# GEOMETRIA INTEGRAL
# EN ESPACIOS DE CURVATURA CONSTANTE

POR

L. A. SANTALÓ

## INTRODUCCIÓN

Sea $S_n$ un espacio $n$-dimensional de curvatura constante $K$. Como necesitamos operar en la totalidad del espacio, o sea, considerar el mismo « en grande », para evitar dificultades derivadas de las distintas estructuras topológicas posibles para $S_n$, vamos a convenir que como modelos de espacios de curvatura constante $K$ tomamos los siguientes:

*a)* Para $K = 0$, el espacio euclidiano $n$-dimensional.

*b)* Para $K > 0$, la esfera $n$-dimensional de radio $K^{-\frac{1}{2}}$ sumergida en el espacio euclidiano de $n + 1$ dimensiones. Es decir, si $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ son las coordenadas cartesianas ortogonales del espacio euclidiano, consideramos la $n$-esfera

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{n+1}^2 = K^{-1}$$

*c)* Para $K < 0$, la parte correspondiente a $u_{n+1} > (-K)^{-\frac{1}{2}}$ del hiperboloide

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 - u_{n+1}^2 = K^{-1}$$

cuando la métrica en el mismo sea la subordinada por la métrica pseudoeuclidiana $ds^2 = du_1^2 + du_2^2 + \ldots + du_n^2 - du_{n+1}^2$ (¹).

(¹) Ver, por ejemplo, A. Duschek-W. Mayer. — *Lehrbuch der Differentialgeometrie*, Leipzig und Berlin, 1930, vol. II, pág. 194.

Es bien sabido que todo $S_n$ admite un grupo simplemente transitivo de transformaciones dependientes de $\frac{1}{2}n(n+1)$ parámetros que lo transforma en sí mismo: es el grupo $G$ de los « movimientos » del espacio.

Representaremos por $L_r$ a las variedades totalmente geodésicas de $S_n$ de dimensión $r$ y las llamaremos simplemente « variedades lineales » o subespacios lineales de dimensión $r$ o también variedades $r$-lineales. Para los primeros valores de $r$ a veces llamaremos también, como es costumbre, rectas a los $L_1$ y planos a los $L_2$. Por extensión, $L_0$ serán los puntos del espacio.

Sea $L_r^0$ una variedad $r$-lineal fija de $S_n$ y sea $g_r$ el subgrupo de $G$ que la deja invariante. Representaremos por $dL_r$ al elemento de volumen invariante (respecto $G$) del espacio homogéneo $G/g_r$. Este elemento de volumen está definido salvo un factor constante y en Geometría Integral se le acostumbra a llamar la « densidad » para variedades lineales $L_r$.

El primer problema de la Geometría Integral consiste en la determinación explícita de estas densidades. Para el caso del plano euclidiano ($n = 2$, $K = 0$) sólo caben los casos de la densidad $dL_0$ para conjuntos de puntos, que es el elemento de área del plano, y el de la densidad $dL_1$ para conjuntos de rectas; ambas densidades fueron utilizadas por M. W. Crofton en sus trabajos sobre Probabilidades Geométricas [2]. Para $n = 3$ y cualquier curvatura $K$ las densidades para puntos, rectas y planos ($r = 0, 1, 2$, respectivamente) fueron obtenidas de manera sistemática en 1896 por E. Cartan [3]. En un curso no publicado sobre Probabilidades Geométricas dado en Göttingen en 1933, G. Herglotz obtuvo las densidades para cualquier $L_r$ del espacio euclidiano, y en 1935, en un trabajo en el que se introduce por primera vez el nombre de Geometría Integral, W. Blaschke obtiene de nuevo estas densidades mediante un método cómodo para obtener relaciones entre las densidades de distintas

(2) M. W. Crofton. — *On the theory of local probability.* Philosophical transactions of the Royal Society, vol. 158, 1968, pág. 181-199. También el artículo correspondiente a la palabra « Probability » de la Encyclopediae Britannica, 9ª edición, 1885.

(3) E. Cartan. — *Le principe de dualité et certaines integrales multiples de l'espace tangentiel et de l'espace réglé.* Bull. de la Soc. Math. de France, vol. 24, 1896, págs. 140-177.

variedades lineales (4). Poco después, siguiendo el mismo método de Blaschke, B. Petkantschin, obtiene las densidades para las variedades o subespacios lineales del espacio elíptico ($K > 0$) $n$-dimensional, y al mismo tiempo obtiene numerosas e interesantes relaciones entre las mismas (5).

Tanto en el trabajo citado de Blaschke como en el de Petkantschin, después de obtener las densidades $dL_r$, se da preferencia al estudio de relaciones diferenciales entre las mismas (obteniendo las llamadas « fórmulas diferenciales de Crofton » y que para $n = 3$, $K = 0$, fueron estudiadas con todo detalle por O. Varga (6), dejando casi siempre de lado, excepto para los casos del plano $n = 2$ y del espacio tridimensional $n = 3$, el estudio de fórmulas integrales, es decir, el cálculo efectivo de la medida de ciertos conjuntos de variedades lineales con la densidad encontrada. Además, dejan también de lado el caso de los espacios de curvatura negativa ($K < 0$), y aunque, efectivamente, era de prever que las expresiones para las densidades $dL_r$ en este caso no difirieran esencialmente de las del caso $K \geqq 0$, nos parece que se gana en síntesis y en integridad siguiendo un método que permita obtener al mismo tiempo las densidades para cualquier valor de la curvatura constante $K$ del espacio. Esto es lo que hacemos en el § 1 de la Parte Primera del presente trabajo.

Una vez obtenidas las densidades $dL_r$ pasamos a la obtención de fórmulas integrales con las mismas. En el § 2 obtenemos ciertas medidas totales (medida del conjunto de todos los $L_r$ que pasan por un punto, medida de los $L_r$ que contienen un $L_q$ dado, etc.), que son útiles en lo sucesivo. En § 3 consideramos la integral de la medida del conjunto intersección de un subespacio lineal $L_r$ con una variedad $q$-dimensional fija $C_q$, extendida a todas las posiciones de $L_r$ (o sea, a todo el espacio homogéneo $G/g_r$), obteniendo la fórmula [3.9], que es de una gran generalidad: ella contiene muchí-

(4) W. Blaschke. — *Integralgeometrie* 1, *Ermittlung der Dichten fur lineare Unterraume im En.* Actualités Scientifiques et Industrielles. Hermann, Paris, 1935.

(5) B. Petkantschin. — *Zusammenhange zwischen den Dichten der linearen Unterraume im n-dimensionalen Raum.* Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburguischen Universitat, vol. 11, 1936, págs. 249-310.

(6) O. Varga. — *Crofton's formeln für den Raum.* Mathematische Zeitschrift, vol. 40, 1935, págs. 387-405.

simos casos particulares que se habían ido obteniendo separadamente.

En § 4 consideramos en particular el espacio euclidiano, $K = 0$, obteniendo la medida de todos los $L_r$ que cortan a un cuerpo convexo fijo (fórmula [4.11]) y la integral de las curvaturas medias $M_i^{(r)}$ de las intersecciones de un $L_r$ móvil con un cuerpo no necesariamente convexo $C_n$ (fórmulas [4.28]). Estudiamos también las relaciones entre las curvaturas medias de un cuerpo convexo contenido en un $L_q$ al considerarlo ya sea como un cuerpo convexo $q$-dimensional del espacio $L_q$, ya sea como un cuerpo convexo « aplastado » del espacio $n$-dimensional. Aparecen entonces unas constantes $c_{qin}$ (definidas por las fórmulas [4.33]), que ya figuran en el trabajo de Petkantschin ([6]), pero sin dar su valor explícito. Las fórmulas previamente obtenidas nos permiten a nosotros encontrar este valor (fórmulas [4.35]).

En § 5 hacemos aplicación de los resultados anteriores a un problema de probabilidades geométricas. Se trata únicamente de un ejemplo, pues con las fórmulas obtenidas se pueden generalizar al caso del espacio $n$-dimensional la mayoría de los problemas de probabilidades geométricas que hasta ahora sólo se han estudiado para 2 y 3 dimensiones. Tal vez hagamos esta generalización en un trabajo futuro.

También generalizamos, en el mismo § 5, las clásicas fórmulas integrales de Crofton al espacio euclidiano de $n$ dimensiones.

En § 6 volvemos a un espacio de curvatura constante cualquiera, obteniendo, como aplicación de la fórmula generalizada de Gauss-Bonnet y de los resultados anteriores, las fórmulas [6.7] y [6.8] que contienen, en particular, la medida de todos los $L_r$ que cortan a un cuerpo convexo dado $Q$.

La Parte Segunda trata de la llamada « medida cinemática » en espacios de curvatura constante. Para espacios de 3 dimensiones un estudio análogo fué hecho en un trabajo anterior ([7]); ahora lo hacemos, de manera más completa, para un espacio de $n$ dimensiones.

En § 7 obtenemos la fórmula importante [7.8], que igual que la

([7]) L. A. SANTALÓ. — *Geometría Integral en espacios tridimensionales de curvatura constante.* Mathematicae Notae, vol. 9, 1950.

[3.9] es de una gran generalidad, condensando muchísimos casos particulares conocidos correspondientes a $n = 2, 3$.

En § 8 consideramos en particular el espacio euclidiano y llegamos a la fórmula [8.8], que nos da la integral de la curvatura media (de cualquier orden) de la intersección de dos cuerpos, no necesariamente convexos, extendida a todas las posiciones de uno de ellos.

Finalmente, en § 9 damos la generalización a espacios de curvatura constante de la llamada « fórmula fundamental cinemática », la cual, para $n = 2,3$, fué dada por Blaschke, y para el caso euclidiano $n$-dimensional, por Chern-Yien (8). Recientemente Chern ha dado otra demostración más detallada de la misma fórmula, pero siempre únicamente para el caso euclidiano (9). Nuestras fórmulas [9.3] y [9.5] para espacios de curvatura constante contienen también, para el caso particular de un cuerpo convexo y una esfera móvil, la fórmula generalizada de Steiner sobre superficies paralelas, obtenida por Herglotz (10) y Allendoerfer (11).

