Sobre algunas teorías asimétricas del campo unificado

por

Luis A. Santaló (*)
Académico correspondiente

1. Introducción

La teoría de la Relatividad General (Einstein [2], 1916) parte de la hipótesis fundamental de que el espacio-tiempo es una variedad diferenciable con una métrica de Riemann, es decir, una variedad diferenciable con un tensor simétrico, no degenerado, dos veces covariante. Para determinar las componentes g_{ij} de este tensor, Einstein establece las «ecuaciones de la gravitación», que en el vacío son de la forma $G_{ij} = 0$, siendo G_{ij} el llamado tensor gravitatorio, cuyas componentes son funciones de las del tensor fundamental g_{ij}. La elección del tensor G_{ij} fue en gran parte obra de la intuición de Einstein, pero poco tiempo después, E. Cartan ([1], 1922) demuestra que el tensor G_{ij} es el único tensor simétrico de segundo orden que cumple las dos condiciones siguientes: a) Las componentes G_{ij} dependen únicamente de las g_{ij} y de sus derivadas parciales de primero y segundo orden, siendo lineales respecto de las de segundo orden: b) El tensor G_{ij} es conservativo, en el sentido de que se cumplen las ecuaciones $G^{ij}{}_{;j} = 0$, donde el punto y coma indica derivación covariante. La primera condición es de «simplicidad», es decir, está de acuerdo con el criterio de ensayar siempre la mínima

(*) El presente trabajo es parte del realizado gracias a una ayuda a la investigación «Manuel Aguilar», concedida por la Fundación Aguilar (años 1968-69), que permitió la estada del autor en París y Madrid por unos meses trabajando sobre el tema. Cumplo con gusto el deber de agradecer a la Fundación Aguilar por tan generosa ayuda.

complicación. La segunda condición es obligada por la interpretación física, siendo equivalente al principio de conservación de la energía.

La Relatividad General tuvo éxito espectacular para explicar los fenómenos gravitatorios, pero la misma simetría de los tensores básicos (g_{ij} y G_{ij}) no permitieron interpretar los fenómenos del electromagnetismo, caracterizados fundamentalmente por un tensor antisimétrico. Nació entonces la idea de buscar otras geometrías del espacio-tiempo, más amplias que la geometría de Riemann, que explicaran e interpretaran geométricamente ambos campos, gravitatorio y electromagnético, y aún, como posibilidad ideal, también los campos nucleares. Las tentativas han sido muchas y de índole muy variada. Por un lado se ha ensayado mantener la hipótesis de que el espacio-tiempo es una variedad de Riemann, pero variando el número de sus dimensiones: son las teorías multidimensionales de Kaluza [9], Klein [10], Thiry [23], Jordan [8] o las teorías proyectivas (Ludwig [14]), para no citar más que las principales. Por otra parte, se ha ensayado la hipótesis de que el espacio-tiempo sea una variedad diferenciable con una conexión afín, sea simétrica (Eddington [5], 1922; H. Weyl [27], 1918; Einstein [3], 1925) o no simétrica (Schrödinger [21, 22], 1947-48; Einstein [4], 1950). Citamos sólo a los autores más significativos. Una recopilación de todas estas teorías, con abundante bibliografía, puede verse en el libro de M. A. Tonnelat [26]. Ver también A. Lichnerowicz [11].

Todas estas teorías han tenido poco éxito desde el punto de vista físico. Tal vez ello sea debido a que no existan para ellas teoremas al estilo del mencionado de E. Cartan, que ayuden a elegir las ecuaciones del campo por razones de simplicidad, con resultado único. Aparecen, al contrario, muchas posibilidades, cada una con sus ventajas e inconvenientes parciales y con los mismos derechos, desde el punto de vista matemático, para ser elegidas.

Sin embargo, si bien los resultados para la física han sido escasos, las tentativas han resultado útiles para la matemática, contribuyendo notablemente a enriquecer la geometría de las variedades diferenciables, planteando nuevos problemas y consiguiendo resultados sobre su estructura y comportamiento. Las teorías mencionadas de Schrödinger y Einstein, desarrolladas entre los años 1947 y 1951 parecen ser las más ricas desde el punto de vista matemático, por sus muchas posibilidades. Consisten, en líneas generales, en asignar al espacio-tiempo un tensor g_{ij} no necesariamente simétrico y una conexión afín Γ^i_{jk}, tampoco necesariamente simétrica, estando ambos objetos geométricos vinculados por ciertas ecuaciones del campo. Estas ecuaciones se obtienen generalmente a partir de un «principio variacional», entre otras cosas para asegurar su compatibilidad, y por tanto el problema se concentra en la elección del lagrangiano de este principio variacional.

Hay muchos lagrangianos posibles y, aun manteniéndose bajo ciertas condiciones de simplicidad, no es posible conseguir una unicidad (como en el caso de la Relatividad General) que avale ciertas ecuaciones con preferencia a las demás. Einstein [4] propone como criterios posibles lo que llama «simetría pseudo-hermitiana» o la condición de λ-invariancia, pero aun con estas condiciones la indeterminación subsiste.

En trabajos anteriores (Santaló [17, 18, 19, 20]) hemos considerado el problema de ordenar todos los lagrangianos posibles, dentro de ciertas condiciones de simplicidad, y de hallar las ecuaciones del campo en una forma general que comprenda a todos ellos. De esta manera, si se aceptan las condiciones de simplicidad establecidas, las ecuaciones del campo deben elegirse entre unas ecuaciones generales que obtenemos explícitamente y que dependen únicamente de ciertas constantes. Dando valores diversos a estas constantes se tienen distintas posibilidades. Con ello se tiene la ventaja de tener en forma conjunta las ecuaciones del campo de varias teorías. Incluso, suponiendo *a posteriori* que la conexión o el tensor fundamental son simétricos, se tienen las ecuaciones de varias de las teorías simétricas conocidas.

La solución de las ecuaciones del campo es un problema que no intentamos. Para cada conjunto particular de constantes elegidas la solución posiblemente se podría llevar a cabo por los métodos (complicados) con que Tonnelat [25] y Hlàvaty [7] resolvieron las ecuaciones del campo unificado de Einstein de 1950. Más factible parece ser limitarse al caso de soluciones con ciertas simetrías, por ejemplo simetría esférica o cinlindrica, o bien ensayar soluciones aproximadas. Pero ello origina otro tipo de problemas, no demasiado atractivos desde el punto de vista matemático por la complejidad de su expresión en fórmulas, ni demasiado promisorios en cuanto a aplicaciones físicas. Por esto no entramos en este trabajo en el problema de resolver las ecuaciones generales del campo. Creemos que su planteo y expresión en forma relativamente simple, dada su generalidad, es ya un paso que puede tener ciertos interés, por lo menos desde el punto de vista de la sistematización: muchas variantes, algunas conocidas y otras por ensayar, están contenidas como casos particulares de las ecuaciones generales que damos.

Para ser completos, incluimos algunos de los resultados obtenidos en otros lugares que ya mencionamos, pero la exposición de conjunto y muchos detalles complementarios son nuevos.

2. Notaciones y fórmulas conocidas

En todo el trabajo nos referiremos a una variedad diferenciable M, de dimensión n, conexa y de clase C^∞. Para el espacio-tiempo, que es el caso que interesa en física, es $n = 4$, pero como no hay apenas diferencia con el tratamiento general, supondremos siempre que se trata de una variedad diferenciable de dimensión n.

Supondremos que en M están dados dos objetos geométricos, de clase C^2, a saber: a) Un tensor de segundo orden, no necesariamente simétrico, representado por g_{ij} tal que

$$g = \det (g_{ij}) \neq 0. \tag{2.1}$$

Puesto que g, no siendo nulo en ningún punto, tiene signo constantes sobre M, supondremos $g > 0$. Si fuera $g < 0$, en las expresiones en que aparezca la raíz cuadrada de g pondríamos $-g$ y todas las fórmulas seguirían valiendo igual.

b) Una conexión afín Γ^i_{jk}, no necesariamente simétrica.

A partir de g_{ij} se construye el tensor contravariante g^{ij} por las relaciones usuales

$$g_{ij}\, g^{ik} = g_{ji}\, g^{ki} = \delta_j^k, \tag{2.2}$$

donde δ_j^k es el tensor de Kronecker.

En vez de los tensores g_{ij}, g^{ij} es cómodo utilizar las densidades tensoriales

$$\mathfrak{g}_{ij} = \sqrt{g}\, g_{ij}, \qquad \mathfrak{g}^{ij} = \sqrt{g}\, g^{ij}. \tag{2.3}$$

De estas relaciones se deduce, inversamente,

$$g_{ij} = \mathcal{G}_{ij}\, G^{-1/(n+2)} \qquad g^{ij} = \mathcal{G}^{ij}\, G^{-1/(n+2)}, \tag{2.4}$$

donde

$$G = \det(\mathcal{G}_{ij}) = g^{(n+2)/2}. \tag{2.5}$$

A partir de la conexión $\Gamma^i{}_{jk}$ se deduce la conexión simétrica

$$\Delta^i{}_{jk} = \frac{1}{2}(\Gamma^i{}_{jk} + \Gamma^i{}_{kj}) \tag{2.6}$$

y el tensor de torsión

$$S^i{}_{jk} = \frac{1}{2}(\Gamma^i{}_{jk} - \Gamma^i{}_{kj}), \tag{2.7}$$

el cual, por contracción, da el vector

$$S_j = S^i{}_{ji}. \tag{2.8}$$

Aunque después veremos todos los tensores de segundo orden que se pueden formar con la conexión dada (bajo ciertas condiciones de simplicidad), conviene que recordemos algunos de ellos. Por contracción del tensor de curvatura

$$R^m{}_{ihs} = \Gamma^m{}_{ih,s} - \Gamma^m{}_{is,h} + \Gamma^t{}_{ih}\Gamma^m{}_{ts} - \Gamma^t{}_{is}\Gamma^m{}_{th} \tag{2.9}$$

resulta, en primer lugar, el tensor de Ricci:

$$R_{ih} = R^m{}_{ihm} = \Gamma^m{}_{ih,m} - \Gamma^m{}_{im,h} + \Gamma^m{}_{tm}\Gamma^t{}_{ih} - \Gamma^m{}_{th}\Gamma^t{}_{im}. \tag{2.10}$$

donde las comas indican, como es costumbre, derivación parcial ordinaria.

