$ $(h = 1, 2, \ldots, n - 1)$.

α^s_h = medida del ángulo poliedro h-dimensional "polar" del ángulo poliedro formado por las $h + 1$ caras de Q que concurren en L^s_{n-h-1}.

La suma respecto de s se refiere a todas las aristas $(n - h - 1)$-dimensionales de Q.

Recordemos lo que significa ángulo poliedro "polar". A cada arista L^s_{n-h-1} corresponde un ángulo poliedro de dimensión h interior a Q, sea $\alpha^s{}_h{}^*$. La medida de este ángulo es la de un simple de dimensión h sobre la esfera de radio unidad y dimensión h; este simple tiene un polar en el sentido del N° 2 y el volumen de este simple polar es precisamente el valor α_h^s anterior.

Todavía, para abreviar la escritura, escribiremos

$$\sum_s \alpha_h^s L^s_{n-h-1} = \alpha_h L_{n-h-1} \tag{3.2}$$

con lo cual (3.1) queda

$$M_h = \alpha_h L_{n-h-1}. \tag{3.3}$$

En particular, para $h = n - 1$ es $L_0^s = 1$ y por tanto

$$M_{n-1} = \Sigma \alpha_h^s = \alpha_h$$

es la suma de los ángulos polares de los correspondientes a los vértices de Q.

Sustituyendo los valores (3.3) en (1.4) y (1.5) resulta que la fórmula de Gauss-Bonnet generalizada para poliedros del espacio n-dimensional de curvatura constante K toma la forma siguiente:

Para n par:

$$(3.4) \qquad c_{n-1}\,\alpha_{n-1} + c_{n-3}\,\alpha_{n-3}\,L_2 + \ldots + c_1\,\alpha_1\,L_{n-2} + K^{n/2}\,V = \tfrac{1}{2}\,O_n\,\chi(Q)$$

y para n impar

$$(3.5) \qquad c_{n-1}\,\alpha_{n-1} + c_{n-3}\,\alpha_{n-3}\,L_2 + \ldots + c_2\,\alpha_2\,L_{n-3} + c_0\,F = \tfrac{1}{2}\,O_n\,\chi(Q).$$

Veamos algunas consecuencias de estas fórmulas:

a) Para n par, la fórmula (3.4) permite calcular el volumen V de un poliedro a partir de los ángulos del mismo y de las medidas de sus aristas de dimensión par. Pero como estas aristas son a su vez poliedros de un espacio de curvatura constante de dimensión menor, sus medidas se pueden expresar nuevamente en función de sus ángulos. Procediendo sucesivamente resulta el siguiente resultado clásico.

Para n par, el volumen V de un poliedro de un espacio de curvatura constante $K \neq 0$, puede expresarse en función de los ángulos del mismo de distintas dimensiones. Para n impar dichos ángulos están ligados por una relación lineal, pero con ellos no puede expresarse V.

Este teorema, tal vez ya conocido por L. Schläfli en 1852 para el caso de poliedros esféricos (*), fue reencontrado por Poincaré en 1905 [11] siendo más tarde extendido a espacios de curvatura constante negativa por Hopf [9]. En general los trabajos se limitan al caso del simple n-dimensional, considerando que todo poliedro se puede descomponer en simples. Trabajos recientes sobre el particular son los de Peschl [10] y Höhn [8] donde se encuentra, además, otra bibliografía.

b) Para n impar, la fórmula (3.5) no es más que la (3.4) aplicada a las caras del poliedro Q, que son poliedros de dimensión $n - 1$ y por lo tanto par, y sumando luego a todas las caras. En el número siguiente se verá esto claro en el caso particular $n = 3$.

(*) Los manuscritos originales de Schlafli quedaron desconocidos en la Schweizerischen Landesbibliotek de Berna hasta 1901 que se publicaron en el vol. 38, I, de los *Denkschriften der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft.* Ver [14].