En todo lo que sigue $K$ representará la curvatura constante del espacio, y para simplificar las fórmulas utilizaremos, según convenga, $K$ o $k$ ligadas por la relación

$$K = k^2.$$

Si $K$ es negativa, $k$ resulta imaginaria.

(8) S. S. CHERN-C. T. YIEN. — *Sulla formula principale cinematica dello spazio ad n dimensioni*. Bollettino della Unione Matematica Italiana (2), vol. 2, 1940, págs. 432-437.

(9) S. S. CHERN. — *On the kinematic formula in the euclidean space of n dimensions*. American Journal of Mathematics, vol. 74, 1952, págs. 227-236.

(10) G. HERGLOTZ. — *Ueber die Steinersche Formel für Parallelflachen*. Abhandlungen Math. Seminar Hansischen Universitat, vol. 15, 1943, págs. 165-177.

(11) C. B. ALLENDOERFER. — *Steiner formulae on a general $S^{n+1}$*. Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 54, 1948, págs. 128-135.

PARTE I

# LA DENSIDAD PARA SUBESPACIOS LINEALES Y APLICACIONES

## § 1. Las densidades para subespacios lineales $L_r$

1. Componentes relativas y ecuaciones de estructura del grupo de los movimientos en $S_n$. — Si $G$ es el grupo de los movimientos en el espacio $S_n$ y $g_r$ es el subgrupo de $G$ que deja invariante una variedad lineal fija $L_r$ se trata, como hemos dicho, de hallar la expresión del elemento de volumen invariante $dL_r$ del espacio homogéneo $G/g_r$. Para ello el método más indicado parece ser el llamado del « triedro móvil » (o mejor, en $n$ dimensiones, del « $n$-edro móvil ») de E. Cartan [12].

Sea $x^0$ un punto fijo de $S_n$ y $e_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $n$ vectores unitarios de origen $x^0$ ortogonales entre sí. El conjunto de $x^0$ más los vectores $e_i^0$ forman el $n$-edro $(x^0, e_i^0)$. Cada movimiento de $S_n$ determina el $n$-edro $(x, e_i)$ transformado del $(x^0, e_i^0)$ por el movimiento y, recíprocamente, cada $n$-edro $(x, e_i)$ con la misma orientación que $(x^0, e_i^0)$ determina unívocamente un movimiento de $S_n$: el que lleva $(x^0, e_i^0)$ a coincidir con $(x, e_i)$. Por tanto la familia de todos los $n$-edros $(x, e_i)$ con $e_i$ unitarios y ortogonales entre sí, es una familia de $n$-edros « adaptada al grupo $G$ » de los movimientos

[12] Para la aplicación de este método a la Geometría Integral, ver S. S. Chern. — *Integral Geometry in Klein Spaces*. Annals of Mathematics, vol. 43, 1942. Para la aplicación a la geometría integral afín y proyectiva ver L. A. Santaló. — *Integral Geometry in affine and projective spaces*. Annals of Mathematics, vol. 51, 1950. Para la exposición completa del método ver las obras de E. Cartan: *La théorie des groupes finis et continus et la géometrie differentielle traitée par la méthode du repere mobile*, París, 1937, y *Leçons sur la géometrie des espaces de Riemann*, 2ª ed., París, 1946, capítulos IX y XII.

Hay otros métodos para hallar las densidades $dL_r$, por ejemplo el seguido por A. Muller en *Dichten linearer Mannigfaltigkeiten in Euklidischen und Nichteuklidischen $R_n$*. Mathematische Zeitschrift, vol. 42, 1937, pero para nuestro objeto el del $n$-edro móvil conduce a las expresiones más convenientes.

siendo el grupo $G$ de los movimientos en espacios de curvatura constante un grupo « unimodular », las $\omega^i$, $\omega_i^h$ y por tanto todas las densidades y medidas que obtendremos en los sucesivo, son al mismo tiempo invariantes a izquierdas y a derechas.

2. La densidad cinematica. — El elemento de volumen de $G$, que en Geometría Integral se llama la « densidad cinemática » de $G$, es igual al producto exterior de todas las componentes relativas independientes. Salvo un factor constante, esta densidad cinemática valdrá por tanto

$$dG = \left[\prod_1^n \omega^i \prod_{j<h} \omega_j^h\right] \qquad [1.7]$$

que es una forma diferencial de grado $\frac{1}{2} n\,(n+1)$, igual al número de parámetros de que depende $G$, como debe ser.

Hagamos la observación importante de que esta densidad, como todas las sucesivas, *se considerará siempre en valor absoluto*. Obsérvese también que la expresión [1.7] de $dG$ es la misma cualquiera que sea la curvatura constante $K$ del espacio, y por tanto coincide con la expresión dada por Blaschke para el espacio euclidiano (4).

Se puede dar a $dG$ una interpretación geométrica muy intuitiva. En efecto, observemos que las $\omega^i$, según [1.1], son las componentes según las direcciones ortogonales $e^i$ de un desplazamiento del punto $x$ y por tanto el producto $[\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n]$ no es otra cosa que el elemento de volumen del espacio $S_n$ correspondiente al punto $x$. Lo indicaremos por $dv$ y será, por tanto,

$$dv = [\omega^1 \omega^2 \ldots \omega^n]\,. \qquad [1.8]$$

Consideremos ahora la superficie esférica $E_{n-1}$ de dimensión $n-1$, radio unidad y centro el punto $x$; sobre ella se encuentran los extremos de los vectores $e_i$. El producto escalar $\omega_1^k = e_k . De_1$ representa un desplazamiento elemental sobre $E_{n-1}$ del extremo de $e_1$ según la dirección de $e_k$. Por tanto el producto exterior $[\omega_1^2 \omega_1^3 \ldots \omega_1^n]$ es igual al elemento de volumen sobre dicha esfera. Representándolo por $dO_{n-1}$ será, por tanto,

$$dO_{n-1} = [\omega_1^2 \omega_1^3 \ldots \omega_1^n]\,. \qquad [1.9]$$

Análogamente, si $E_{n-2}$ es la esfera-máxima $(n-2)$-dimensional del $E_{n-1}$ normal a $e_1$ y $dO_{n-2}$ representa el elemento de volumen sobre la misma correspondiente al extremo de $e_2$, es

$$dO_{n-2} = [\omega_2^3 \omega_2^4 \ldots \omega_2^n]. \qquad [1.10]$$

Procediendo sucesivamente y sustituyendo en [1.7] se tiene

$$dG = [dv\, dO_{n-1}\, dO_{n-2} \ldots dO_1] \qquad [1.11]$$

que es una forma muy intuitiva de la densidad cinemática en $S_n$.

Hagamos una aplicación inmediata de esta fórmula. Recordemos que el volumen de la esfera euclidiana $i$-dimensional de radio unidad vale (*)

$$O_i = \int_{E_i} dO_i = \frac{2\pi^{\frac{i+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}. \qquad [1.12]$$

Consideremos el caso del espacio de curvatura constante positiva $K$, es decir, el caso de ser $S_n$ una esfera $n$-dimensional de radio $R = k^{-1}$. Entonces su volumen total, o sea la integral de $dv$, vale $O_n R^n$. Por consiguiente, integrando [1.11] a todos los valores posibles de los parámetros, resulta que *la medida cinemática de todos los movimientos sobre la esfera $n$-dimensional de radio $R$ vale*

$$\int_G dG = O_n O_{n-1} \ldots O_1 R^n.$$

Desde el punto de vista de la teoría de grupos, tomando $R = 1$ este resultado es equivalente al siguiente: *el volumen, medido con la densidad invariante* [1.7], *del grupo ortogonal de $n+1$ variables vale $O_n O_{n-1} \ldots O_1$.*

3. La densidad cinematica alrededor de un punto. — Supongamos los movimientos de $S_n$ que mantienen fijo un punto $O$, o sea el grupo de las *rotaciones* alrededor de $O$. Lo indicaremos con $G_{[O]}$.

Tomando este punto $O$ como el punto $x$ que aparece en el nº 1,

(*) Obsérvese que aquí, como es costumbre, llamamos « volumen » de la esfera $i$-dimensional, al « área » de la hiperesfera del espacio de dimensión $i+1$.

o sea, como origen del $n$-edro formado por los vectores $e_i$, las componentes relativas de $G_{[O]}$ serán únicamente las $\omega_i^h$ de antes, definidas por [1.3]. Por tanto, la densidad cinemática de $G_{[O]}$ será

$$dG_{[O]} = \left[\prod_{i<h} \omega_i^h\right], \qquad [1.13]$$

donde $i$, $h$ varían de 1 a $n$ pero siendo siempre $i < h$. Se trata de una forma diferencial de grado $\frac{1}{2} n (n-1)$, igual al número de parámetros de que depende $G_{[O]}$.

Por las mismas razones del número anterior, la densidad $dG_{[O]}$ admite ser expresada en la forma simple

$$dG_{[O]} = [dO_{n-1}\, dO_{n-2} \ldots dO_1] \qquad [1.14]$$

y por tanto: *la medida total de las rotaciones alrededor de un punto vale*

$$\int_{G_{[O]}} dG_{[O]} = O_{n-1}\, O_{n-2} \ldots O_1 \qquad [1.15]$$

Este valor es independiente de la curvatura $K$ del espacio.

4. La densidad cinematica alrededor de un $L_q$ fijo. — Sea $G_{[q]}$ el grupo de las rotaciones alrededor de un $L_q$ fijo. Cortemos este $L_q$ por un $L_{n-q}$ ortogonal al mismo y sea $O$ el punto de intersección. El grupo $G_{[q]}$ de $S_n$ equivale al grupo $G_{[O]}$ de $L_{n-q}$. Por tanto $G_{[q]}$ se estudia de la misma manera que el $G_{[O]}$ del número anterior, pero suponiéndolo en un espacio de la misma curvatura constante $K$ y de dimensión $n-q$.