Otra contracción del tensor de curvatura es

$$R^*{}_{ih} = R^m{}_{mih} = \Delta^m{}_{mi,h} - \Delta^m{}_{mh,i} + S_{h,i} - S_{i,h}. \tag{2.11}$$

Puesto que $S_{h,i} - S_{i,h}$ es un tensor (rotor) de (2.11) se deduce que

$$\Delta_{ih} = \Delta^m{}_{mi,h} - \Delta^m{}_{mh,i}. \tag{2.12}$$

es también un tensor (antisimétrico).

Debemos observar que muchos autores toman el tensor de Ricci con el signo cambiado. No hay unanimidad al respecto, pero ello es sólo cuestión de convenio que no influye en los resultados que siguen. Unicamente debe tenerse ello en cuenta al comparar fórmulas de un autor con las de otro.

La conexión $\Gamma^i{}_{jk}$ da lugar a una derivación covariante que indicaremos siempre con punto y coma. Einstein [4] ha introducido una derivación covariante mixta o polarizada, que para el caso único que nos interesa de las densidades tensoriales de segundo orden se define por la fórmula

$$\mathcal{G}^{ik}{}_{|s} = \mathcal{G}^{ik}{}_{,s} + \Gamma^i{}_{ms}\,\mathcal{G}^{mk} + \Gamma^k{}_{sm}\,\mathcal{G}^{im} - \Delta^m{}_{sm}\,\mathcal{G}^{ik}. \tag{2.13}$$

Indicaremos esta derivada covariante mixta con una barra, tal como figura en (2.13).

Esta derivada mixta exige ciertas precauciones, debido a que hay que tener muy en cuenta el orden de los índices. Comparando con la derivada covariante ordinaria se tienen los resultados siguientes, de mucha utilidad:

$$\mathcal{G}^{ik}{}_{|s} = \mathcal{G}^{ik}{}_{;s} + 2\,\mathrm{S}^k{}_{sm}\,\mathcal{G}^{im} - \mathrm{S}_s\,\mathcal{G}^{ik} \tag{2.14}$$

$$\mathcal{G}^{ik}{}_{|k} = \mathcal{G}^{ik}{}_{;k} - 3\,\mathrm{S}_m\,\mathcal{G}^{im} = \mathcal{G}^{ik}{}_{,k} + \Gamma^i{}_{mk}\,\mathcal{G}^{mk} - \mathrm{S}_m\,\mathcal{G}^{im} \tag{2.15}$$

$$\mathcal{G}^{ki}{}_{|k} = \mathcal{G}^{ki}{}_{;k} + 2\,\mathrm{S}^i{}_{km}\,\mathcal{G}^{km} - \mathrm{S}_k\,\mathcal{G}^{ki} = \mathcal{G}^{ki}{}_{,k} + \Gamma^i{}_{mk}\,\mathcal{G}^{mk} + \mathrm{S}_m\,\mathcal{G}^{mi}. \tag{2.16}$$

Si se descompone $\mathcal{G}^{ik}$ en su parte simétrica y antisimétrica

$$\mathcal{H}^{ik} = \frac{1}{2}(\mathcal{G}^{ik} + \mathcal{G}^{ki}), \qquad \mathfrak{I}^{ik} = \frac{1}{2}(\mathcal{G}^{ik} - \mathcal{G}^{ki}) \tag{2.17}$$

se observa la fórmula

$$\mathcal{G}^{ik}{}_{|k} - \mathcal{G}^{ki}{}_{|k} = 2\,\mathfrak{I}^{ik}{}_{,k} - 2\,\mathrm{S}_k\,\mathcal{H}^{ik}. \tag{2.18}$$

Respecto del tensor Δ_{ik} definido por (2.12) conviene tener en cuenta lo siguiente. Si existe una densidad tensorial $\mathcal{G}^{ij}$ tal que

$$\mathcal{G}^{ik}{}_{|s} = 0. \tag{2.19}$$

de la cual, multiplicando por $\mathcal{G}_{ik}$ y contrayendo se deduce

$$\mathcal{G}_{ik}\,\mathcal{G}^{ik}{}_{,s} + \Gamma^i{}_{is} + \Gamma^k{}_{sk} - n\,\Delta^m{}_{sm} = 0, \tag{2.20}$$

o sea,

$$\mathcal{G}_{ik}\, \mathcal{G}^{ik}{}_{,s} = (n-2)\, \Delta^m{}_{sm}, \tag{2.21}$$

teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial G}{\partial x_s} = \mathcal{G}_{ik,s}\, G\, \mathcal{G}^{ik} = -G\, \mathcal{G}_{ik}\, \mathcal{G}^{ik}{}_{,s}, \tag{2.22}$$

resulta

$$\Delta^m{}_{sm} = -\frac{1}{n-2}\, \frac{\partial \log G}{\partial x_s} \tag{2.23}$$

Por tanto: *siempre que exista una densidad tensorial contravariante $\mathcal{G}^{ih}$ tal que se cumpla* (2.19), *es*

$$\Delta_{ik} = 0. \tag{2.24}$$

3. El tensor T_{ik}

Según el teorema general de equivalencia para espacios de conexión afín, los únicos tensores independientes en ellos son los tensores de curvatura y de torsión, junto con sus derivadas covariantes y sus contracciones (ver, por ejemplo, Thomas [24, pp. 204-205]). Teniendo en cuenta las contracciones (2.10) y (2.11) del tensor de curvatura y que

$$S_{i,k} - S_{k,i} = S_{i;k} - S_{k;i} + 2\, S_m\, S^m{}_{ik}$$

tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.— *En un espacio afín con la conexión* $\Gamma^i{}_{jk} = \Delta^i{}_{jk} + S^i{}_{jk}$ *los únicos tensores de segundo orden que satisfacen las condiciones:* a) *Dependen únicamente de* $\Gamma^i{}_{jk}$ *y de sus derivadas parciales de primer orden;* b) *Como funciones de* $\Gamma^i{}_{jk}$ *son, a lo sumo, de segundo grado, son los ocho tensores siguientes:*

$$R_{ik},\ \Delta_{ik},\ S^m{}_{ik;m},\ S^q{}_{ir}\, S^r{}_{kq},\ S_{i;k},\ S_{k;i},\ S_i\, S_k,\ S_m\, S^m{}_{ik}. \tag{3.1}$$

Por tanto, el tensor más general que cumple las condiciones de simplicidad a), b) anteriores es

$$T_{ik} = \alpha R_{ik} + \beta \Delta_{ik} + \gamma S^m{}_{ik;m} + \delta S^q{}_{ir} S^r{}_{kq} + + \epsilon S_{i;k} + \varphi S_{k;i} + \mu S_m S^m{}_{ik} + \nu S_i S_k. \tag{3.2}$$

donde α, β, γ, δ, ϵ, φ, μ, ν son constantes arbitrarias.

Como ejemplos de tensores de este tipo que han sido considerados en la literatura, tenemos:

i) La parte antisimétrica del tensor de Ricci:

$$R_{[ik]} = \frac{1}{2} \Delta_{ki} + S^m{}_{ik;m} - \frac{1}{2} (S_{i;k} - S_{k;i}) - S_m S^m{}_{ik}. \tag{3.3}$$

que corresponde, por tanto, a

$$\alpha = 0,\ \beta = -\frac{1}{2},\ \gamma = 1,\ \epsilon = -\frac{1}{2},\ \varphi = \frac{1}{2},\ \mu = -1,\ \delta = \nu = 0.$$

ii) La parte simétrica del tensor de Ricci:

$$R_{(ik)} = R_{ik} - R_{[ik]}, \tag{3.4}$$

que corresponde a

$$\alpha = 1,\ \beta = \frac{1}{2},\ \gamma = -1,\ \epsilon = \frac{1}{2},\ \varphi = -\frac{1}{2},\ \mu = 1,\ \delta = \nu = 0.$$

iii) El tensor de Einstein, utilizado en su teoría del campo unificado de 1950 [4]:

$$E_{ik} = -\frac{1}{2} (\Delta^m{}_{im,k} + \Delta^m{}_{km,i}) + \Gamma^m{}_{ik,m} + \Gamma^s{}_{ik} \Delta^m{}_{sm} - \Gamma^m{}_{is} \Gamma^s{}_{mk} =$$

$$= R_{ik} + S_{i;k}(\Delta) - S_m S^m{}_{ik} + \frac{1}{2} \Delta_{ik}, \tag{3.5}$$

que es fácil ver corresponde a

$$\alpha = 1,\ \beta = \frac{1}{2},\ \epsilon = 1,\ \gamma = \delta = \varphi = \mu = \nu = 0.$$

La notación $S_{i;k}(\Delta)$ indica que la derivada covariante se refiere a la conexión $\Delta^i{}_{jk}$. Obsérvese que la parte antisimétrica del tensor de Einstein es

$$E_{[ik]} = S^m{}_{ik;m}(\Delta). \qquad (3.6)$$

iv) El tensor de Ricci con la conexión $\Gamma^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{kj}$:

$$\bar{R}_{ik} = \Gamma^m{}_{ki,m} - \Gamma^m{}_{mi,k} + \Gamma^m{}_{ms}\,\Gamma^s{}_{ki} - \Gamma^m{}_{ks}\,\Gamma^s{}_{mi}, \qquad (3.7)$$

que corresponde a

$$\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = -2,\ \delta = 0,\ \epsilon = 2,\ \phi = 0,\ \mu = 4,\ \nu = 0.$$

Otros varios tensores han sido considerados en Santaló [17, 19]. Todos ellos caen dentro de la expresión general (3.2).

Para una teoría puramente afín, es decir, una teoría en la cual la variedad diferenciable estuviera provista únicamente de una conexión afín $\Gamma^i{}_{jk}$, unas ecuaciones de campo que sustituyeran a las $R_{ik} = 0$ de la Relatividad General (en el vacío), manteniendo sus condiciones de simplicidad, serían las que anularan a T_{ik} cualesquiera que fueran las constantes $\alpha, \beta, \ldots, \nu$.