En general, dado un poliedro Q de dimensión n, contenido en $S_n(K)$, la fórmula (3.4) puede aplicarse a todas sus aristas de dimensión par. Si se aplica por ejemplo a las aristas de dimensión $h = 2m \leq n - 1$ se obtendrá una relación entre las medidas de las aristas de dimensión 2, 4, ..., h y los ángulos poliedros formados por las caras que las limitan, consideradas estas aristas como poliedros (con $\chi = 1$) de dimensiones 2, 4, ..., h. Para el caso de un simple estas fórmulas deben coincidir con las dadas por Poincaré en el trabajo citado [11] y estudiadas ampliamente por Peschl [10], pero la computación efectiva de esta equivalencia no se presenta fácil en el caso general. Para $n = 3$, 4 lo veremos en los Nos. 4 y 5 siguientes.

c) Más interesante parece el problema siguiente, sobre el cual pensamos volver en otra oportunidad. Las relaciones a que hacemos referencia en *b*) traducidas al caso general de un cuerpo cualquiera Q de $S_n(K)$ limitado por una superficie S de clase ≥ 3, deben dar relaciones entre las curvaturas medias M_i análogas a las del teorema de Gauss-Bonnet-Herglotz (1.4), (1.5), pero en las que intervengan únicamente las M_i para $i \leq h \leq n - 1$ ($h = 2, 4, \ldots$). A su vez estas relaciones deben ser caso particular, correspondiente al caso de espacios de curvatura constante K, de otras fórmulas integrales del tipo de la de Gauss-Bonnet generalizada por Allendoerfer-Weil-Chern, válidas para cualquier hipersuperficie orientable y cerrada de un especio de Riemann. Se presume, por tanto, la existencia de estas nuevas fórmulas integrales que sin duda seria interesante estudiar. Podría ser que ellas coincidieran o estuvieran relacionadas con las dadas por Chern ([5], fórmula (20)), pero no es seguro que así sea.

4. *Casos* $n = 2, 3$.

Para su mejor comprensión veamos la forma que toman las fórmulas (3.4) y (3.5) para los casos más simples de dimensión 2 y 3.

Para $n = 2$ es $c_1 = 1$ y la fórmula (3.4) da

$$\alpha_1 + KV = 2\pi\,\chi(Q).$$

En este caso V representa el área del polígono Q; es mejor representarla por F quedando

$$\alpha_1 + KF = 2\pi\,\chi(Q). \tag{4.1}$$

Si A_s son los ángulos interiores del polígono Q y m es el número de vértices, es

$$(4.2) \qquad \alpha_1 = \sum_{s=1}^{m} (\pi - A_s) = m\pi - \sum_{1}^{m} A_s$$

y resulta por tanto la fórmula elemental

$$(4.3) \qquad KF = \sum_{1}^{m} A_s - (m - 2\,\chi(Q))\,\pi$$

que da el área de un polígono sobre una superficie de curvatura constante $K \neq 0$. Para un polígono simplemente conexo es $\chi(Q) = 1$

Para $n = 3$ el volumen de un poliedro ya no se puede calcular elementalmente. Aun para el caso del tetraedro aparecen funciones trascendentes complicadas; ver, por ejemplo, Coxeter [3] y Böhm [2].

Veamos que relación da la fórmula (3.5).

Ella toma la forma $c_2\,\alpha_2 + c_0\,F = \frac{1}{2}\,O_n\,\chi(Q)$, o bien según (1.6)

$$(4.4) \qquad \alpha_2 + KF = 4\,\pi\,\chi(Q)$$

donde α_2 es la suma de los ángulos poliedros polares de los correspondientes a los vértices de Q. Si se quieren introducir estos ángulos poliedros mismos, recordando que para $n = 2$ entre el área α^s de un polígono esférico y la longitud $\lambda_s{}^*$ del contorno de su polar vale la relación (2.4) que ahora se escribe $\alpha^s + \lambda_s{}^* = 2\,\pi$, se podrá poner $\alpha_2 = 2\,\pi\,m - \sum_{1}^{m} \lambda_s{}^*$ siendo m el número de vértices de Q. La suma de los $\lambda_s{}^*$ es precisamente la suma de los ángulos de las caras de Q, que según (4.3) vale, para cada cara,