Por ejemplo, la fórmula [1.15] nos dice que: *la medida total de las rotaciones alrededor de un $L_q$ fijo de $S_n$ vale*:

$$\int_{G_{[q]}} dG_{[q]} = O_{n-q-1}\, O_{n-q-2} \ldots O_1 . \qquad [1.16]$$

Esta fórmula comprende a la [1.15] para $q = 0$.

4. Densidad para espacios lineales $L_r$. — Consideremos el $L_r$ definido por el punto $x$, y los vectores $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_r$. Todo movi-

miento de $S_n$ que deje $L_r$ invariante, según [1.1] y [1.2], debe cumplir las relaciones

$$\begin{aligned} \omega_i &= 0 \text{ para } i = r+1,\ r+2,\ \dots, n\,; \\ \omega_j^h &= 0 \quad \text{»} \quad j = 1, 2, \dots, r;\ h = r+1, \dots, n\,. \end{aligned} \qquad [1.17]$$

Este sistema de ecuaciones de Pfaff, por la manera como ha sido obtenido, debe ser completamente integrable y sus variedades integrales representarán, en el espacio del grupo $G$, el subgrupo $g_r$ (que deja $L_r$ invariante) y sus transformados por las operaciones de $G$. El producto exterior

$$dL_r = [\Pi\,\omega^i\,\Pi\,\omega_j^h] \qquad [1.18]$$

$$(i = r+1,\ r+2,\ \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, r;\ h = r+1, \dots, n)$$

o su equivalente, salvo tal vez el signo,

$$dL_r = [\Pi\,\omega^i\,\Pi\,\omega_h^j] \qquad [1.18^*]$$

es siempre invariante por las operaciones de $G$ (por serlo cada uno de sus factores) y será la densidad para $L_r$ (o sea, el elemento de volumen invariante del espacio homogéneo $G/g_r$) siempre y cuando su valor dependa exclusivamente de $L_r$ y no del punto $x$ ni de los vectores $e_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) elegidos en él para determinarlo. Para que esto ocurra se sabe (ver nuestro trabajo citado en nota ([12])) que es necesario y suficiente que sea nula la diferencial exterior $d\,(dL_r)$. Teniendo en cuenta las ecuaciones de estructura [1.6] y las reglas de diferenciación exterior de formas diferenciales ([14]), es fácil ver que esta condición se cumple.

Por tanto $dL_r$, definido por [1.18], es la *densidad para espacios lineales* $L_r$. Esta densidad está definida salvo un factor constante que tomamos igual a la unidad.

Como ya observamos en el caso de la densidad cinemática, esta densidad y todas las sucesivas se considerarán siempre tomadas en valor absoluto.

([14]) Ver cualquiera de los libros citados de E. Cartan en la nota ([12]) y, además, del mismo autor, *Les systemes differentiels exterieurs et leurs applications géométriques*, Hermann, París, 1945.

Obsérvese que el grado de la forma diferencial $dL_r$ es $(n - r)$ $(r + 1)$, efectivamente igual al número de parámetros de que dependen las variedades $r$-lineales de $S_n$.

6. Densidad para los $L_r$ que contienen un $L_q$ fijo $(q < r \leq n - 1)$. — Queremos obtener una densidad para medir conjuntos de $L_r$ « alrededor » de un $L_q$ dado. Indicaremos por $dL_{r[q]}$ esta densidad.

Consideremos que el $L_q$ fijo es el determinado por el punto $x$ y los vectores $e_1, e_2, \ldots, e_q$ y que el $L_r$ está determinado por $L_q$ más los vectores $e_{q+1}, e_{q+2}, \ldots, e_r$. El subgrupo $g_{r[q]}$ de los movimientos que dejan invariante a $L_r$ dentro del subgrupo $g_q$ de los movimientos que dejan invariante a $L_q$ está caracterizado, según [1.2], por

$$\omega_i^h = 0 \quad \text{para } i = q + 1, \ldots, r \;;\; h = r + 1, \ldots, n .$$

Por tanto la densidad $dL_{r[q]}$ buscada, o sea el elemento de volumen del espacio homogéneo $g_q/g_{r[q]}$, salvo un factor constante que elegimos igual a la unidad, será el producto exterior

$$dL_{r[q]} = [\Pi\, \omega_i^h] \tag{1.19}$$

$$(i = q + 1, \ldots, r;\; h = r + 1, \ldots, n).$$

Igual que antes, las ecuaciones de estructura [1.6] permiten comprobar inmediatamente que $d\,(dL_{r[q]}) = 0$ y, por tanto, que [1.19] es efectivamente una densidad.

Para $q = 0$, [1.19] nos da la densidad para espacios lineales que pasan por un punto fijo. En este caso existe una « dualidad » entre los $L_{r[o]}$ y los $L_{n-r[o]}$ normales, en el sentido de que las densidades para ambos son iguales. En efecto, si $L_{r[o]}$ está determinado por los vectores $e_1, e_2, \ldots, e_r$, el $L_{n-r[o]}$ normal lo será por los vectores $e_{r+1}, \ldots, e_n$. Siendo $\omega_i^h = -\omega_h^i$ y puesto que las densidades se consideran siempre en valor absoluto, resulta

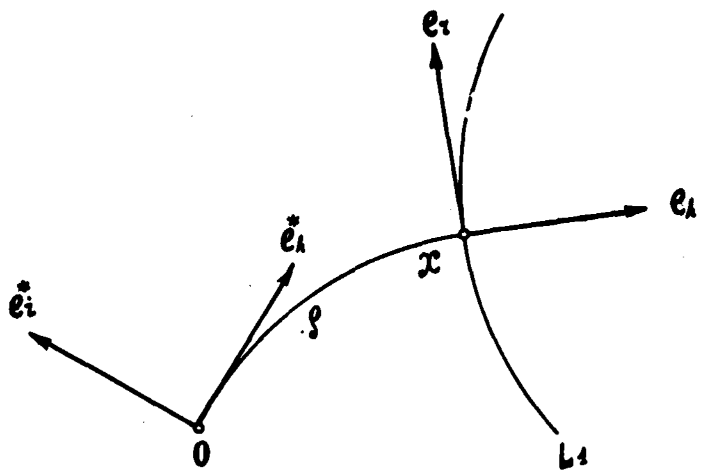
$$dL_{r[o]} = dL_{n-r[o]} \,. \tag{1.20}$$

7. Las densidades para espacios lineales $L_r$ en función de sus distancias a un punto fijo. — La expresión [1.18] de la den-

sidad $dL_r$ es muchas veces cómoda y tiene aplicaciones importantes, como veremos. Sin embargo, a veces, es útil tener otra expresión equivalente en la cual en lugar de un punto $x$ y los vectores $e_i$ contenidos en $L_r$, aparezcan un punto fijo $O$ del espacio $S_n$, más otros elementos vinculados a este punto fijo que también sirvan para determinar $L_r$.

Para ello necesitaremos un lema de la geometría diferencial de superficies.

Sea una superficie $S_2$ de curvatura constante $K$. Consideremos en ella un punto fijo $O$ y una geodésica $L_1$ que no pase por $O$. Sea $Ox$ la geodésica normal a $L_1$ que pasa por $O$, siendo $x$ el pie de la




misma; llamemos $\rho$ a la distancia $Ox$. Sea $e_i$ el vector unitario tangente a $L_1$ en el punto $x$ y $e_h$ el vector unitario tangente en el mismo punto a la geodésica $Ox$. Sean $e_i^*$, $e_h^*$ los vectores trasladados por paralelismo de $e_i$, $e_h$ al punto $O$ siguiendo la geodésica $Ox$. Pongamos

$$\omega_h^i = e_i . De_h \ , \ \omega_h^{i*} = e_i^* . De_h^*$$

donde los puntos indican producto escalar de vectores. Vale entonces el siguiente

**Lema.** — *Con las notaciones anteriores es*

$$\omega_h^i = \omega_h^{i*} \cos k\rho . \qquad [1.21]$$

*Demostración.* — Tomemos sobre la superficie un sistema de coordenadas geodésicas polares $\rho$, $\varphi$ de origen $O$. El elemento de arco toma entonces la forma

$$ds^2 = d\rho^2 + K^{-1} \operatorname{sen}^2 k\rho \, d\varphi^2 . \qquad [1.22]$$

Las componentes de los vectores $e_i$, $e_h$ son

$$e_h(1, 0) , \quad e_i(0, k/\operatorname{sen} k\rho)$$

y por tanto:

$$De_h^1 = \Gamma_{11}^1 d\rho + \Gamma_{12}^1 d\varphi = 0$$

$$De_h^2 = \Gamma_{11}^2 d\rho + \Gamma_{12}^2 d\varphi = k \cot k\rho \, d\varphi$$

De aquí

$$\omega_h^i = e_i . De_h = \cos k\rho \, d\varphi . \qquad [1.23]$$

Para otro par de vectores análogos, pero a distancia $\rho_1$ de $O$, la expresión es la misma con sólo sustituir $\rho$ por $\rho_1$. En particular, para $\rho = 0$ tenemos $\omega_h^{i*} = d\varphi$. De aquí y de [1.23] resulta la igualdad [1.21] que queríamos demostrar.