Para ello se tiene el siguiente teorema:

TEOREMA 2.—*Las condiciones necesarias y suficientes para que se anulen todos los tensores T_{ih} (3.2) cualesquiera que sean las constantes $\alpha, \beta, \ldots, \nu$, son*

$$R_{ik} = 0,\ \Delta_{ik} = 0,\ S_i = 0,\ S^q{}_{ir}\,S^r{}_{hq} = 0. \qquad (3.8)$$

En efecto, según la forma de T_{ik} los único que hay que demostrar es que con las condiciones (3.8) se anula $S^m{}_{ik;m}$. Esto es una consecuencia de la expresión (3.3) de la parte antisimétrica del tensor de Ricci y del hecho de que la anulación de un tensor exige la anulación de su parte simétrica y de su parte antisimétrica.

Obsérvese que las condiciones (3.8), por llevar consigo la anulación de todos los tensores T_{ik}, anulan también al tensor de Einstein E_{ik} (3.5). Dada la forma de este tensor, es inmediato ver que el sistema (3.8) es equivalente al

$$E_{ik} = 0,\ S_i = 0,\ \Delta_{ik} = 0,\ S^q{}_{ir}\,S^r{}_{qk} = 0. \qquad (3.9)$$

Esto permite observar, de paso, que si se cumple el llamado «sistema fuerte» de Einstein (ver Einstein [4], Hlavatý [7]), que es

$$E_{ih} = 0, \; S_i = 0, \; \mathcal{G}^{ih}{}_{|s} = 0, \tag{3.10}$$

teniendo en cuenta (2.24) resulta:

Para que las soluciones del sistema fuerte de Einstein (3.10) *anulen a todos los tensores T_{ih} es necesario y suficiente que se cumplan, además, las condiciones*

$$S^q{}_{ir} \, S^r{}_{hq} = 0. \tag{3.11}$$

Esto hace pensar que el estudio de los espacios en los cuales se cumplen las condiciones (3.11) puede tener cierto interés.

4. Variación de los tensores básicos

Nuestro objeto es obtener las ecuaciones del campo a partir de un principio variacional en el que figure el tensor T_{ih}. Para ello necesitaremos la expresión de las variaciones de los tensores (3.1) que componen T_{ih}, supuesta una variación $\delta \, \Gamma^i{}_{kj}$ de los coeficientes de la conexión afín.

Puesto que la diferencia de conexiones afines es un tensor, las variaciones $\delta \, \Gamma^i{}_{jk}$ son componentes de un tensor y por tanto tiene sentido la derivada covariante del mismo. Tenemos así:

$$(\delta \, \Gamma^m{}_{ih})_{;s} = (\delta \, \Gamma^m{}_{ih})_{,s} + \Gamma^m{}_{ts} \, \delta \, \Gamma^t{}_{ih} - \Gamma^t{}_{is} \, \delta \, \Gamma^m{}_{th} - \Gamma^t{}_{hs} \, \delta \, \Gamma^m{}_{it} \tag{4.1}$$

$$(\delta \, \Gamma^m{}_{is})_{;h} = (\delta \, \Gamma^m{}_{is})_{,h} + \Gamma^m{}_{th} \, \delta \, \Gamma^t{}_{is} - \Gamma^t{}_{ih} \, \delta \, \Gamma^m{}_{ts} - \Gamma^t{}_{sh} \, \delta \, \Gamma^m{}_{it}. \tag{4.2}$$

Observemos que de (2.9) se deduce, aplicando que el operador δ conmuta con la derivación parcial ordinaria,

$$\begin{aligned} \delta \, R^m{}_{ihs} = {} & (\delta \, \Gamma^m{}_{ih})_{,s} - (\delta \, \Gamma^m{}_{is})_{,h} + \Gamma^m{}_{ts} \, \delta \, \Gamma^t{}_{ih} + \Gamma^t{}_{ih} \, \delta \, \Gamma^m{}_{ts} - \\ & - \Gamma^m{}_{th} \, \delta \, \Gamma^t{}_{is} - \Gamma^t{}_{is} \, \delta \, \Gamma^m{}_{th}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

o sea, aplicando (4.1) y (4.2)

$$\delta \, R^m{}_{ihs} = (\delta \, \Gamma^m{}_{ih})_{;s} - (\delta \, \Gamma^m{}_{is})_{;h} - 2 \, S^t{}_{sh} \, \delta \, \Gamma^m{}_{it} \tag{4.4}$$

Por contracción deducimos

$$\delta R_{ih} = (\delta \Gamma^m{}_{ih})_{;m} - (\delta \Gamma^m{}_{im})_{;h} - 2 S^t{}_{mh} \delta \Gamma^m{}_{it}. \tag{4.5}$$

De manera análoga, escribiendo la expresión de $S^m{}_{ih;m}$ y tomando la variación de ambos miembros, resulta

$$\delta (S^m{}_{ih;m}) = (\delta S^m{}_{ih})_{;m} + S^t{}_{ih} \delta \Gamma^m{}_{tm} - S^m{}_{th} \delta \Gamma^t{}_{im} - S^m{}_{it} \delta \Gamma^t{}_{hm}. \tag{4.6}$$

Por el mismo procedimiento resulta

$$\delta (S_{i;h}) = (\delta S_i)_{;h} - S_t \Gamma^t{}_{ih}. \tag{4.7}$$

5. El principio variacional

Vamos a partir del principio variacional análogo al de Einstein [4] o Schrödinger [21, 22] (ver también Tonnelat [25] y Lichnerowicz [11]), pero con el tensor general T_{ih} en vez del tensor de Ricci.

Consideremos un dominio D de la variedad diferenciable M (el espacio-tiempo en el caso de la física, pero que aquí suponemos de dimensión n) y la integral

$$I = \int_D \mathcal{G}^{ih} T_{ih} \, d\tau \qquad (d\tau = dx_1 \, dx_2 \dots dx_n). \tag{5.1}$$

siendo $x_1, x_2, \dots, x_n$ las coordenadas locales de cada punto. Puesto que el integrando es una densidad escalar, la integral I es invariante por cambios de coordenadas, y por tanto es admisible como lagrangiano.

El principio variacional que postulamos para determinar las ecuaciones del campo es el siguiente:

Las ecuaciones del campo son las que hacen $\delta I = 0$ *para cualquier variación de las componentes* $\mathcal{G}^{ih}$ *y* $\Gamma^i{}_{jk}$, *supuestas independientes entre sí y sujetas únicamente a la condición de anularse sobre el borde* ∂D *de* D.

Tenemos

$$\delta I = \int_D (\mathcal{G}^{ih} \delta T_{ih} + T_{ih} \, \delta \mathcal{G}^{ih}) \, d\tau. \tag{5.2}$$

Vamos a calcular el primer sumando a partir de la expresión de T_{ik} (3.2), teniendo en cuenta las variaciones de los tensores que componen T_{ik}.

1. Para aplicar (4.5) tenemos:

$$\int_D \mathcal{G}^{ik} (\delta \Gamma^m{}_{ik})_{;m} \, d\tau = \int_D [(\mathcal{G}^{ik} \delta \Gamma^m{}_{ik})_{;m} - \mathcal{G}^{ik}{}_{;m} \delta \Gamma^m{}_{ik}] \, d\tau.$$

El primer sumando de la última integral es una densidad contravariante y, por tanto, aplicando la fórmula general

$$\mathfrak{A}^m{}_{;m} = \mathfrak{A}^m{}_{,m} + 2 S_m \mathfrak{A}^m. \tag{5.3}$$

resulta

$$\int_D \mathcal{G}^{ik} (\delta \Gamma^m{}_{ik})_{;m} \, d\tau =$$

$$= \int_D [(\mathcal{G}^{ik} \delta \Gamma^m{}_{ik})_{,m} + 2 S_m (\mathcal{G}^{ik} \delta \Gamma^m{}_{ik}) - \mathcal{G}^{ik}{}_{;m} \delta \Gamma^m{}_{ik}] \, d\tau. \tag{5.4}$$

Aplicando la fórmula de Stokes al primer sumando de la integral del segundo miembro y teniendo en cuenta que consideramos variaciones de la conexión que se anulan sobre ∂D, resulta

$$\int_D \mathcal{G}^{ik} (\delta \Gamma^m{}_{ik})_{;m} \, d\tau = \int_D (2 S_m \mathcal{G}^{ik} - \mathcal{G}^{ik}{}_{;m}) \, \delta \Gamma^m{}_{ik} \, d\tau. \tag{5.5}$$

Análogamente se tiene

$$\int_D \mathcal{G}^{ik} (\delta \Gamma^m{}_{im})_{;k} \, d\tau = \int_D (2 S_t \mathcal{G}^{it} - \mathcal{G}^{it}{}_{;t}) \, \delta^k{}_m \, \delta \Gamma^m{}_{ik} \, d\tau. \tag{5.6}$$

Con esto, de acuerdo con (4.5), queda

$$\int_D \mathcal{G}^{ik} \delta R_{ik} \, d\tau = \int_D (2 S_m \mathcal{G}^{ik} - \mathcal{G}^{ik}{}_{;m} - 2 S_t \mathcal{G}^{it} \delta^k{}_m +$$

$$+ \mathcal{G}^{it}{}_{;t} \delta^k{}_m - 2 \mathcal{G}^{it} S^k{}_{mt}) \, \delta \Gamma^m{}_{ik} \, d\tau. \tag{5.7}$$

o bien, mediante derivadas covariantes mixtas

$$\int_D \mathcal{G}^{ih}\, \delta\, R_{ih}\, d\tau = \int_D [-\mathcal{G}^{ih}{}_{|m} + S_m\, \mathcal{G}^{ih} + (\mathcal{G}^{it}{}_{|t} + S_t\, \mathcal{G}^{it})\, \delta^h_m]\, \delta\, \Gamma^m{}_{ih}\, d\tau. \quad (5.8)$$

2. Se tiene

$$\delta\, \Delta_{ih} = \frac{1}{2}\, [(\delta\, \Gamma^m{}_{im})_{,h} + (\delta\, \Gamma^m{}_{mi})_{,h} - (\delta\, \Gamma^m{}_{hm})_{,i} - (\delta\, \Gamma^m{}_{mh})_{,i}]$$

Para cada sumando tenemos una expresión del tipo

$$\int_D \mathcal{G}^{ih}\, (\delta\, \Gamma^m{}_{im})_{,h}\, d\tau = \int_D [(\mathcal{G}^{ih}\, \delta\, \Gamma^m{}_{im})_{,h} - \mathcal{G}^{ih}{}_{,h}\, \delta\, \Gamma^m{}_{im}]\, d\tau =$$

$$= - \int_D \mathcal{G}^{it}{}_{,t}\, \delta^h_m\, \delta\, \Gamma^m{}_{ih}\, d\tau,$$

donde hemos aplicado, como antes, que el primer sumando de la segunda igualdad es una integral sobre ∂ D y por tanto es nula por suponer que lo son las variaciones de $\Gamma^m{}_{im}$ sobre este borde.