$$KF_i + (m_i - 2)\,\pi$$

siendo m_i el número de vértices de la cara de área F_i (que suponemos simplemente conexa y por tanto $\chi = 1$). Al sumar para todas las caras, llamando c al número de ellas y a al número de aristas resulta

$$\sum_{s} \lambda_s{}^* = KF + 2\,\pi\,a - 2\,\pi\,c.$$

Pero en todo poliedro tridimensional entre el número de aristas, caras y vértices de la superficie que lo limita valen las relaciones (1.8), (1.9) que con la notación actual dan $m - a + c = 2\,\chi(Q)$. Por tanto resulta

$$\alpha_2 = 4\,\pi\,\chi(Q) - KF$$

y sustituyendo en (4.4) queda una identidad. Es decir, la relación (3.5), conociendo la (3.4), que se puede aplicar a cada una de las caras de Q, no da nada nuevo.

5. *El caso* $n = 4$.

En este caso la fórmula (3.4) permite calcular el volumen de un poliedro de $S_4(K)$ en función de los ángulos del mismo (ángulos poliedros de dimensiones 1 y 3). Veamos a que resultado se llega.

Escribiendo (3.4) y sustituyendo los coeficientes c_i por sus valores resulta

$$2\,\alpha_3 + \alpha_1 L_2 K + 3\,K^2 V = 4\,\pi^2\,\chi(Q). \tag{5.1}$$

La expresión de V en función únicamente de los ángulos de Q toma una expresión muy complicada en el caso de un poliedro general. Vamos a limitarnos a considerar el caso más sencillo en que Q es un simple, para ver como (5.1) contiene a la fórmula de Poincaré-Hopf antes mencionada.

Siendo Q un simple, será $\chi(Q) = 1$.

Sean P_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) los vértices de Q. En cada uno de ellos concurren 4 caras tridimensionales. Las normales a ellas hacia el exterior de Q determinan sobre la esfera unidad de centro P_i un tetraedro esférico T_i de dimensión 3; la suma de los volúmenes de estos tetraedros es precisamente α_3. En vez de estos tetraedros interesa introducir sus polares, que son los que miden los ángulos sólidos interiores de Q en los vértices P_i. Representando por la misma letra T_i a los tetraedros esféricos mencionados y a su volúmenes y por A_i tanto a los tetraedros polares como a sus volúmenes, según (2.5) es

$$T_i = \pi_2 - \tfrac{1}{2}\,M^i{}_1 - A_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 5) \tag{5.2}$$

siendo $M^i{}_1$ la curvatura media del tetraedro esférico A_i y por lo tanto, según (3.1),

$$M^i{}_1 = \sum_{s=1}^{6} \alpha^s{}_{1i}\, L^s{}_{1i} \tag{5.3}$$

donde $L^s{}_{1i}$ son las longitudes de las 6 aristas de A_i y $\alpha^s{}_{1i}$ los ángulos polares de los diedros correspondientes. Representando por $\beta^s{}_{1i}$ a estos diedros de A_i será

$$M^i{}_1 = \sum_{s=1}^{6} (\pi - \beta^s{}_{1i})\, L^s{}_{1i}. \tag{5.4}$$

Veamos cómo se pueden sustituir los β^s_{1i} y L^s_{1i} por elementos del simple Q. Las longitudes L^s_{1i} de las aristas de A_i miden los ángulos de las 2-caras (caras de dimensión 2) de Q incidentes en P_i, por tanto, la suma total de L^s_{1i} para $s = 1, 2, \ldots, 6$ y $i = 1, 2, \ldots, 5$ será la suma de todos estos ángulos, o sea, llamando f_h al área de las 2-caras de Q $(h = 1, 2, \ldots, 10)$ y $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_{10}$ al área total de ellas, según (4.3), es