Sentado este lema pasemos al caso que nos interesa. Sea $L_r$ un espacio $r$-lineal de $S_n$ y $O$ un punto fijo de $S_n$, en general no perteneciente a $L_r$. Sea $L_{n-r[o]}$ el $L_{n-r}$ normal a $L_r$ trazado desde $O$, y sea $x$ su punto de intersección con $L_r$. Sea $\rho$ la longitud del arco de geodésica $Ox$. Para determinar $L_r$ de acuerdo con el nº 5, podemos tomar el punto $x$ y $r$ vectores unitarios $e_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ ortogonales entre sí y contenidos en $L_r$. Tomemos entonces $e_{r+1}$ coincidente con la tangente a la geodésica $Ox$ en el punto $x$ y los demás $e_{r+2}, \ldots, e_n$ colocados en $L_{n-r[o]}$ de manera que todos los $e_h$ formen un $n$-edro ortogonal de vértice $x$. La densidad $dL_r$ será entonces la [1.18]. Para expresar esta densidad podemos también considerar los vectores $e_i^*$ trasladados por paralelismo de los $e_i$ desde $x$ al punto $O$ siguiendo la geodésica $Ox$. Observemos que la forma diferencial $\omega_h^i$ representa una rotación elemental alrededor de $x$ en el plano $e_i$, $e_h$. Las rotaciones $\omega_h^i$ $(i \leq r; h > r + 1)$, por tener lugar en planos normales a la geodésica $Ox$ a lo largo de la cual se verifica el transporte paralelo, tienen los mismos valores en $x$ que en $O$. Por tanto

$$\omega_h^i = \omega_h^{i*} \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, r; \; h = r + 2, \ldots, n . \qquad [1.24]$$

En cambio las rotaciones $\omega_{r+1}^{i}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ tienen lugar de modo completamente análogo al caso de las superficies considerado en el Lema anterior. Por tanto para este caso vale la igualdad

$$\omega_{r+1}^{i} = \omega_{r+1}^{i*} \cos k\rho \quad (i = 1, 2, \ldots, r) . \qquad [1.25]$$

Sustituyendo los valores [1.24] y [1.25] en [1.18], y teniendo en cuenta que el producto $[\Pi\, \omega^i]$ $(i = r + 1, \ldots, n)$ representa el elemento de volumen correspondiente al punto $x$ del $(n - r)$ — espacio $L_{n-r[o]}$, que representaremos por $d\sigma_{n-r}$, y que según [1.19], [1.20] el producto de las $\omega_k^{i*}$ es igual a la densidad $dL_{n-r[o]}$, resulta

$$dL_r = \cos^r k\rho \, [d\sigma_{n-r} dL_{n-r[o]}] . \qquad [1.26]$$

Esta es la expresión buscada para $dL_r$ en la cual intervienen: la distancia geodésica $\rho$ de $L_r$ a un punto fijo $O$, la densidad $dL_{n-r[o]}$ alrededor de $O$ del $L_{n-r[o]}$ normal a $L_r$ por $O$ y el elemento de volumen $d\sigma_{n-r}$ sobre $L_{n-r[o]}$ correspondiente al punto $x$.

Con una demostración diferente, y solamente para el caso de espacios de curvatura constante positiva o nula, la fórmula [1.26] fué dada por Petkantschin en el trabajo citado en la nota ([5]) (fórmula [54], pág. 286).

## § 2. Algunas medidas totales

1. Medida de todos los $L_r$ por un punto fijo. — Para poner de manifiesto la dimensión $n$ del espacio, la densidad cinemática $dG_{[o]}$ alrededor de un punto fijo $O$, dada por [1.13] la vamos a representar en este § 2 por $dG_{[o]}^n$. Consideremos el $L_{r[o]}$ determinado por los vectores $e_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ de origen $O$ y representemos por $dG_{[o]}^r$ y $dG_{[o]}^{n-r}$ las densidades cinemáticas alrededor de $O$ del $r$-espacio determinado por los $e_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ y del $(n - r)$-espacio ortogonal determinado por $e_{r+1}, \ldots, e_n$, respectivamente. Teniendo en cuenta [1.13] y la expresión de $dL_{r[o]}$ dada por [1.19] (para $q = 0$), se obtiene inmediatamente

$$dG_{[o]}^n = [dG_{[o]}^r dG_{[o]}^{n-r} d\overrightarrow{L}_{r[o]}] , \qquad [2.1]$$

donde $\overrightarrow{L}_{r[o]}$ indica que el $L_r$ debe considerarse « orientado », es decir, al integrar a cualquier conjunto debe tenerse en cuenta que cada $L_r$ equivale a dos $\vec{L}_r$, según se oriente en sentido positivo o negativo.

Integrando ambos miembros de [2.1] a todos los valores posibles de las variables y teniendo en cuenta [1.15] para calcular las integrales de $dG^n_{[o]}$, $dG^r_{[o]}$, $dG^{n-r}_{[o]}$, resulta inmediatamente que *la medida total de todos los $L_r$ que pasan por un punto fijo vale*

$$\int_{\text{Total}} dL_{r[o]} = \frac{O_{n-1}\, O_{n-2} \ldots O_{n-r}}{2\, O_1 O_2 \ldots O_{r-1}} \qquad [2.2]$$

Obsérvese que se cumple la « dualidad » [1.20], o sea, $\int dL_{r[o]} = \int dL_{n-r[o]}$.

En el lenguaje de la teoría de grupos, el resultado anterior se puede enunciar de la siguiente manera:

Sea $G_{[o]}$ el grupo de las rotaciones alrededor de un punto fijo $O$ de $S_n$. Sea $G_{r[o]}$, el subgrupo de $G_{[o]}$ formado por las rotaciones que dejan fijo el punto $O$ y un $L_r$ por este punto. Entonces: *el volumen del espacio homogéneo $G_{[o]}/G_{r[o]}$ está dado por* [2.2].

2. Medida de todos los $L_r$ que pasan por un $L_q$ dado. — Sea $1 \leq q < r$ y consideremos todos los $L_r$ que pasan por un $L_q$ fijo. Ya conocemos la densidad $dL_{r[q]}$ dada por [1.19]. Se trata ahora de hallar la medida total de estos $L_{r[q]}$. Para ello basta observar que cortando el $L_q$ fijo por un $L_{n-q}$ normal, cada $L_{r[q]}$ queda determinado por un $L_{r-q[o]}$ contenido en $L_{n-q}$ (siendo $O$ el punto de intersección de $L_{n-q}$ con $L_q$). Por tanto la medida de todos los $L_{r[q]}$ será igual a la medida de todos los $L_{r-q[o]}$ de un $L_{n-q}$, o sea de un espacio de curvatura constante y dimensión $n - q$. Aplicando [2.2] se obtiene así que *la medida de todos los $L_r$ que contienen un $L_q$ fijo* ($q < r$), *vale*,

$$\int_{\text{Total}} dL_{r[q]} = \frac{O_{n-q-1}\, O_{n-q-2} \ldots O_{n-r}}{2\, O_1 O_2 \ldots O_{r-q-1}} \,. \qquad [2.3]$$

Traducido a la nomenclatura de la teoría de grupos, este resultado se enuncia: dado el grupo $G_{[q]}$ de las rotaciones de $S_n$ alrededor de un $L_q$ dado, y el subgrupo del mismo $G_{r[q]}$ formado por las rotaciones alrededor de $L_q$ que dejan fijo un $L_r$ que pasa por el mismo, *el volumen del espacio homogéneo* $G_{[q]}/G_{r[q]}$ *está dado por* [2.3]. Este volumen se entiende medido con la densidad invariante [1.19].

3. Medida de los $L_r$ que cortan una esfera geodesica de radio $\rho$. — Sea $E_\rho$ una esfera geodésica de radio $\rho$ y centro $O$ de $S_n$. Queremos calcular la medida de todos los $L_r$ que cortan a $E_\rho$.

Para ello necesitamos recordar que el área $A(\rho)$ y el volumen $V(\rho)$ de $E_\rho$ están dados respectivamente por las fórmulas

$$A(\rho) = \frac{\operatorname{sen}^{n-1} k\rho}{k^{n-1}} O_{n-1}, \quad V(\rho) = \frac{O_{n-1}}{k^{n-1}} \int_0^\rho \operatorname{sen}^{n-1} k\rho \, d\rho \qquad [2.4]$$

donde $O_{n-1}$ es, como siempre, el volumen de la esfera euclidiana de radio unidad y de $n-1$ dimensiones, dado por [1.12], y $k^2 = K$ la curvatura del espacio $S_n$.

Apliquemos la expresión [1.26] de $dL_r$. Tomando el centro de la esfera como el punto fijo $O$ que aparece en [1.26], para cada valor de $\rho$ y cada $L_{n-r[o]}$, se tiene

$$d\sigma_{n-r} = A_{n-r-1}(\rho)\, d\rho = k^{-(n-r-1)} O_{n-r-1} \operatorname{sen}^{n-r-1} k\rho \, d\rho .$$

Por tanto será

$$\int_{L_r \cap E_\rho \neq 0} dL_r = \frac{O_{n-r-1}}{k^{n-r-1}} \int_{\text{Total}} dL_{n-r[o]} \int_0^\rho \cos^r k\rho \operatorname{sen}^{n-r-1} k\rho \, d\rho ,$$

o bien, recordando [2.2],

$$\int_{L_r \cap E_\rho \neq 0} dL_r = \frac{O_{n-1} O_{n-2} \ldots O_r}{2\, O_1 O_2 \ldots O_{n-r-2} k^{n-r-1}} \int_0^\rho \cos^r k\rho \operatorname{sen}^{n-r-1} k\rho \, d\rho . \qquad [2.5]$$

Para el caso $K > 0$, la medida de todos los $L_r$ es finita y la fórmula [2.5] permite calcularla. En efecto, basta tomar $\rho = \frac{1}{2} \pi k^{-1}$ para que $E_\rho$ llene todo el espacio y por tanto para que la medida anterior resulte la medida de todos los $L_r$.

Siendo

$$\int_0^{\pi/2} \cos^r \varphi \operatorname{sen}^{n-r-1} \varphi \, d\varphi = \frac{O_n}{O_r O_{n-r-1}}$$

queda

$$\int_{\text{Total } (K>0)} dL_r = \frac{O_n O_{n-1} \ldots O_{r+1}}{2\, O_1 O_2 \ldots O_{n-r-1} k^{n-r}} . \qquad [2.6]$$

En el lenguaje de la teoría de grupos este resultado se enuncia: dado el grupo $G$ de los movimientos sobre la esfera $n$-dimensional de radio $R = k^{-1}$ y el subgrupo $g_r$ de los movimientos que dejan fijo un subespacio lineal $L_r$, *el volumen del espacio homogéneo* $G/g_r$, *medido con la densidad invariante* [1.26], *está dado por* [2.6].

Para $K \leq 0$ el volumen anterior es evidentemente infinito.