Juntando las expresiones análogas a ésta, correspondientes a los demás términos de $\delta\, \Delta_{ih}$, resulta

$$\int_D \mathcal{G}^{ih}\, \delta\, \Delta_{ih}\, d\tau = \int_D (\mathfrak{G}^{it}{}_{,t}\, \delta^h_m + \mathfrak{G}^{th}{}_{,t}\, \delta^i_m)\, \delta\, \Gamma^m{}_{ih}\, d\tau. \quad (5.9)$$

3. El mismo método, aplicando (4.6), tras algunas transformaciones, da

$$\int_D \mathcal{G}^{ih}\, \delta\, S^m{}_{ih;m}\, d\tau = \int_D (-\mathfrak{G}^{ih}{}_{|m} + S_m\, \mathfrak{G}^{ih} + \mathfrak{G}^{is}\, S^t{}_{ts}\, \delta^h_m)\, \delta\, \Gamma^m{}_{ih}\, d\tau. \quad (5.10)$$

4. Análogamente, con las notaciones (2.17) resulta

$$\int_D \mathcal{G}^{ih}\, \delta\, (S^q{}_{ir}\, S^r{}_{hq})\, d\tau = \int_D (\mathcal{H}^{ti}\, S^h{}_{tm} - \mathcal{H}^{th}\, S^i{}_{tm})\, \delta\, \Gamma^m{}_{ih}\, d\tau. \quad (5.11)$$

5. Teniendo en cuenta (4.7), después de algunos cálculos, se tiene

$$\int_D \mathcal{G}^{ih}\,\delta\,(S_{i;\,h})\,d\tau = \int_D \Big[-\frac{1}{2}\,(\mathcal{G}^{it}{}_{,t} + \Gamma^{i}{}_{st}\,\mathcal{G}^{st})\,\delta^{h}{}_{m} + $$

$$+ \frac{1}{2}\,(\mathcal{G}^{ht}{}_{,t} + \Gamma^{h}{}_{st}\,\mathcal{G}^{st})\,\delta^{i}{}_{m} - \mathcal{G}^{ih}\,S_{m}\Big]\,\delta\,\Gamma^{m}{}_{ih}\,d\tau. \tag{5.12}$$

y análogamente

$$\int_D \mathcal{G}^{ih}\,\delta\,(S_{h;\,i})\,d\tau = \int_D \Big[-\frac{1}{2}\,(\mathcal{G}^{ti}{}_{,t} + \Gamma^{i}{}_{st}\,\mathcal{G}^{ts})\,\delta^{h}{}_{m} + $$

$$+ \frac{1}{2}\,(\mathcal{G}^{th}{}_{,t} + \Gamma^{h}{}_{st}\,\mathcal{G}^{ts})\,\delta^{i}{}_{m} - \mathcal{G}^{hi}\,S_{m}\Big]\,\delta\,\Gamma^{m}{}_{ih}\,d\tau. \tag{5.13}$$

6. Finalmente, por cálculo directo, se obtiene

$$\int_D \mathcal{G}^{ih}\,\delta\,(S_i\,S_h)\,d\tau = \int_D (\mathcal{H}^{it}\,S_t\,\delta^{h}{}_{m} - \mathcal{H}^{ht}\,S_t\,\delta^{i}{}_{m})\,\delta\,\Gamma^{m}{}_{ih}\,d\tau \tag{5.14}$$

$$\int_D \mathcal{G}^{ih}\,\delta\,(S_m\,S^{m}{}_{ih})\,d\tau = \int_D \Big[\mathcal{F}^{ih}\,S_m + \frac{1}{2}\,\mathcal{F}^{rs}\,S^{i}{}_{rs}\,\delta^{h}{}_{m} - $$

$$- \frac{1}{2}\,\mathcal{F}^{rs}\,S^{h}{}_{rs}\,\delta^{i}{}_{m}\Big]\,\delta\,\Gamma^{m}{}_{ih}\,d\tau. \tag{5.15}$$

Juntando todas las expresiones anteriores para sustituirlas en (5.2), si se quiere que sea $\delta\,I = 0$ para toda variación $\delta\,\Gamma^{m}{}_{ih}$ y toda variación $\delta\,\mathcal{G}^{ih}$ (que se anulen sobre $\partial\,D$), debe ser

$$\mathcal{K}^{qs}{}_{r} = 0, \qquad T_{ih} = 0. \tag{5.16}$$

siendo

$$\mathcal{K}^{qs}{}_{r} \equiv \alpha\,(-\,\mathcal{G}^{qs}{}_{|r} + \mathcal{G}^{qs}\,S_r + (\mathcal{G}^{qt}{}_{,t} + \Gamma^{q}{}_{mt}\,\mathcal{G}^{mt})\,\delta^{s}{}_{r}) -$$

$$-\,\beta\,(\mathcal{F}^{qt}{}_{,t}\,\delta^{s}{}_{r} + \mathcal{F}^{st}{}_{,t}\,\delta^{q}{}_{r}) + \gamma\,(-\,\mathcal{F}^{qs}{}_{|r} + \mathcal{F}^{ih}\,S^{q}{}_{ih}\,\delta^{s}{}_{r} + \mathcal{F}^{qs}\,S_r) +$$

$$+\,\delta\,(\mathcal{H}^{qt}\,S^{s}{}_{tr} - \mathcal{H}^{st}\,S^{q}{}_{tr}) + \varepsilon\,\Big\{-\frac{1}{2}\,(\mathcal{G}^{qt}{}_{,t} + \mathcal{G}^{ih}\,\Gamma^{q}{}_{ih})\,\delta^{s}{}_{r} +$$

$$+\frac{1}{2}\,(\mathcal{G}^{st}{}_{,t} + \mathcal{G}^{ih}\,\Gamma^{s}{}_{ih})\,\delta^{q}{}_{r} - \mathcal{G}^{qs}\,S_r\Big\} + \phi\,\Big\{\frac{1}{2}\,(-\,\mathcal{G}^{tq}{}_{,t} - \mathcal{G}^{ih}\,\Gamma^{q}{}_{ih})\,\delta^{s}{}_{r} +$$

$$+\frac{1}{2}\,(\mathcal{G}^{ts}{}_{,t} + \mathcal{G}^{ih}\,\Gamma^{s}{}_{hi})\,\delta^{q}{}_{r} - \mathcal{G}^{sq}\,S_r\Big\} + \mu\Big(\frac{1}{2}\,\mathcal{F}^{ih}\,S^{q}{}_{ih}\,\delta^{s}{}_{r} -$$

$$-\frac{1}{2}\,\mathcal{F}^{ih}\,S^{s}{}_{ih}\,\delta^{q}{}_{r} + \mathcal{F}^{qs}\,S_r\Big) + \nu\,(\mathcal{H}^{qt}\,S_t\,\delta^{s}{}_{r} - \mathcal{H}^{st}\,S_t\,\delta^{q}{}_{r}). \tag{5.17}$$

6. Las ecuaciones del campo

Las ecuaciones del campo son las (5.16). Las incógnitas son las n^2 componentes $\mathcal{G}^{ih}$ y las n^3 componentes $\Gamma^i{}_{jk}$. Veamos algunas consecuencias del sistema (5.16).

Teorema 3. — *Para que sea* $\mathcal{K}_r{}^{qs} = 0$, *cualesquiera que sean* ***las constantes*** $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ (*suponiendo* det $(\mathcal{H}^{iq}) \neq 0$), *es necesario y* ***suficiente*** *que se cumplan las condiciones*

$$\mathcal{G}^{qs}{}_{|r} = 0, \qquad S^q{}_{ir}\,\mathcal{G}^{si} - S^s{}_{ir}\,\mathcal{G}^{iq} = 0. \tag{6.1}$$

Demostración.—Por cálculo directo se obtiene que la parte antisimétrica de $\mathcal{G}^{qs}{}_{|r}$ es

$$[\mathcal{G}^{qs}{}_{|r}] = \mathfrak{G}^{qs}{}_{|r} + S^q{}_{ir}\,\mathcal{G}^{si} - S^s{}_{ir}\,\mathcal{G}^{iq}. \tag{6.2}$$

Por tanto, de (6.1) se deduce

$$\mathfrak{G}^{qs}{}_{|r} = 0, \qquad \text{en particular} \quad \mathfrak{G}^{qi}{}_{|i} = 0. \tag{6.3}$$

Escribiendo que son nulas la parte antisimétrica y la parte simétrica de la segunda densidad tensorial (6.1), resulta

$$S^q{}_{ir}\,\mathcal{H}^{is} - S^s{}_{ir}\,\mathcal{H}^{iq} = 0, \qquad S^q{}_{ir}\,\mathfrak{G}^{si} + S^s{}_{ir}\,\mathfrak{G}^{qi} = 0. \tag{6.4}$$

Haciendo $r = s$ en la primera de estas ecuaciones, resulta $S_i\,\mathcal{H}^{iq} = 0$, de donde, habiendo supuesto det $(\mathcal{H}^{ij}) \neq 0$, se deduce

$$S_i = 0. \tag{6.5}$$

Haciendo $r = s$ en la segunda ecuación (6.4), resulta

$$S^q{}_{ir}\,\mathfrak{G}^{ri} + S_i\,\mathfrak{G}^{qi} = 0. \tag{6.6}$$

Teniendo en cuenta la igualdad (2.15) aplicada a $\mathfrak{G}^{qk}{}_{|k}$, de (6.6) y (6.3) se deduce

$$\mathfrak{G}^{qt}{}_{,t} = 0. \tag{6.7}$$

Además, de (6.5) y (6.6) resulta

$$S^q{}_{ir}\,\mathfrak{G}^{ri} = 0. \tag{6.8}$$

Finalmente, siendo $S_i = 0$, las fórmulas (2.15) y (2.16), junto con la primera ecuación (6.1) dan

$$\mathcal{G}^{ih}{}_{|h} = G^{ih}{}_{,h} + \Gamma^{i}{}_{mh}\,\mathcal{G}^{mh} = 0, \quad \mathcal{G}^{hi}{}_{|h} = \mathcal{G}^{hi}{}_{,h} + \Gamma^{i}{}_{mh}\,\mathcal{G}^{mh} = 0. \qquad (6.9)$$

Juntando todos estos resultados es inmediato comprobar que $\mathcal{K}_r{}^{qs} = 0$, de acuerdo con el nunciado del teorema.