$$\sum_{i=1}^{5} \sum_{s=1}^{6} L^s_{1i} = Kf + 10\pi. \tag{5.5}$$

Por otra parte, los diedros β^s_{1i} de A_i miden los ángulos de Q formados por las dos 3-caras (caras tridimensionales) que concurren en una 2-cara (proyección de L^s_{1i} desde P_i). Por tanto llamando β^h_1 $(h = 1, 2, \ldots, 10)$ a estos ángulos diedros, es

$$\sum_{i,s} \beta^s_{1i} L^s_{1i} = \sum_{h=1}^{10} \beta^h_1 (K f_h + \pi) = K \sum_{1}^{10} \beta^h_1 f_h + \pi \beta_1 \tag{5.6}$$

habiendo puesto

β_1 = suma de ángulos formados por las dos 3-caras incidentes en cada una de las diez 2-caras de Q.

En definitiva, sumando (5.2) para todos los 5 vértices del simple Q, resulta

$$2\alpha_3 = K\left(\sum_{1}^{10} \beta^h_1 f_h - \pi f\right) + \pi\beta_1 - 2A \tag{5.7}$$

donde A representa la suma de los ángulos sólidos interiores de los 5 vértices de Q.

Para el segundo sumando de (5.1), según (3.2), se tiene

$$\alpha_1 L_2 = \sum_{h=1}^{10} (\pi - \beta^h_1) f_h = \pi f - \sum_{h=1}^{10} \beta^h_1 f_h \tag{5.8}$$

y por tanto sustituyendo (5.7) y (5.8) en (5.1) resulta

$$3K^2 V + \pi\beta_1 - 2A = 4\pi^2. \tag{5.9}$$

Esta es la fórmula de Poincaré-Hopf para el volumen V de un simple del espacio de curvatura constante K de 4 dimensiones en función de los 3-ángulos y 1-ángulos del mismo. Ella fue dada también, por cálculo directo, por M. Dehn [6].

A veces (5.9) se escribe en otra forma ligeramente distinta, siguiendo a Poincaré. Consiste en tomar como unidad de medida para ángulos de dimensión h el volumen de la esfera O_h.

Haciendo lo mismo para el volumen V, en (5.9) se puede poner

$$\frac{V}{O_4} = V', \quad \frac{\beta_1}{O_1} = \beta_1', \quad \frac{A}{O_3} = A'$$

con lo cual queda

$$2\,K^2\,V' = A' - \tfrac{1}{2}\,\beta_1' + 1 \tag{5.10}$$

que es la fórmula que se encuentra, por ejemplo, en Peschl [10, p. 331, (7.5a)].

6. *Añadido en las pruebas* (20 de octubre de 1961). Si se quiere la expresión del volumen de un poliedro cualquiera de $S_4\,(K)$ en función de los ángulos del mismo, se puede proceder de la manera siguiente, completamente análoga a la anterior para el caso del simple.

Sean

s_2 = número de 2-caras del poliedro Q.

n_i = número de lados de la 2-cara i.

Hasta la fórmula (5.2) se llega lo mismo que para el simple. En el caso actual, como las 2-caras de Q pueden no ser triángulos, se aplicará la fórmula general (4.3) para $K = 1$, resultando

$$\sum_{i,s} L_{1i}^{s} = K\,f + \sum_{1}^{s_2} (n_i - 2)\,\pi$$

que sustituye a (5.2).