Por otro camino, y expresado en otra forma equivalente, el resultado [2.6] fué obtenido también por Petkantschin en el trabajo citado en (5) (pág. 291).

4. Observación. — En las fórmulas [2.2], [2.5] y [2.6] y en algunas otras que aparecerán en lo sucesivo, hay que ir con cuidado cuando el valor de $r$ es tal que algunos subíndices de $O$ toman valores negativos. Entonces hay que repasar las simplificaciones hechas para ver cuáles son permitidas y cuáles no. A veces es útil observar que las expresiones [2.5] y [2.6], por ejemplo, son equivalentes a las siguientes:

$$\int_{L_r \cap K_\rho \neq 0} dL_r = \frac{O_{n-1} \ldots O_{n-r-1}}{2\, O_1 \ldots O_{r-1} k^{n-r-1}} \int_0^\rho \cos^r k\rho \operatorname{sen}^{n-r-1} k\rho \, d\rho \qquad [2.5]'$$

$$\int_{\text{Total } (K>0)} dL_r = \frac{O_n O_{n-1} \ldots O_{n-r}}{2\, O_1 \ldots O_r k^{n-r}} . \qquad [2.6]'$$

Por ejemplo, para $r = n - 1$, la fórmula [2.5] no es aplicable directamente. En cambio [2.5]' da

$$\int_{L_{n-1} \cap K_\rho \neq 0} dL_{n-1} = O_{n-1} \int_0^\rho \cos^{n-1} k\rho \, d\rho . \qquad [2.7]$$

## § 3. Fórmulas integrales referentes a la intersección de espacios lineales $L_r$ con una variedad $C_q$

1. Una fórmula diferencial. — Recordemos la expresión [1.18] de $dL_r$. El producto $[\Pi\, \omega^i]$ $(i = r+1, \ldots, n)$ ya observamos que tratándose del producto de $n-r$ desplazamientos elementales según las direcciones de los vectores $e_i$ $(i = r+1, \ldots, n)$ normales a $L_r$, representa el elemento de volumen $d\sigma_{n-r}(x)$ del $L_{n-r}$ normal a $L_r$ en el punto $x$, origen de los vectores $e_i$.

Como $[\Pi\, \omega_j^k]$ $(j = 1, 2, \ldots, r;\ k = r+1, \ldots, n)$, según [1.19], representa la densidad de los $L_r$ alrededor del punto $x$ (qué indicaremos con $dL_{r[x]}$), resulta que la densidad $dL_r$ puede escribirse en la forma más intuitiva

$$dL_r = [d\sigma_{n-r}(x)\, dL_{r[x]}]\,. \qquad [3.1]$$

Sea $C_q$ una variedad $q$-dimensional fija de $S_n$, que supondremos siempre *regular*, en el sentido de que *está compuesta de un número finito de pedazos cada uno de los cuales posee espacio q-lineal tangente en cada punto, variando con continuidad*. Supongamos $q + r \geq n$ y consideremos únicamente espacios $L_r$ que tengan punto común con $C_q$. Representemos por $L_r \cap C_q$ la intersección de $L_r$ con $C_q$ (que será una variedad de dimensión $r + q - n$), y sea $x$ un punto de esta intersección. Sean $e_1, e_2, \ldots, e_{r+q-n}$ vectores unitarios ortogonales entre sí y tangentes a $L_r \cap C_q$ en el punto $x$. Sean $b_1, b_2, \ldots, b_{n-r}$ otros vectores unitarios, ortogonales entre sí y a los $e_i$, situados en el espacio $q$-lineal tangente a $C_q$ en $x$; es decir, este $q$-espacio tangente está determinado por los vectores $e_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r+q-n)$ y los $b_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n-r)$.

Como sólo consideramos posiciones de $L_r$ en que corta a $C_q$, podemos elegir siempre el punto $x$ que sirve para expresar $dL_r$ en [3.1], de manera que esté contenido en $C_q$ y por tanto será

$$dx = \Sigma\, \alpha^i e_i + \Sigma\, \beta^j b_j \qquad [3.2]$$

donde $\alpha^i$, $\beta^j$ son formas de Pfaff y las sumatorias están extendidas entre los límites

$$1 \leq i \leq r + q - n\ , \quad 1 \leq j \leq n - r.$$

Por tanto

$$\omega^{r+h} = dx \cdot e_{r+h} = \sum_j \beta^j (b_j \cdot e_{r+h}) \quad (h = 1, 2, \ldots, n - r) \qquad [3.3]$$

y por consiguiente

$$d\sigma_{n-r}(x) = [\prod_{h=1}^{n-r} \omega^{r+h}] = || b_j \cdot e_{r+h} || [\prod_j \beta^j] \qquad [3.4]$$

donde $|| b_j \cdot e_{r+h} ||$ indica el determinante de los productos escalares $b_j \cdot e_{r+h}$ para $j$, $h$ variando de 1 a $n - r$. Observemos que siendo vectores unitarios se puede poner $b_j \cdot e_{r+h} = \cos \varphi_{j, r+h}$, indicando con $\varphi_{j, r+h}$ el ángulo entre los vectores $b_j$ y $e_{r+h}$.

Si llamamos $d\sigma_{r+q-n}(x)$ al elemento de volumen de la intersección $L_r \cap C_q$ en el punto $x$ y $d\sigma_q(x)$ al elemento de volumen $C_q$ en el mismo punto, siendo $[\Pi \beta^j]$ para $j = 1, 2, \ldots, n - r$ el elemento de volumen de $C_q$ normal a $L_r \cap C_q$, resulta

$$[d\sigma_{r+q-n}(x) . \Pi \beta^j] = d\sigma_q(x) . \qquad [3.5]$$

Por tanto, de [3.1] y [3.4] se deduce

$$[d\sigma_{r+q-n}(x) . dL_r] = \Phi(\varphi_{j, r+h}) [d\sigma_q(x) . dL_{r[x]}] \qquad [3.6]$$

donde $\Phi$ es una función de los productos escalares $b_j \cdot e_{r+h}$ o sea de los ángulos $\varphi_{j, r+h}$ y que por tanto depende de la posición de $L_r$ respecto al $q$-plano tangente a $C_q$ en $x$, pero *no depende del punto* $x$.

Además, la fórmula [3.6] no depende de la curvatura constante $K$ del espacio.

Si $q + r - n = 0$, la fórmula [3.6] vale lo mismo, con sólo suprimir el factor $d\sigma_{q+r-n}$ del primer miembro.

La fórmula [3.6] entre diferenciales va a ser muy útil para el cálculo de fórmulas integrales como vamos a ver inmediatamente.

2. Integral de volumen $\sigma_{r+q-n}(L_r \cap C_q)$ de la intersección $L_r \cap C_q$. — Integremos ambos miembros de [3.6] a todos los $L_r$ del espacio $S_n$ que cortan a $C_q$. La integral del primer miembro es

$$\int \sigma_{r+q-n}(L_r \cap C_q)\, dL_r \qquad [3.7]$$

donde $\sigma_{r+q-n}(L_r \cap C_q)$ indica el volumen de la intersección $L_r \cap C_q$.

La integración se puede considerar extendida a todos los $L_r$ del espacio, o sea a todo el espacio homogéneo $G/g_r$, puesto que para los que no cortan a $C_q$ el volumen de la intersección vale 0.

Al integrar el segundo miembro de [3.6], fijando primero el punto $x$, queda la integral $\int \Phi\, dL_{r[x]}$, que extendida a todas las posiciones de $L_{r[x]}$ dará un valor constante $c$. Se tiene por tanto que, *para cualquier curvatura constante $K$ del espacio*, vale siempre

$$\int \sigma_{r+q-n} (L_r \cap C_q)\, dL_r = c\sigma_q (C_q)\,.$$

Se trata ahora de hallar el valor de la constante $c$. Su cálculo directo no es fácil ni tampoco parece posible un cálculo indirecto simple en el caso euclidiano ($K = 0$) o en el caso hiperbólico ($K < 0$). En cambio un cálculo indirecto es inmediato en el caso esférico ($K > 0$), y, siendo $c$ la misma para cualquier curvatura, tendremos la fórmula general para un espacio de curvatura constante cualquiera.

En efecto, consideremos el caso esférico $K > 0$. Como la constante $c$ es la misma para cualquier $C_q$, tomemos por $C_q$ una esfera máxima $q$-dimensional. Entonces $L_r \cap C_q$ es una esferá máxima de dimensión $r + q - n$ y por tanto, según [2.4],

$$\sigma_{r+q-n} (L_r \cap C_q) = k^{n-r-q} O_{r+q-n}\,, \quad \sigma_q (C_q) = k^{-q} O_q\,, \qquad [3.8]$$

y en consecuencia

$$O_{r+q-n} \int_{\text{Total}} dL_r = ck^{r-n} O_q\,.$$

Como la medida total de los $L_r$ es conocida, fórmula [2.6], sustituyendo resulta

$$c = \frac{O_n O_{n-1} \ldots O_{r+1} O_{r+q-n}}{2\, O_1 O_2 \ldots O_{n-r-1} O_q} = \frac{O_h O_{n-1} \ldots O_{n-r} O_{r+q-n}}{2\, O_1 \ldots O_r O_q}\,.$$

Por consiguiente tenemos la siguiente *fórmula general válida para cualquier espacio de curvatura constante*:

$$\int_{G/g_r} \sigma_{r+q-n} (L_r \cap C_q)\, dL_r = \frac{O_n \ldots O_{n-r} O_{r+q-n}}{2\, O_1 \ldots O_r O_q}\, \sigma_q (C_q)\,. \qquad [3.9]$$

En esta fórmula $\sigma_{r+q-n}(L_r \cap C_q)$ indica el volumen $(r+q-n)$-dimensional de la intersección $L_r \cap C_q$. Cuando $r+q-n=0$, $\sigma_0(L_r \cap C_q)$ indica el número de puntos de la intersección $L_r \cap C_q$.

Es curioso observar que pasando al caso esférico ha sido muy fácil demostrar la fórmula [3.9] que sin salir del caso euclidiano presenta dificultades de cálculo ([15]).