Los teoremas 2 y 3 permiten enunciar:

Para que se cumplan las ecuaciones del campo (5.16) *cualesquiera que sean las constantes* $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ (*suponiendo* det $(\mathcal{H}^{ij}) \neq 0$), *es necesario y suficiente que se cumplan las ecuaciones*

$$\mathcal{G}^{qs}{}_{|r} = 0, \qquad S^{q}{}_{ir}\,\mathcal{G}^{si} - S^{s}{}_{ir}\,\mathcal{G}^{iq} = 0, \quad S^{q}{}_{ir}\,S^{r}{}_{hq} = 0, \quad R_{ih} = 0. \qquad (6.10)$$

Este sistema, por ser el número de sus ecuaciones superior al número de incógnitas ($= n^2 + n^3$) es probablemente incompatible. Esto prueba que una teoría del campo unificado basada en los principios de la que estamos considerando, tendrá siempre cierto grado de arbitrariedad en la elección de sus ecuaciones del campo, arbitrariedad que proviene de los valores posibles para las constantes $\alpha, \beta, \ldots, \nu$.

7. Otras formas de las ecuaciones del campo

Las ecuaciones $\mathcal{K}^{qs}{}_r = 0$ (5.17) son complicadas. Vamos a ver cómo pueden tomar una forma simple introduciendo nuevas conexiones (Santaló [19]).

Escribiendo a partir de (5.17) las ecuaciones $\mathcal{K}^{is}{}_i = 0$ y despejando $\mathcal{H}^{si}{}_{,i}$ de la expresión resultante, se obtiene

$$\frac{1}{2}(n-1)(\epsilon + \phi)\,\mathcal{H}^{si}{}_{,i} = -\mathfrak{g}^{si}{}_{,i}\left[2\alpha - (n+1)\beta + \gamma + \frac{n-1}{2}(\epsilon - \phi)\right]$$

$$- S_i\,\mathfrak{g}^{si}(\epsilon - \phi - \mu) - S^{s}{}_{ih}\,\mathfrak{g}^{ih}\,\frac{n-1}{2}(\epsilon - \alpha - \mu) +$$

$$+ S_i\,\mathcal{H}^{si}(\delta + \epsilon + \phi + (n-1)\nu) - \Delta^{s}{}_{ih}\,\mathcal{H}^{ih}\,\frac{n-1}{2}(\epsilon + \varphi). \qquad (7.1)$$

Escribiendo a partir de (5.17) $\mathcal{K}^{qi}{}_{,i} = 0$ y despejando $\mathcal{H}^{qi}{}_{,i}$ de la expresión resultante, se obtiene:

$$\frac{1}{2}(n-1)(2\alpha - \epsilon - \phi)\,\mathcal{H}^{qi}{}_{,i} =$$

$$= -\mathcal{F}^{qi}{}_{,i}\left[(n-1)\alpha - (n+1)\beta - \gamma - \frac{n-1}{2}(\epsilon - \phi)\right]$$

$$- S_i\,\mathcal{F}^{qi}(2\alpha + 2\gamma - \epsilon + \phi + \mu) - S^q{}_{ih}\,\mathcal{F}^{ih}\,\frac{n-1}{2}(2\alpha + 2\gamma - \epsilon + \phi + \mu) -$$

$$- S_i\,\mathcal{H}^{qi}(2\gamma + \delta - \epsilon - \varphi + (n-1)\nu) - \Delta^q{}_{ih}\,\mathcal{H}^{ih}\,\frac{n-1}{2}(2\alpha - \epsilon - \phi). \quad (7.2)$$

Si estos valores (7.1), (7.2) se sustituyen en la expresión (5.17), resultan las ecuaciones

$$\mathcal{Q}^{qs}{}_{r} = -(\alpha + \gamma)\,\mathcal{F}^{qs}{}_{|r}\,({}^{*}\mathrm{L}) - \alpha\,\mathcal{H}^{qs}{}_{|r}\,({}^{**}\mathrm{L}) +$$

$$+ \frac{1}{n-1}(\gamma + 2\beta)\,\delta^s{}_r\,\mathcal{F}^{qi}{}_{,i} +$$

$$+ \frac{1}{n-1}(-2\alpha + 2\beta - \gamma)\,\delta^q{}_r\,\mathcal{F}^{si}{}_{,i}. \quad (7.3)$$

donde las derivadas mixtas se refieren a las nuevas conexiones

$${}^{*}\mathrm{L}^q{}_{ir} = \Gamma^q{}_{ir} + \frac{1}{n-1}\left(2 - \frac{\epsilon - \phi - \mu}{\alpha + \gamma}\right)\delta_i{}^q\,S_r -$$

$$- \frac{1}{n-1}\,\frac{\epsilon - \phi - \mu}{\alpha + \gamma}\,\delta^q{}_r\,S_i \quad (7.4)$$

$${}^{**}\mathrm{L} = \Gamma^q{}_{ir} + \frac{\delta}{\alpha}\,S^q{}_{ir} + \frac{1}{n-1}\left(2 + \frac{\delta - \epsilon - \phi}{\alpha}\right)\delta_i{}^q\,S_r -$$

$$- \frac{1}{n-1}\,\frac{\delta + \epsilon + \phi}{\alpha}\,\delta^q{}_r\,S_i. \quad (7.5)$$

La introducción de estas conexiones supone

$$\alpha \neq 0, \qquad \alpha + \gamma \neq 0$$

y si estas condiciones no se cumplen, habrá que volver al sistema primitivo (5.17).

Las partes antisimétricas de las conexiones (7.4), (7.5) son los tensores

$$*S^q{}_{ir} = S^q{}_{ir} + \frac{1}{n-1}(\delta_i{}^q S_r - \delta^q{}_r S_i) \tag{7.6}$$

$$**S^q{}_{ir} = \left(1 + \frac{\delta}{\alpha}\right)\left[S^q{}_{ir} + \frac{1}{n-1}(\delta_i{}^q S_r - \delta^q{}_r S_i)\right], \tag{7.7}$$

de los cuales se deduce

$$*S_i = 0, \qquad **S_i = 0. \tag{7.8}$$

Para usos futuros observemos también que las partes simétricas de las conexiones (7.4) y (7.5) con dos índices contraídos, son

$$*\Delta^m{}_{rm} = \Delta^m{}_{rm} + \frac{n+1}{n-1}\,\frac{\alpha + \gamma - \epsilon + \phi + \mu}{\alpha + \gamma}\,S_r. \tag{7.9}$$

$$**\Delta^m{}_{rm} = \Delta^m{}_{rm} + \frac{n+1}{n-1}\,\frac{\alpha - \epsilon - \phi}{\alpha}\,S_r \tag{7.10}$$

A partir de (7.3), haciendo el cálculo, se comprueba que $\mathcal{Q}^{ii}{}_i = \mathcal{Q}^i{}_{ii}$, lo cual quiere decir que a las ecuaciones (7.3) hay que añadir otras n ecuaciones para sustituir estas identidades. Estas ecuaciones pueden ser las que se obtienen igualando el valor de $\mathcal{H}^{qi}{}_{,t}$ obtenido de (7.1) haciendo $s = q$, con el valor deducido de (7.2). El resultado son las ecuaciones

$$2\,\alpha\, A\, \mathfrak{g}^{qi}{}_{,i} + 2\,\alpha\, B\, S_i\, \mathcal{H}^{qi} + (n-1)\, C\, *S^q{}_{ik}\, \mathfrak{g}^{ik} = 0. \tag{7.11}$$

donde

$$A = 2\alpha - (n+1)\beta + (n+1)\beta \frac{\epsilon + \varphi}{\alpha} - \epsilon - n\varphi + \gamma$$

$$B = -\frac{\epsilon + \varphi}{\alpha}(2\alpha - \epsilon - \varphi) - \delta - (n-1)\nu$$

$$C = -(2\varphi + \mu)\alpha - (\epsilon + \varphi)\gamma. \tag{7.12}$$

Queda así que las ecuaciones del campo (5.16) pueden sustituirse por el sistema (7.3), (7.11) y $T_{ih} = 0$.

La introducción de las conexiones (7.4) y (7.5) sirve únicamente para obtener una expresión condensada para las ecuaciones $Q^{ei}{}_r = 0$, pero en realidad no es ninguna simplificación que ayude a resolver el sistema original (5.16). La verdadera simplificación se obtiene en el caso en que las dos conexiones (7.4) y (7.5) sean iguales. Desde el punto de vista matemático esta simplificación parece casi obligada para obtener ecuaciones manejables. Las condiciones para ello son

$$\delta = 0, \quad (2\varphi + \mu)\alpha + (\epsilon + \varphi)\gamma = 0. \tag{7.13}$$

Llamaremos *caso principal* al caso en que esta condición se cumple. Tenemos así:

Atendiendo únicamente al aspecto matemático del problema, una fuerte razón de simplicidad conduce a suponer que se cumplen las condiciones (7.13), *las cuales hacen que las dos conexiones* (7.4) *y* (7.5) *concidan.*

En los números siguientes nos limitaremos casi exclusivamente a este caso principal.

8. Las ecuaciones del campo en el caso principal

Si se cumplen las condiciones (7.13), las dos conexiones (7.4) y (7.5) coinciden con la conexión única:

$$L^e{}_{ir} = \Gamma^e{}_{ir} + \frac{1}{n-1}\left(2 - \frac{\epsilon + \varphi}{\alpha}\right)\delta_i^e S_r - \frac{1}{n-1}\,\frac{\epsilon + \varphi}{\alpha}\,\delta^e_r S_i. \tag{8.1}$$

En este caso conviene introducir la conexión L^{q}_{ir} en la expresión de T_{ih}. Indicando con $T_{ih}(L)$ al tensor T_{ih} referido a la conexión L^{q}_{ir} en vez de la conexión inicial Γ^{q}_{ir} (podríamos poner $T_{ih} = T_{ih}(\Gamma)$), haciendo los cálculos necesarios se obtiene

$$T_{ih}(\Gamma) = T_{ih}(L) + \frac{A}{n-1}(S_{i,h} - S_{h,i}) - \frac{B}{n-1} S_i S_h. \qquad (8.2)$$

donde A y B tienen los valores (7.12).