Análogamente, la (5.6) será ahora

$$\sum_{i,s} \beta^{s}{}_{1i}\,L^{s}{}_{1i} = \sum_{h=1}^{s_2} \beta_1{}^{h}\,(K\,f_h + (n_h - 2)\,\pi) =$$

$$= K \sum_{1}^{s_2} \beta_1{}^{h}\,f_h + \pi \sum_{1}^{s_2} (n_h - 2)\,\beta_1{}^{h}$$

con lo cual, sumando las expresiones (5.2) y llamando s_0 al número de vértices de Q resulta

$$\alpha_3 = \sum_1^{s_0} (\pi^2 - A_i) + \frac{\pi}{2} \sum_1^{s_2} (n_h - 2)(\beta_1{}^h - \pi) +$$

$$+ \frac{1}{2} K \sum_1^{s_2} (\beta_1{}^h - \pi) f_h .$$

La fórmula (5.8) se escribe ahora

$$\alpha_1 L_2 = \sum_1^{s_2} (\pi - \beta_1{}^h) f_h .$$

Con esto, la fórmula (5.1) da

$$(6.1) \qquad 3 K^2 V + \pi \sum_1^{s_2} (n_h - 2)(\beta_1{}^h - \pi) + 2 \sum_1^{s_0} (\pi^2 - A_i) =$$

$$= 4 \pi^2 \chi (Q).$$

Despejando V se tiene la fórmula buscada. Para el caso del simple es

$$n_h = 3 \quad , \quad s_2 = 10 \quad , \quad s_0 = 5 \quad , \quad \chi (Q) = 1$$

y resulta (5.9) como debe ser.

Recientemente H. Knothe (*) ha publicado una manera directa de obtener (6.1) para el caso de poliedros convexos (para los cuales $\chi (Q) = 1$).

BIBLIOGRAFIA

[1] C. B. ALLENDOERFER, A. WEIL, *The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedron,* Trans. Am. Math. Soc. 53, 1943, 101-129.

[2] J. BOHM, *Untersuchung des Simplexinhaltes in Raumen konstanter Krümmung beliebiger Dimension,* J. reine und ang. Math. (Crelle) 202, 1959, 16-51.

[3] H. S. M. COXETER, *Non-eucliden Geometry,* University of Toronto Press, 3a. ed. Toronto, 1957.

[4] S. S. CHERN, *A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds,* Ann. of Math. 45, 1944, 747-752.

[5] — — *On the curvatura integra in a riemannian manifold,* Ann. of Math. 46, 1945, 674-684.

(*) *On polyhedra in spaces of constant curvature,* Michigan Mathematical Journal, 7, 1960, 251-255.

[6] M. DEHN, *Die Eulersche Formel im Zusammenhang mit dem Inhalt in der Nicht- Euklidischen Geometrie,* Math. Annalen 61, 1905, 561-586.

[7] G. HERGLOTZ, *Ueber die Steinersche Formel für Parallelflachen,* Hamburg Abh. XV, 1943, 165-177.

[8] W. HOHN, *Winkel und Winkelsumme in n-dimensionalen euklidischen Simplex,* Thesis, Eidgenossische Technische Hochschule, Zürich, 1953.

[9] H. HOPF, *Die curvatura integra Clifford-Kleinscher Raumformen,* Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, Math. Phys. 1925, 131-141.

[10] E. PESCHL, *Winkelrelationen am Simplex und die Eulersche Charakteristik,* Bayer. Akad. Wiss. Math. Nat. Kl. Sitz. 1955, 319-345,

[11] H. POINCARÉ, *Sur la généralisation d'un théoreme élémentaire de géométrie,* C. R. Acad. Sc. Paris, 1905, I, 113-117.

[12] L. A. SANTALÓ, *Cuestiones de geometría diferencial e integral en espacios de curvarura constante,* Rendiconti del Sem. Mat. di Torino, 14, 1954-55, 277-295.

[13] — — *On parallel hypersurfaces in the elliptic and hyperbolic n-dimensional space,* Proc. Am. Math. Soc. 1, 1950, 325-330.

[14] L. SCHLAFLI, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen,* vol. 1, Basel 1950 (en especial pág. 240).

[15] D. M. Y. SOMMERVILLE, *The relations connecting the angle-sums and volume of a polytope in space of n dimensions,* Proc. Roy. Soc. London, Serie A, 115, 1927, 103-119.