Dada la gran generalidad de la fórmula [3.9] vale la pena que veamos cómo ella contiene todos los casos elementales conocidos del plano y el espacio euclidiano ([16]).

*Caso del plano* ($n=2$). — Caben los siguientes casos:

*a*) $r=1$, $q=1$. Se trata de rectas que cortan a una curva fija. Siendo $L$ la longitud de la curva y $N$ el número de puntos de intersección con la recta variable $L_1$, se tiene $\int N\, dL_1 = 2L$, fórmula debida a Cauchy.

*b*) $r=1$, $q=2$. Se trata de rectas que cortan a un dominio de área $F$. En este caso $\sigma_1(L_1 \cap C_2)$ es la longitud $\sigma_1$ de la cuerda que $L_1$ determina en $C_2$. Queda $\int \sigma_1\, dL_1 = \pi F$, como es sabido.

*Caso del espacio* ($n=3$). — Caben los siguientes casos:

*a*) $r=1$, $q=2$. Rectas que cortan a una superficie. Siendo $F$ el área de la superficie y $N$ el número de puntos de intersección con la recta variable $L_1$, se tiene el resultado conocido

$$\int N\, dL_1 = \pi F .$$

*b*) $r=1$, $q=3$. Rectas que cortan a un cuerpo $C_3$. Sea $V$ el volumen de $C_3$. Llamando $\sigma_1$ a la longitud de la cuerda que $L_1$ de-

([15]) La fórmula [3.9] fué dada sin demostración en nuestro trabajo *Integral Geometry in general spaces*, presentado al Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Cambridge, U. S. A., en septiembre de 1950, y publicado en los « Proceedings » del mismo.

([16]) Para estos casos particulares ver W. Blaschke. — *Vorlesungen über Integralgeometrie*, 1936. L. A. Santaló. — *Integralgeometrie*, Actualités Hermann, París, 1936.

termina en el cuerpo, se tiene

$$\int \sigma_1 dL_1 = 2\pi V .$$

*c*) $r = 2, q = 1$. Planos $L_2$ que cortan a una curva $C_1$. Siendo $N$ el número de puntos de la intersección y $L$ la longitud de $C_1$, la fórmula [3.9] da

$$\int N\, dL_2 = \pi L .$$

*d*) $r = 2$, $q = 2$. Planos $L_2$ que cortan a una superficie $C_2$. Siendo $\lambda$ la longitud de la curva de intersección y $F$ el área de $C_2$, resulta

$$\int \lambda\, dL_2 = \frac{\pi^2}{2} F .$$

*e*) $r = 2, q = 3$. Planos $L_2$ que cortan a un cuerpo $C_3$. Siendo $f$ el área de la intersección $L_2 \cap C_3$ y $V$ el volumen de $C_3$ resulta

$$\int f\, dL_2 = 2\pi V .$$

## § 4. Unas fórmulas integrales para el caso euclidiano (K = 0)

1. Las integrales de curvatura media $M_r$ de los cuerpos convexos del espacio euclidiano $n$-dimensional. — Sea $Q$ un cuerpo convexo del espacio euclidiano $n$-dimensional.

Supongamos primero que la hipersuperficie que limita $Q$ tenga en cada punto radios principales de curvatura $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$ no nulos. Representando por $\{1/R_1, 1/R_2, \ldots, 1/R_r\}$ la función simétrica elemental de orden $r$ formada por las curvaturas principales $1/R_i (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ y por $d\sigma_{n-1}$ el elemento de área de $Q$ en el punto correspondiente ([17]), se llama integral de curvatura media de orden $r$, o simplemente *curvatura media de orden r*, a la integral

([17]) No habiendo confusión posible, representaremos por $Q$ tanto al cuerpo convexo como a la hipersuperficie que lo limita.

$$M_r = \frac{1}{\binom{n-1}{r}} \int_Q \left\{ \frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, \ldots, \frac{1}{R_r} \right\} d\sigma_{n-1}. \qquad [4.1]$$

Si representamos por $dO_{n-1}$ al elemento de área sobre la esfera $(n-1)$-dimensional unidad correspondiente a la representación esférica de $Q$, es $d\sigma_{n-1} = R_1 R_2 \ldots R_{n-1} dO_{n-1}$ y por tanto otra expresión de $M_r$ es

$$M_r = \frac{1}{\binom{n-1}{r}} \int_{O_{n-1}} \{R_1, R_2, \ldots, R_{n-r-1}\} \, dO_{n-1}. \qquad [4.2]$$

Como casos extremos se tienen

$$M_0 = \sigma_{n-1}(Q) = \text{área de } Q \; ; \; M_{n-1} = O_{n-1}. \qquad [4.3]$$

Otros invariantes que juegan un papel importante en la teoría de los cuerpos convexos del espacio euclidiano $n$-dimensional son las « integrales de las proyecciones $r$-dimensionales » de los mismos, llamados en alemán *Quermassintegrale*, los cuales se representan por $W_r$ y cuya definición y propiedades pueden verse en el libro de Bonnesen-Fenchel, *Theorie der konvexen Korper*, Berlín, 1934, pág. 49 y siguientes.

Estas $W_r$ están ligadas con las $M_r$ por la relación importante (Bonnesen-Fenchel, pág. 63).

$$M_{r-1} = n W_r, \qquad [4.4]$$

pero tienen la ventaja sobre las $M_r$ de que pueden definirse independientemente de los radios principales de curvatura $R_i$ y, por tanto, están bien definidas para cualquier cuerpo convexo, cualquiera que sea su contorno. Por tanto, en todo lo que sigue, al utilizar las curvaturas medias $M_r$, si el cuerpo convexo $Q$ no tiene curvaturas principales finitas en todo punto, entenderemos que las $M_i$ están, definidas por las relaciones [4.4] en lugar de las [4.1] o [4.2].

Como demuestran Bonnesen-Fenchel (loc. cit., pág. 50), la integral $W_r$ de las proyecciones $r$-dimensionales de $Q$ puede definirse de la manera siguiente. Primero se proyecta $Q$ ortogonalmente sobre un hiperplano $L_{n-1}$ según la dirección definida por $dO_{n-1}$ o sea por un punto de la esfera $(n-1)$-dimensional; sea $Q_1$ la proyección.

Dentro de $L_{n-1}$ se proyecta $Q_1$ ortogonalmente sobre un $L_{n-2}$ contenido en $L_{n-1}$; la dirección de proyección estará determinada por un punto de la esfera unidad $(n-2)$-dimensional de $L_{n-1}$, o sea por el correspondiente elemento de volumen $dO_{n-2}$. Procediendo sucesivamente, tendremos que una proyección ortogonal de $Q$ sobre un $L_{n-r}$ estará determinada por la densidad $[dO_{n-1}\, dO_{n-2} \ldots dO_{n-r}]$. Llamemos $\sigma_{n-r}(Q)$ el volumen de esta proyección $(n-r)$-dimensional de $Q$. Entonces $W_r$, salvo un factor constante, es la media aritmética de estas $\sigma_{n-r}(Q)$. Más exactamente es

$$\int \sigma_{n-r}(Q)\, dO_{n-1} \ldots dO_{n-r} = \frac{n}{n-r}\, O_{n-2} \ldots O_{n-r-1}\, W_r \qquad [4.5]$$

donde en el primer miembro cada $dO_i$ se entiende integrado a toda la esfera $O_i$.

Debemos observar que en el libro de Bonnesen-Fenchel no figura el valor explícito del factor constante según el cual $W_r$ difiere de la media aritmética de los volúmenes $\sigma_{n-r}(Q)$. Aquí lo hemos calculado tomando el caso particular simple de ser $Q$ una hiperesfera.

2. Medidad del conjunto de $L_r$ que cortan a un cuerpo convexo $Q$. — Como estamos en el caso euclidiano, la fórmula [1.26] nos dice que la densidad para los $L_r$ puede escribirse

$$dL_r = [d\sigma_{n-r}\, dL_{n-r[o]}] \qquad [4.8]$$

o bien, según la dualidad [1.20],

$$dL_r = [d\sigma_{n-r}\, dL_{r[o]}], \qquad [4.7]$$

donde $L_{r[o]}$ es el espacio $r$-lineal paralelo al $L_r$ dado trazado por un punto fijo $O$ y $d\sigma_{n-r}$ es el elemento de volumen sobre el $L_{n-r[o]}$ ortogonal, corespondiente al punto de intersección con $L_r$.

Por otra parte si $L_{r[o]}$ lo consideramos determinado por los vectores unitarios y ortogonales entre sí $e_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ de origen $O$ y llamamos $dO_{n-1}$ al elemento de volumen sobre la $(n-1)$-esfera correspondiente al extremo $e_1$, $dO_{n-2}$ al elemento de volumen sobre la $(n-2)$- esfera ortogonal a $e_1$ correspondiente al extremo $e_2$, etcétera, según [2.1] y [1.15], tenemos

$$[dO_{n-1} \ldots dO_{n-r}] = [dO_{r-1} \ldots dO_1]\, d\overrightarrow{L}_{r[o]}. \qquad [4.8]$$

Sea ahora $Q$ un cuerpo convexo del espacio y apliquemos [4.8] al primer miembro de [4.5]. Observemos que, al variar $dO_{r-1}$, $dO_{r-2}, \ldots, dO_1$, como lo hacen dentro de $L_{r[o]}$ y éste permanece fijo, el volumen $\sigma_{n-r}(Q)$ no cambia. Por tanto la integral de $[dO_{r-1}\, dO_{r-2} \ldots dO_1]$ es inmediata y se obtiene

$$\int \sigma_{n-r}(Q)\, d\overrightarrow{L_{r[o]}} = \frac{n}{n-r} \cdot \frac{O_{n-2} \ldots O_{n-r-1}}{O_{r-1} \ldots O_1} W_r \qquad [4.9]$$

donde $\sigma_{n-r}(Q)$ no es otra cosa que la proyección ortogonal de $Q$ paralelamente a $L_{r[o]}$ sobre un $L_{n-r}$. La integración está extendida a todos los $L_{r[o]}$.