Tenemos así que en el caso principal, en que se cumplen las condiciones (7.13), las ecuaciones del campo son

$$-\alpha\, \mathcal{G}^{qs}{}_{|r}(L) - \gamma\, \mathfrak{F}^{qs}{}_{|r}(L) + \frac{1}{n-1}(\gamma + 2\beta)\, \delta^{s}_{r}\, \mathfrak{F}^{qi}{}_{,i} +$$

$$+ \frac{1}{n-1}(-2\alpha + 2\beta - \gamma)\, \delta^{q}_{r}\, \mathfrak{F}^{si}{}_{,i} = 0 \qquad (8.3)$$

$$T_{ih}(L) + \frac{A}{n-1}(S_{i,h} - S_{h,i}) - \frac{B}{n-1} S_i S_h = 0 \qquad (8.4)$$

$$A\, \mathfrak{F}^{qi}{}_{,i} + B\, S_i\, \mathcal{H}^{qi} = 0. \qquad (8.5)$$

Las incógnitas son L^{q}_{ir}, S_i, $\mathcal{G}^{qs}$, cuyo número es $n^3 + n + n^2$. Si el primer miembro de (8.3) se representa por $Q^{qs}{}_{r}$ (como en (7.3)), ya dijimos que se puede comprobar la identidad $Q^{is}{}_{i} = Q^{si}{}_{i}$. Por tanto, en realidad hay $n^3 + n^2$ ecuaciones independientes. También las incógnitas se reducen a $n^3 + n^2$, pues se cumplen las n identidades $^{*}S_i = L^{m}{}_{im} - L^{m}{}_{mi} = 0$.

9. Identidades de conservación

Es sabido que siempre que las ecuaciones del campo derivan de un principio variacional, se cumplen ciertas ecuaciones de conservación. En el caso que nos ocupa vamos a obtenerlas por el método usual de H Weyl [27] y Lichnerowicz [11] (una variante del mismo está en Santaló [20]).

Sea D un dominio de la variedad diferenciable que tomamos como base (el espacio-tiempo en el caso de la física) y sea ∂D su contorno. Sea v^i un campo de vectores sobre D tal que los vectores que lo componen y sus derivadas parciales primeras se anulen sobre ∂ D. Tomemos la variación particular de la integral I (5.1) que resulta de la transformación infinitesimal $x_i \to x_i + \varepsilon v^i$. Resulta entonces, por definición de derivada de Lie,

$$\delta I = \varepsilon L_v I, \quad \delta \mathcal{G}^{ih} = \varepsilon L_v \mathcal{G}^{ih}, \quad \delta T_{ih} = \varepsilon L_v T_{ih}, \tag{9.1}$$

donde L_v indica la derivada de Lie respecto del campo v_i. Es sabido (ver, por ejemplo, Yano [28]), que poniendo $\mathfrak{T} = T_{ih} \mathcal{G}^{ih}$ es

$$L_v I = \int_D (\mathfrak{T} v^i)_{,i} \, d\tau \tag{9.2}$$

$$L_v \mathcal{G}^{ih} = v^m \mathcal{G}^{ih}{}_{,m} + \mathcal{G}^{ih} v^m{}_{,m} - \mathcal{G}^{mh} v^i{}_{,m} - \mathcal{G}^{im} v^h{}_{,m} \tag{9.3}$$

$$L_v T_{ih} = v^m T_{ih,m} + T_{mh} v^m{}_{,i} + T_{im} v^m{}_{,h}, \tag{9.4}$$

y por otra parte,

$$L_v I = \int_D (\mathcal{G}^{ih} L_v T_{ih} + T_{ih} L_v \mathcal{G}^{ih}) \, d\tau. \tag{9.5}$$

De (9.2), transformando la integral sobre D en una integral sobre ∂ D, donde v^i se anula por hipótesis, resulta $L_v I = 0$. De (9.3), por anularse v^i y sus derivadas primeras sobre ∂ D, se deduce que las variaciones $\delta \mathcal{G}^{ih} = \varepsilon L_v \mathcal{G}^{ih}$ se anulan sobre ∂ D y por tanto son variaciones admisibles del principio variacional que ha servido para obtener las ecuaciones del campo. Si estas variaciones son nulas, según (9.5) y la relación $L_v I = 0$, resulta

$$\int_D \mathcal{G}^{ih} L_v T_{ih} \, d\tau = 0. \tag{9.6}$$

Según (6.4) tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{ih} L_v T_{ih} &= (\mathcal{G}^{ih} T_{mh} v^m + \mathcal{G}^{hi} T_{hm} v^m)_{,i} + \\ &+ [T_{ih,m} \mathcal{G}^{ih} - (T_{mh} \mathcal{G}^{ih} + T_{hm} \mathcal{G}^{hi})_{,i}] \, v^m. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Al sustituir esta expresión en (9.6), la integral del primer paréntesis puede transformarse en una integral sobre ∂ D que se anula por ser nulas las v^m sobre este contorno. Queda la integral del segundo paréntesis, que si debe anularse para todo campo de vectores v^m (que se anulan, con sus derivadas parciales de primer orden, sobre ∂ D), exige que sea

$$(T_{mk}\, \mathcal{G}^{ik} + T_{km}\, \mathcal{G}^{ki})_{,i} - \mathcal{G}^{ik}\, T_{ik,m} = 0. \tag{9.8}$$

Poniendo

$$\mathcal{M}^i{}_m = \frac{1}{2}(T_{mk}\, \mathcal{G}^{ik} + T_{km}\, \mathcal{G}^{ki}) - \frac{1}{2}\, \delta^i{}_m\, \mathcal{G}^{sk}\, T_{sk}, \tag{9.9}$$

las ecuaciones (9.8) se escriben

$$\mathcal{M}^i{}_{m,i} + \frac{1}{2}\, T_{sk}\, \mathcal{G}^{sk}{}_{,m} = 0, \tag{9.10}$$

que son las *identidades de conservación.*

Mediante la derivada covariante respecto de la conexión primitiva $\Gamma^i{}_{jk}$, es fácil ver que las identidades (9.10) se escriben

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}^i{}_{m\,;\,i} + T_{ik}\, \mathcal{G}^{ik}{}_{;\,m} - S_r\, (T_{mk}\, \mathcal{G}^{rk} + T_{km}\, \mathcal{G}^{kr}) + \\ &\qquad + S^r{}_{mi}\, (T_{rk}\, \mathcal{G}^{ik} + T_{kr}\, \mathcal{G}^{ki}) = 0. \end{aligned} \tag{9.11}$$

Una segunda forma de las identidades (9.10) puede obtenerse introduciendo la conexión (8.1) en la expresión del tensor T_{ik}. Se tiene

$$\begin{aligned} 2\, \mathcal{M}^i{}_m &= T_{mk}(L)\, \mathcal{G}^{ik} + T_{km}(L)\, \mathcal{G}^{ki} + \frac{2\,A}{n-1}\,(S_{m,k} - S_{k,m})\, \mathfrak{g}^{ik} - \\ &- \frac{2\,B}{n-1}\, S_m\, S_k\, \mathcal{H}^{ik} - \mathcal{G}^{sk}\, T_{sk}(L)\, \delta^i{}_m - \frac{A}{n-1}\, \mathfrak{g}^{sk}(S_{s,k} - S_{k,s})\, \delta^i{}_m + \\ &+ \frac{B}{n-1}\, \mathcal{H}^{sk}\, S_s\, S_k\, \delta^i{}_m. \end{aligned}$$

Introduciendo la densidad tensorial

$$\begin{aligned} 2\, \mathcal{N}^i{}_m &= (T_{mk}(L)\, \mathcal{G}^{ik} + T_{km}(L)\, \mathcal{G}^{ki}) - \mathcal{G}^{sk}\, T_{sk}(L)\, \delta^i{}_m - \\ &- \frac{2\,B}{n-1}\, S_m\, S_k\, \mathcal{H}^{ik}, \end{aligned} \tag{9.12}$$

un cálculo fácil prueba que las identidades (9.10) se pueden escribir en la forma

$$\mathcal{N}^{i}{}_{m,i} + \frac{1}{2} T_{sh}(L)\, \mathcal{G}^{sh}{}_{m} + \frac{1}{n-1} S_{h,m} (A\, \mathfrak{F}^{hi}{}_{,i} + B\, S_i\, \mathcal{H}^{hi}) -$$

$$- \frac{1}{n-1} A\, S_{m,h}\, \mathfrak{F}^{hi}{}_{,i} = 0. \qquad (9.13)$$

donde A y B están dados por (7.12).

10. La condición de pseudo-hermiticidad

Queremos ver ahora, en este apartado y en el siguiente, algunos casos particulares de las ecuaciones del campo anteriores.

Un criterio para elegir los valores de las constantes $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ puede ser imponer a las ecuaciones del campo la condición siguiente, impuesta por Einstein [4] y que se llama la condición de pseudo-hermiticidad (Hlavatý [7, pág. 54], Lichnerowicz [11, pág. 269]).

El sistema (8.3), (8.4), (8.5) *se dice que es pseudo-hermitiano, si es invariante por la sustitución*

$$L^{q}{}_{ir} \rightarrow L^{q}{}_{ri}, \quad \mathcal{G}^{qs} \rightarrow \mathcal{G}^{sq}, \quad S_i \rightarrow - S_i. \qquad (10.1)$$

Queremos ver las condiciones que deben cumplir las constantes $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ para que el sistema (8.3), (8.4), (8.5) sea pseudo-hermitiano. Para no confundir las partes simétricas y antisimétricas de las conexiones $L^{q}{}_{ir}$ y $\Gamma^{q}{}_{ir}$ mantendremos para esta última las notaciones (2.6) y (2.7) e introducimos las notaciones

$$^{*}\Delta^{q}{}_{ir} = \frac{1}{2} (L^{q}{}_{ir} + L^{q}{}_{ri}), \quad ^{*}S^{q}{}_{ir} = \frac{1}{2} (L^{q}{}_{ir} - L^{q}{}_{ri}). \qquad (10.2)$$

Esto no ocasiona confusión con las notaciones (7.6) o (7.9), puesto que en el caso actual, que suponemos siempre que se cumplen las condiciones (7.13), es $L_{q}{}^{ir} = {}^{*}L_{q}{}^{ir}$. De acuerdo con (2.12) pondremos también

$$^{*}\Delta_{ih} = {}^{*}\Delta^{m}{}_{im,h} - {}^{*}\Delta^{m}{}_{hm,i}.$$

Recordemos, por otra parte, que es $^{*}S_i = 0$.