Por tanto, teniendo en cuenta [4.7], la integral del primer miembro de [4.9] es igual a la medida de los $L_r$ que cortan a $Q$ (salvo el factor 2 derivado de la orientación actual de $L_{r[o]}$). Es decir, se tiene

$$\int_{L_r \cap Q \neq 0} dL_r = \frac{n}{2(n-r)} \frac{O_{n-2} \ldots O_{n-r-1}}{O_{r-1} \ldots O_1} W_r, \qquad [4.10]$$

o mejor, introduciendo las integrales de curvatura media, para lo cual basta tener en cuenta [4.4],

$$\int_{L_r \cap Q \neq 0} dL_r = \frac{O_{n-2} \ldots O_{n-r-1}}{2(n-r)\, O_{r-1} \ldots O_1} M_{r-1}. \qquad [4.11]$$

fórmula que nos da *la medida de los espacios lineales $L_r$ que cortan a un cuerpo convexo $Q$ del espacio euclidiano de $n$ dimensiones.*

Esta fórmula falla únicamente para $r = 0$, en cuyo caso trivial $L_0$ son puntos y la medida anterior es el volumen de $Q$.

*Ejemplos.* — Como casos particulares conocidos de [4.11] se tiene:

*a)* $n = 2$, $r = 1$. Resulta

$$\int dL_1 = M_0 = \text{longitud del contorno de } Q.$$

*b)* $n = 3$, $r = 1$. Resulta

$$\int dL_1 = (\pi/2)\, M_0 \quad (M_0 = \text{área de } Q)$$

c) $n = 3$, $r = 2$. Resulta

$$\int dL_2 = M_1 = \text{curvatura media de } Q.$$

3. Integrales de las curvaturas medias de las secciones de un cuerpo convexo $Q$ con espacios lineales $L_r$. — La intersección $Q \cap L_r$ de $Q$ con un $L_r$ es un cuerpo convexo $r$-dimensional contenido en $L_r$. Como tal tendrá sus integrales de curvatura media que representaremos por $M_i^{(r)}$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$, o bien, si es necesario una mayor claridad, por $M_i^{(r)}(Q \cap L_r)$. Nuestro objeto es ahora calcular las integrales $\int M_i^{(r)} dL_r$ extendidas a todos los $L_r$ que cortan a $Q$.

Necesitamos para ello una fórmula auxiliar entre diferenciales. Consideremos un $L_{i+1}$ contenido en $L_r$ y representémoslo por $L_{i+1}^{(r)}$. Elijamos los vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ que en § 1 sirven para determinar las formas $\omega_j^h$ de manera que $e_1, e_2, \ldots, e_{i+1}$ determinen $L_{i+1}^{(r)}$ y $e_1, e_2, \ldots, e_r$ determinen $L_r$. Entonces, la densidad para $L_{i+1}^{(r)}$ *dentro* de $L_r$ será (según [1.18]):

$$dL_{i+1}^{(r)} = [\Pi\, \omega^l\, \Pi\, \omega_j^h] \tag{4.12}$$

para

$$l = i+2, \ldots, r \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, i+1 \quad ; \quad h = i+2, \ldots, r.$$

Por otra parte, la densidad $dL_{r\,[i+1]}$ de $L_r$ alrededor de $L_{i+1}$, según [1.19] vale

$$dL_{r\,[i+1]} = [\Pi\, \omega_j^h] \tag{4.13}$$

para

$$j = i+2, i+3, \ldots, r \quad ; \quad h = r+1, r+2, \ldots, n.$$

Además, según la misma [1.18] es también

$$dL_r = [\Pi\, \omega^l\, \Pi\, \omega_j^h] \tag{4.14}$$

para

$$l = r+1, r+2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, r \; ; \; h = r+1, \ldots, n$$

y

$$dL_{i+1} = [\Pi\, \omega^l\, \Pi\, \omega_j^h] \tag{4.15}$$

para

$$l = i + 2, \ldots, n \;;\; j = 1, 2, \ldots, i + 1 \;;\; h = i + 2, \ldots, n$$

De todas estas expresiones, teniendo en cuenta los intervalos de variación de los índices, resulta la fórmula diferencial buscada

$$[dL_{i+1}^{(r)}\, d\overrightarrow{L_r}] = [dL_{r\,[i+1]}\, dL_{i+1}]\,. \qquad [4.16]$$

En el primer miembro aparece $L_r$ orientado, debido a que cada $L_r$ no-orientado que contiene a $L_{i+1}$ es sostén de dos $L_{r\,[i+1]}$ alrededor de $L_{i+1}$ que sólo difieren en la orientación.

Una vez en posesión de [4.16] ya podemos pasar a calcular las integrales de las curvaturas medias $M_i^{(r)}$ de las intersecciones $Q \cap L_r$. Consideremos la integral

$$I = \int dL_{i+1}^{(r)}\, dL_r \qquad [4.17]$$

extendida a todos los $L_i^{(r)}$ de $L_r$ que tienen punto común con $Q$. Manteniendo $L_r$ fijo e integrando $dL_{i+1}^{(r)}$, basta aplicar [4.11] a la intersección $Q \cap L_r$ y tener en cuenta que $d\overrightarrow{L_r} = 2\, dL_r$, para obtener

$$I = \frac{O_{r-2} \ldots O_{r-i-2}}{2\,(r - i - 1)\, O_i O_{i-1} \ldots O_1} \int M_i^{(r)}\, dL_r \qquad [4.18]$$

donde la integración está extendida a todos los $L_r$ que cortan a $Q$.

Por otra parte, sustituyendo el integrando de [4.17] por el segundo miembro de [4.16] y aplicando [2.3] resulta

$$I = \int_{L_{i+1} \cap Q \neq 0} dL_{i+1} \int_{\text{Total}} dL_{r\,[i+1]} = \frac{O_{n-i-2}\, O_{n-i-3} \ldots O_{n-r}}{2\, O_1 O_2 \ldots O_{r-i-2}} \int_{L_{i+1} \cap Q \neq 0} dL_{i+1}$$

y aplicando de nuevo [4.11]

$$I = \frac{O_{n-i-2} \ldots O_{n-r}}{2\, O_1 O_2 \ldots O_{r-i-2}}\; \frac{O_{n-2} \ldots O_{n-i-2}}{2\,(n - i - 1)\, O_1 \ldots O_i}\, M_i$$

De aquí y [4.18] resulta la fórmula buscada

$$\int_{Q \cap L_r \neq 0} M_i^{(r)} \, dL_r = \frac{(r-i-1)\, O_{n-i-2}}{2\,(n-i-1)\, O_{r-i-2}} \, \frac{O_{n-2} \ldots O_{n-r}}{O_1 O_2 \ldots O_{r-2}} \, M_i, \quad [4.19]$$

o bien, teniendo en cuenta que según [1.12] es

$$2\,\pi\, O_{i-2} = (i-1)\, O_i\,,$$

se puede escribir, más simplemente,

$$\int_{Q \cap L_r \neq 0} M_i^{(r)} \, dL_r = \frac{O_{n-2}\, O_{n-3} \ldots O_{n-r}}{2\, O_1 O_2 \ldots O_{r-2}} \, \frac{O_{n-i}}{O_{r-i}} \, M_i\,. \quad [4.20]$$

Para $i = r-1$, según [4.2] es $M_{r-1}^{(r)} = O_{r-1}$ y por tanto [4.20] nos debe dar la integral [4.11] de los $L_r$ que cortan a $Q$. Es inmediato comprobar que efectivamente es así.

4. Paso a cuerpos no convexos. — Sea $C_n$ un cuerpo del espacio euclidiano $n$-dimensional limitado por una hipersuperficie que representaremos por $\partial C_n$ (contorno de $C_n$), la cual supcnemos que posee radios principales de curvatura $R_h$ ($h = 1, 2, \ldots, n-1$) no nulos en todos sus puntos. El cuerpo $C_n$ puede no ser convexo y aun no conexo, es decir, puede estar formado de varios pedazos separados.

Como invariante topológico de $C_n$ utilizaremos su *característica de Euler-Poincaré* que indicaremos, como es costumbre, por $\chi(C_n)$. Es bien sabido que para definir esta característica basta suponer dividido $C_n$ en simplices; llamando entonces $\alpha_i$ al número de simplices $i$-dimensionales de que consta la subdivisión, es ([18])

$$\chi(C_n) = \alpha_0 - \alpha_1 + \ldots + (-1)^n \alpha_n\,. \quad [4.21]$$

Lo análogo vale para $\partial C_n$. Por ejemplo, para un simplex y por tanto para todo cuerpo topológicamente equivalente a una esfera es

$$\chi(C_n) = 1\,, \quad \chi(\partial C_n) = 1 - (-1)^n\,. \quad [4.22]$$

En general, para $n$ par, es siempre

$$\chi(\partial C_n) = 0\,, \quad (n \text{ par}) \quad [4.23]$$

([18]) Algunos autores definen $\chi(C_n) = \alpha_n - \alpha_{n-1} + \ldots + (-1)^n \alpha_0$. Ambas definiciones coinciden para $n$ par, pero resultan de signos opuestos para $n$ impar. En todo este trabajo tomaremos la definición expresada por [4.21].

y en cambio, para $n$ impar, cualquiera que sea $C_n$, vale siempre la relación importante

$$\chi(\partial C_n) = 2\chi(C_n), \quad (n \text{ impar}). \qquad [4.24]$$

El invariante topológico $\chi$ admite una expresión métrico-diferencial por la llamada fórmula de Gauss-Bonnet (generalizada a $n$ dimensiones) que para el espacio euclidiano se escribe

$$M_{n-1} = O_{n-1}\chi(C_n) \qquad [4.25]$$

o también, según [4.24], para $n$ impar

$$M_{n-1} = \frac{1}{2} O_{n-1}\chi(\partial C_n), \quad (n \text{ impar}); \qquad [4.26]$$

en ambas expresiones, $M_{n-1}$ se refiere al contorno $\partial C_n$ de $C_n$.