Por cálculo directo fácil se obtiene entonces que la sustitución (10.1) transforma

$$\mathcal{G}^{qs}{}_{,r}(\mathrm{L}) \rightarrow \mathcal{G}^{sq}{}_{|r}(\mathrm{L}), \quad \mathfrak{F}^{si}{}_{,i} \rightarrow \mathfrak{F}^{si}{}_{,i}, \quad \mathrm{R}_{ih}(\mathrm{L}) \rightarrow \mathrm{R}_{hi}(\mathrm{L}) + {}^{*}\Delta_{hi},$$

$${}^{*}\Delta_{ih} \rightarrow {}^{*}\Delta_{hi}, \quad {}^{*}\mathrm{S}^{m}{}_{ih;m} \rightarrow {}^{*}\mathrm{S}^{m}{}_{hi;m}, \quad {}^{*}\mathrm{S}^{q}{}_{ir}\,{}^{*}\mathrm{S}^{r}{}_{hq} \rightarrow {}^{*}\mathrm{S}^{q}{}_{ri}\,{}^{*}\mathrm{S}^{r}{}_{qh}. \tag{10.3}$$

Con estas expresiones se tiene

$$\mathrm{T}_{ih}(\mathrm{L}) \rightarrow \mathrm{T}_{hi}(\mathrm{L}) + (2\,\alpha - 2\,\beta)\,{}^{*}\Delta_{hi}. \tag{10.4}$$

Por consiguiente, por la sustitución (10.1) la ecuación (8.3) se transforma en

$$-\alpha\,\mathcal{G}^{sq}{}_{,r}(\mathrm{L}) - \gamma\,\mathfrak{F}^{sq}{}_{|r}(\mathrm{L}) - \frac{1}{n-1}(\gamma + 2\,\beta)\,\mathfrak{F}^{qi}{}_{,i}\,\delta^{s}{}_{r} -$$

$$- \frac{1}{n-1}(-2\,\alpha + 2\,\beta - \gamma)\,\delta^{q}{}_{r}\,\mathfrak{F}^{si}{}_{,i} = 0.$$

Para que esta ecuación sea equivalente a la que resulta de (8.3) por la permutación $(q, s) \rightarrow (s, q)$, debe ser

$$\alpha - 2\,\beta = 0, \qquad \text{o bien} \qquad \mathfrak{F}^{qi}{}_{,i} = 0. \tag{10.5}$$

De la misma manera, por la sustitución (10.1), teniendo en cuenta (10.2) y (10.3), la ecuación (8.4) se transforma en

$$\mathrm{T}_{hi}(\mathrm{L}) + (\alpha - 2\,\beta)\,{}^{*}\Delta_{hi} - \frac{\mathrm{A}}{n-1}(\mathrm{S}_{i,h} - \mathrm{S}_{h,i}) - \frac{\mathrm{B}}{n-1}\,\mathrm{S}_{i}\,\mathrm{S}_{h} = 0. \tag{10.6}$$

que será equivalente a la que resulta de (8.4) por la permutación $(i, h) \rightarrow (h, i)$ siempre y cuando sea

$$(\alpha - 2\,\beta)\,{}^{*}\Delta_{hi} = 0. \tag{10.7}$$

La tercera ecuación es invariante por la sustitución (10.1).

Resultan así dos posibilidades para la pseudo-hermiticidad del sistema (8.3), (8.4), (8.5), a saber: $\mathrm{B} = 0$, en cuyo caso la ecuación (8.5) da $\mathfrak{F}^{qi}{}_{,i} = 0$, y entonces la ecuación (8.3) nos dice que la densidad tensorial $\alpha\,\mathcal{G}^{iq} + \gamma\,\mathfrak{F}^{iq}$ satisface la condición (2.19) (respecto de la conexión $L^q{}_{ir}$) y por tanto, según (2.24), es $^*\Delta_{hl} = 0$, o bien $\alpha - 2\beta = 0$, en cuyo caso se cumplen también las condiciones (10.4) y (10.6).

Podemos, por tanto, enunciar el siguiente

TEOREMA 4.—*Para que el sistema de las ecuaciones del campo* (8.3), (8.4), (8.5) *sea pseudo-hermitiano, es necesario y suficiente que se cumpla cualquiera de las dos condiciones* B = 0, *o bien* $\alpha - 2\beta = 0$, *donde B está dado por* (7.12).

En todo este estudio se supone $\alpha \neq 0$. En caso contrario no se puede escribir la conexión (8.1) y hay que hacer el estudio directamente a partir de las ecuaciones primitivas (5.17).

11. ALGUNOS CASOS PARTICULARES

a) *El caso de la teoría de Schrödinger-Einstein.*

El caso clásico de las teorías de Schrödinger [21, 22] y Einstein [4] (ver, por ejemplo, Tonnelat [25, 26] y Lichnerowicz [11]) corresponde a $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = \ldots = \nu = 0$. En este caso se cumple evidentemente (7.13). La conexión (8.1) se reduce a

$$L^q{}_{ir} = \Gamma^q{}_{ir} + \frac{2}{n-1}\, \delta^q{}_i\, S_r \tag{11.1}$$

(recuérdese que para el espacio-tiempo es $n = 4$). Las ecuaciones del campo (8.3), (8.4), (8.5), por ser A = 2, B = 0, se reducen a

$$\mathfrak{g}^{qs}{}_{|r}(L) = 0, \quad \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{qi}}{}_{,i} = 0, \quad R_{ih}(L) + \frac{2}{n-1}(S_{i,h} - S_{h,i}) = 0, \tag{11.2}$$

que es el llamado «sistema débil» de Einstein.

Para eliminar S_i, las últimas ecuaciones se acostumbran a escribir

$$R_{(ih)} = 0, \quad R_{[ih],k} + R_{[hk],i} + R_{[ki],h} = 0, \tag{11.3}$$

donde el paréntesis ( ) indica «parte simétrica» y el corchete [ ] indica «parte antisimétrica». Por cumplirse la condición B = 0, el sistema (11.2) es pseudo-hermitiano.

b) *El caso $T_{ih} = E_{ih}$ = tensor de Einstein.*

En este caso se cumplen las condiciones $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$, $\epsilon = 1$, $\gamma = \delta = \phi = \mu = \nu = 0$, se cumplen las condiciones (7.13) y es $A = 1$, $B = -1$. Estamos en el caso principal y las ecuaciones del campo se escriben

$$-\mathcal{G}^{qs}{}_{|r} + \frac{1}{n-1}(\delta^s_r \mathfrak{F}^{ql}{}_{,l} - \delta^q_r \mathfrak{F}^{sl}{}_{,l}) = 0 \tag{11.4}$$

$$E_{ih}(L) + \frac{1}{n-1}(S_{i,h} - S_{h,i}) + \frac{1}{n-1} S_i S_h = 0 \tag{11.5}$$

$$\mathfrak{F}^{ql}{}_{,l} - S_l \mathcal{H}^{ql} = 0. \tag{11.6}$$

La derivada mixta en (11.4) y la expresión E_{ih} en (11.5) se refieren a la conexión

$$L^q{}_{ir} = \Gamma^q{}_{ir} + \frac{1}{n-1}(\delta_i^q S_r - \delta^q_r S_i). \tag{11.7}$$

c) *Caso de una densidad tensorial simétrica.*

Si se supone ***a priori*** que $\mathcal{G}^{qs}$ es una densidad simétrica, o sea, $\mathfrak{F}^{qs} = 0$, manteniendo la conexión no simétrica, es $\mathcal{G}^{qs} = \mathcal{H}^{qs}$ y la tercera ecuación (8.5) nos dice que, en el supuesto de ser $\mathcal{H}^{qs}$ no degenerada, o sea $\det(\mathcal{H}^{qs}) \neq 0$, es $S_i = 0$. Por tanto, el sistema (8.3), (8.4), (8.5) se reduce a

$$\mathcal{H}^{qs}{}_{|r}(L) = 0, \quad T_{ih}(L) = 0. \tag{11.8}$$

Escribiendo que son nulas la parte simétrica y la antisimétrica de la primera parte de estas ecuaciones, resulta

$$\mathcal{H}^{qs}{}_{;r}(^*\Delta) = 0, \quad ^*S^q{}_{mr}\mathcal{H}^{ms} + {}^*S^s{}_{rm}\mathcal{H}^{qm} = 0. \tag{11.9}$$

Las primeras ecuaciones nos dicen que $^*\Delta^q{}_{ir}$ coincide con los símbolos de Christoffel del tensor h_{ij} deducido de la densidad $\mathcal{H}^{ij}$ por la fórmula análoga a la (2.4). Las segundas ecuaciones (11.9) deben servir para determinar $\mathcal{H}^{ij}$ (o h_{ij}) y $^*S^q{}_{ir}$.

Si también se supone simétrica *a priori* la conexión, entonces es $*S^q{}_{ir} = 0$ y quedan solas las ecuaciones $T_{ih}(L) = 0$ para determinar las $\mathcal{H}^{ij}$, sabiendo que las $*\Delta^q{}_{ir}$ son los símbolos de Christoffel de estas incógnitas.

Se puede observar que todo esto está de acuerdo con un teorema de D. Lovelock [13], según el cual si el tensor y la conexión fundamentales se suponen simétricos, cualquiera que sea el lagrangiano (función del tensor y de la conexión y de sus primeras derivadas) las ecuaciones del campo (si no contienen derivadas de la conexión) son las que aseguran que la conexión es la que tiene por componentes los símbolos de Christoffel del tensor fundamental.

d) *Invariancia por λ-transformaciones.*

Es bien conocido que el cambio más general de conexión afín que conserva el paralelismo y por tanto conserva las trayectorias o curvas autoparalelas de la variedad diferenciable, es la

$$\Gamma^i{}_{jk} \rightarrow \Gamma^i{}_{jk} + \delta^i{}_j \, v_k, \tag{11.10}$$

siendo v_k un campo de vectores covariantes cualesquiera.

Las ecuaciones del campo se dicen que son λ-invariantes si son invariantes por la sustitución (11.10). En otra parte (Santaló [19]) demostramos que en el caso de las ecuaciones (8.3), (8.4), (8.5) las condiciones para ello, en el supuesto que se cumplen ya las condiciones (7.13), son

$$\epsilon + \phi = 0, \quad \epsilon - \phi - \mu = 0, \quad \nu = 0, \quad 2\alpha - 5\beta + \gamma - 3\phi = 0. \tag{11.11}$$

Si se cumplen estas condiciones, también es $B = 0$ y por tanto el sistema es pseudo-hermitiano. Podemos por tanto enunciar:

Para que el sistema de ecuaciones (8.3), (8.4), (8.5) *deducido del principio variacional* $\delta I = 0$, *con* I *dado por* (5.1) *corresponda al caso principal* (7.13) *y sea λ-invariante y pseudo-hermitiano, es necesario y suficiente que* T_{ih} *sea de la forma*

$$\begin{aligned} T_{ih} = \alpha R_{ih} + \beta \Delta_{ih} - (2\alpha - 5\beta - 3\phi) S^m{}_{ih;m} - \\ - \phi (S_{i;h} - S_{h;i}) - 2\phi S_m S^m{}_{ih}, \end{aligned} \tag{11.12}$$

donde α, β, ϕ son constantes cualesquiera.

Ejemplos de tensores de esta forma son el $R_{(ik)}$ (3.4) y el tensor

$$\overset{(1)}{R}_{ij} = R_{ij} + \frac{2}{3}(S_{j,i} - S_{i,j}). \tag{11.13}$$

que corresponde a $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, $\varepsilon = -2/3$, $\varphi = 2/3$, $\mu = -4/3$, $\nu = 0$, considerado por Tonnelat [25, pág. 129].

En este caso (11.12) resulta $A = -(n-4)(\beta + \varphi)$ de manera que, curiosamente, en el caso del espacio-tiempo, $n = 4$, siendo $B = 0$, $A = 0$, el sistema de ecuaciones del campo se reduce a las (8.3) y (8.4) que toman la forma (escritas para $n = 4$):

$$-\alpha\, \mathcal{G}^{qs}{}_{|r}(L) + (2\alpha - 5\beta - 3\varphi)\, \mathfrak{F}^{qs}{}_{|r}(L) -$$
$$-\frac{1}{3}(-2\alpha + 7\beta + 3\varphi)\, \delta^s_r\, \mathfrak{F}^{qt}{}_{,t} - (\beta + \varphi)\, \delta^q_r\, \mathfrak{F}^{st}{}_{,t} = 0 \tag{11.14}$$

$$T_{ik}(L) = 0$$

con la conexión

$$L^q{}_{ir} = \Gamma^q{}_{ir} + \frac{2}{3}\delta_i^q S_r. \tag{11.15}$$

Por ejemplo. para el caso (11.13) resulta

$$\mathcal{G}^{qs}{}_{|r}(L) + \frac{2}{3}\delta^q_r\, \mathfrak{F}^{st}{}_{,t} = 0, \quad R_{ik} + \frac{2}{3}(S_{j,i} - S_{i,j}) = 0. \tag{11.16}$$

de acuerdo con Tonnelat [25, pág. 130].

12. Otros posibles lagrangianos

Hemos tratado el caso en que T_{ik} es función de las $\Gamma^i{}_{jk}$ y sus derivadas de primer orden y además como función de las $\Gamma^i{}_{jk}$ es, a lo sumo, de segundo grado. Por otra parte, con T_{ik} hemos formado el lagrangiano que figura en (5.1), que es el más simple en que interviene $\mathcal{G}^{ik}$.

Prescindiendo de estas condiciones de simplicidad, cabe estudiar casos más complicados en orden creciente de complicación, como podrían ser los siguientes.

Aumentando el grado del lagrangiano con respecto de las componentes de la conexión afín, cabe considerar lagrangianos del tipo

$$\mathrm{T}_{ih}\,\mathrm{T}_{jk}\,g^{ij}\,\mathfrak{g}^{hk}. \tag{12.1}$$

donde las componentes g^{ij} están dadas por (2.4).

Suponiendo $\mathrm{T} = \det(\mathrm{T}_{ij}) \neq 0$ se puede formar la densidad escalar $\mathrm{T}^{1/2}$, que tomada como lagrangiano generalizaría la teoría puramente afín de Schrödinger [21, 22] basada en el lagrangiano $(\det(\mathrm{R}_{ij}))^{1/2}$. De manera todavía más general caben lagrangianos del tipo

$$a\,\mathrm{T}^{1/2} + b\,g^{1/2} + c\,\mathrm{T}^{1/2}\,\mathrm{T}^{ih}\,g_{ih} + d\,g^{1/2}\,\mathrm{T}^{ih}\,g_{ih} + \dots$$

Edelen [6, pág. 110] ha estudiado con mucho detalle lagrangianos del tipo

$$g^{1/2} + a\,\mathrm{R}_{ih}\,\mathfrak{g}^{ih} + b\,\Delta_{ih}\,\Delta_{jk}\,g^{ij}\,\mathfrak{g}^{hk}$$

para el caso de conexión y tensor fundamental simétricos. Naturalmente que tomando el tensor T_{ih} en vez del R_{ih} o en vez de Δ_{ih} caben muchas variantes sin aumentar demasiado la dificultad. El tratamiento de estas generalizaciones no ofrece dificultad conceptual, pero es necesario buscar un formulismo especial que abrevie las fórmulas resultantes o permita escribirlas en forma condensada. Fijar aquí también criterios de elección que redujeran las posibilidades, simplificando la expresión de los resultados, parece ser un tema interesante. En este sentido pueden ser útiles los trabajos al estilo de los de Rund [15, 16] y Lovelock [12, 13].

Bibliografía

[1] Cartan, E.: *Sur les équations de la gravitation d'Einstein.* «J. Mathématiques pures et Appliquées), 1, 1922, 141-203: Obras completas, parte III, vol. 1, 549-611.

[2] Einstein, A.: *Die Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie.* «Ann. der Physik», 49, 769-822, 1916.

[3] — — *Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität.* «Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math.», 414-419, 1925.

[4] EINSTEIN, A.: *El significado de la relatividad*. Trad. de la 3.ª edición, editada por Princeton Univ. Press (1950); Espasa Calpe Argentina, Buenos Aires, 1952.

[5] EDDINGTON, A.: *The Mathematical Theory of Relativity*. Cambridge, 1.ª edición 1922.

[6] EDELEN, DOMINIC G. B.: *The structure of field space, An axiomatic formulation of field physics*. University of California Press, Berkeley-Los Angeles, 1962.

[7] HLAVATÝ, V.: *Geometry of Einstein's unified field theory*. P. Noordhoff Ltd. Groningen, Holanda, 1957.

[8] JORDAN, P.: *Schwerkraft und Weltall*. Friedr. Vieweg & Sohn. Braunschweig, 1952.

[9] KALUZA, J.: *Zum Unitätsproblem der Physik*. «Sitz. Preuss. Akad. Wiss.», 966, 1921.

[10] KLEIN, O.: *Zur fünfdimensionalen Darstellung der Relativitätstheorie*. «Zeits. Physik», 46, 188, 1931,

[11] LICHNEROWICZ, A.: *Théories rélativistes de la Gravitation et de l'Eléctromagnetisme*. Masson, París, 1955.

[12] LOVELOCK, D.: *The uniquenes of the Einstein field equations in a four dimensional space*. «Arch. Rat. Mech. Anal.», 33, 54-70, 1969.

[13] — — *Degenerate Lagrange Densities involving Geometric Objects*. «Arch. Rat. Mech. Analysis», 36, 293-304, 1970.

[14] LUDWIG, G.: *Fortschritte der Projektiven Relativitätstheorien*. Wieweg, Braunschweig, 1951.

[15] RUND, H.: *Variational problems involving combined tensor fields*. «Abh. Math Sem. Universität Hamburg», 29, 243-262, 1966.

[16] — — *Invariant theory of variational problems for geometric objects*. «Tensor» (NS), 18, 239-258, 1967.

[17] SANTALÓ, L. A.: *Sobre las ecuaciones del campo unificado de Einstein*. «Rev. Mat. Fís. Univ. Nac. Tucumán», 12, 31-55, 1959.

[18] — — *Sobre las teorías del campo unificado*. «Rev. Unión Mat. Argentina», 19, 196-206, 1960.

[19] — — *On Einstein's Unified Field Theory*. Perspectives in Geometry and relativity (Essays in Honor of V. Hlàvaty) Indiana University Press, 343-352, 1966.

[20] — — *Unified field theories of Einstein's type deduced from a variational principle: Conservation Laws*. A publicarse en «Tensor», vol. 25, 1972.

[21] SCHRÖDINGER, E.: *The final affine field laws*. I, II, III. «Proc. Royal Irish Acad.», 51, 163-171, 205-216, 1947; 52, 1-9, 1948.

[22] — — *Space-time structure*. Cambridge Univ. Press, 1950.

[23] THIRY, Y. R.: *Etude mathématique des équations d'une théorie unitaire a 15 variables* (Tesis, París, 1950). «J. Math. pures et Appl.», serie **9**, **30**, **275**, **1951**.

[24] THOMAS, T. Y.: *The Differential Invariants of Generalized Spaces*. Cambridge Univ. Press, Carbridge, 1934.

[25] TONNELAT, M. A.: *La théorie du champ unifie d'Einstein et quelques-uns de ses dévelppments*. Gauthier-Villars, París, **1955**.

[26] — — *Les théories unitaires de l'éléctromagnetisme et de la gravitation*. Gauthier-Villars, París, 1965.

[27] WEYL, H.: *Space, Time, Matter*. Dover Publications, Nueva York, 1922 (traducción de la 4.ª edición alemana).

[28] YANO, K.: *The Theory of Lie derivatives and its applications*. North-Holland Publ. Co. Amsterdam, 1957.