Obsérvese que tanto la definición [4.1] de las $M_i$ como la de las expresiones análogas $M_i^{(r)}$ para las intersecciones de $C_n$ con espacios lineales $L_r$ dadas en el número anterior, valen lo mismo tanto si el cuerpo $C_n$ es convexo o no. Además vamos a demostrar que también las fórmulas integrales [4.20] valen igual para el caso de un cuerpo cualquiera, no necesariamente convexo.

Para ello recordemos la fórmula diferencial [3.6] que vamos a aplicar al caso de ser $C_q$ el contorno $\partial C_n$, y por tanto $q = n - 1$. Cambiando un poco la notación usada para obtener [3.6] llamemos ahora $e_1, e_2, \ldots, e_{r-1}$ a los vectores unitarios tangentes a las direcciones principales del contorno de la intersección $C_n \cap L_r$, considerada como variedad $(r-1)$-dimensional de $L_r$ (vectores tomados en el punto $x$); los vectores $e_r, \ldots, e_n$ sean otros vectores unitarios cualesquiera formando con los anteriores un $n$-edro ortogonal. Sean, por otra parte, $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ los vectores unitarios tangentes a las direcciones principales de $C_n$ en el mismo punto $x$. En el segundo miembro de [3.6] la función $\Phi$ resulta ahora función de los productos escalares $e_h . b_i$ o sea de los cosenos de los ángulos $\varphi_{h,i}$ que forman los vectores $e_h$ y $b_i$. Resulta así una fórmula del tipo

$$[d\sigma_{r-1}(x)\, dL_r] = \Phi(\varphi_{h,i})\, [d\sigma_{r-1}(x)\, dL_{r[x]}]. \qquad [4.27]$$

Sean $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{r-1}$ los radios principales de curvatura del contorno $\partial(C_n \cap L_r)$ en el punto $x$ cuyo elemento de volumen correspondiente hemos representado por $d\sigma_{r-1}$. Multipliquemos ambos miembros de [4.27] por $\{1/\rho_1, \ldots, 1/\rho_i\}$ e integremos a todos los valores posibles de las variables que figuran en ambos miembros. En el primer miembro quedará $\int M_i^{(r)}\, dL_r$. Para calcular la integral del segundo miembro, observemos que los $1/\rho_h\, (h = 1, 2, \ldots, r-1)$ pueden expresarse en función de los $R_l\, (l = 1, 2, \ldots, n-1)$ y de los ángulos que forman los vectores $e_h$ con los $b_l$ (teoremas de Meusnier y de Euler generalizados). Sea

$$\{1/\rho_1, 1/\rho_2, \ldots, 1/\rho_i\}\ \Phi\,(\varphi_{h,l}) = F\,(1/R_l, \varphi_{h,l})\,.$$

Al integrar $F\, dL_{r[x]}$ a todas las posiciones posibles de $L_{r[x]}$, o sea, a todos los valores posibles de los ángulos $\varphi_{h,l}$, resultará una función únicamente de $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$. Esta función no es fácil de calcular directamente, pero como para el caso de los cuerpos convexos sabemos que salvo un factor constante es la función simétrica $\{1/R_1, \ldots, 1/R_i\}$ (según la fórmula [4.20]), y como este resultado « local » no puede depender de si el cuerpo es o no convexo, resulta que tendrá el mismo valor para cualquier cuerpo.

Llegamos así a la conclusión importante siguiente:

*Sea $C_n$ un cuerpo cualquiera del espacio euclidiano n-dimensional y supongamos que su contorno $\partial C_n$ sea una hipersuperficie $(n-1)$-dimensional que posea radios principales de curvatura distintos de cero en todo punto. Sean $M_i$ las integrales de curvatura media de $C_n$ y $M_i^{(r)}$ las integrales de curvatura media de las intersecciones $C_n \cap L_r$ con un espacio lineal $L_r$. Con estas notaciones, valen las fórmulas integrales* [4.20] *o sea*

$$\int\limits_{C_n \cap L_r \neq 0} M_i^{(r)}\, dL_r = \frac{O_{n-2} \ldots O_{n-r}}{2\, O_1 \ldots O_{r-2}}\, \frac{O_{n-i}}{O_{r-i}}\, M_i \qquad [4.28]$$

Para $i = r - 1$, según [4.25], se tiene la integral de la característica de Euler-Poincaré de la intersección $C_n \cap L_r$.

**5. Sobre las integrales de curvatura media de un cuerpo convexo contenido en un espacio lineal $L_q$.** — Hemos definido en el nº 1 de este § 4 las integrales de curvatura media $M_i$ de un cuerpo convexo $Q$ de $n$ dimensiones. Es interesante ver el valor que toman estas integrales para el caso en que $Q$ degenera en un cuerpo convexo « aplastado », contenido en un $L_q$ ($q \leq n-1$). Indicaremos en este caso el cuerpo convexo por $Q_q$.

Este $Q_q$, como cuerpo convexo de $L_q$ tendrá sus integrales de curvatura media $M_i^{(q)}$ ($i = 1, 2, \ldots, q-1$). La cuestión está en comparar estas $M_i^{(q)}$ con las $M_i$ de $Q_q$ considerado como cuerpo convexo del espacio $n$-dimensional. Para ello lo mejor es considerar el cuerpo paralelo exterior al $Q_q$ a distancia $\varepsilon$ (o sea el conjunto de los puntos cuya distancia a $Q$ es $\leq \varepsilon$); este cuerpo será ya de dimensión $n$ y para él estarán bien definidas las $M_i(\varepsilon)$. Los valores de $M_i$ que deben atribuirse a $Q_q$ son los límites de $M_i(\varepsilon)$ para $\varepsilon \to 0$. Este paso al límite está justificado teniendo en cuenta que según [4.11] los $M_i$ representan, salvo un factor constante, la medida de los $L_{i+1}$ que cortan al cuerpo convexo considerado, y esta medida es evidentemente función continua de $\varepsilon$.

Sean $R_h(\varepsilon)$ los radios principales de curvatura del cuerpo paralelo exterior al $Q_q$ a distancia $\varepsilon$. Apliquemos la definición [4.1]. El elemento de volumen $d\sigma_{n-1}$ correspondiente al cuerpo paralelo a distancia $\varepsilon$ se puede escribir como producto $\varepsilon^{n-q-1} dO_{n-q-1} d\sigma_q$ (siendo $d\sigma_q$ el elemento de volumen de $Q_q$) para los puntos que corresponden a los interiores de $Q_q$ y como producto $\varepsilon^{n-q}\, dO_{n-q} d\sigma_{q-1}$ para los puntos que corresponden al contorno de $Q_q$ (siendo $d\sigma_{q-1}$ el elemento de volumen de este contorno (19)). Tenemos por consiguiente

$$M_i(\varepsilon) = \frac{1}{\binom{n-1}{i}}\left(\int_{Q_q}\{1/R_1, \ldots, 1/R_i\}\, \varepsilon^{n-q-1}\, dO_{n-q-1}\, d\sigma_q \right.$$
$$\left. + \int_{\partial Q_q}\{1/R_1, \ldots, 1/R_i\}\, \varepsilon^{n-q}\, dO_{n-q}\, d\sigma_{q-1}\right). \qquad [4.29]$$

Si $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{q-1}$ son los radios principales de curvatura de $\partial Q_q$, considerado como cuerpo convexo de $L_q$, los $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$ valen:

(19) Como siempre, en estas expresiones $dO_{n-q-1}$ y $dO_{n-q}$ representan los elementos de volumen de esferas $(n-q-1)$ y $(n-q)$ — dimensionales de radio unidad; al multiplicar por $\varepsilon^{n-q-1}$ y $\varepsilon^{n-q}$, respectivamente, se obtienen los elementos de volumen análogos, pero para esferas de radio $\varepsilon$.

*a*) En el interior de $Q_q$:

$R_h = \varepsilon$ para $h = 1, 2, \ldots, n-q-1$ ; $R_h = \infty$ para $h = n-q, \ldots, n-1$.

*b*) En el contorno de $Q_q$:

$R_h = \varepsilon$ para $h = 1, 2, \ldots, n-q$ ; $R_h = \rho_{h-n+q}$ para

$$h = n - q + 1, \ldots, n-1 .$$

Con estos valores ya se puede calcular $M_i(\varepsilon)$ y pasar al límite para $\varepsilon \to 0$. Hay que distinguir tres casos.

1. $i \geq n-q$. En este caso la primera integral del último miembro de [4.29] es siempre nula y la segunda resulta igual a

$$\frac{1}{2}\binom{q-1}{i-n+q} O_{n-q} M^{(q)}_{i-n+q},$$

apareciendo el factor $\frac{1}{2}$ puesto que $dO_{n-q}$ sólo debe integrarse a media $(n-q)$-dimensional esfera. Por consiguiente se tiene

$$M_i = \frac{\binom{q-1}{i+q-n}}{2\binom{n-1}{i}} O_{n-q} M^{(q)}_{i+q-n} \quad \text{para} \quad i \geq n-q . \qquad [4.30]$$

2. $i = n-q-1$. En este caso es la segunda integral del último miembro de [4.29] que es nula, quedando sólo la primera que vale $O_{n-q-1}\, \sigma_q(Q)$ siendo $\sigma_q(Q_q)$ el volumen $q$-dimensional de $Q_q$. Es decir

$$M_i = \frac{1}{\binom{n-1}{i}} O_{n-q-1}\, \sigma_q(Q_q) \quad \text{para} \quad i = n-q-1 . \qquad [4.31]$$

3. $i < n-q-1$. En este caso son nulas (para $\varepsilon \to 0$) las dos integrales de [4.29] y por tanto queda

$$M_i = 0 \quad \text{para} \quad i < n-q-1 . \qquad [4.32]$$

Estos resultados pueden servir, por ejemplo, para completar un resultado debido a Herglotz y Petkantschin [20]. Representemos por $\kappa_n^i$ la medida de los $L_i$ del espacio $n$-dimensional que cortan al cuerpo convexo $Q_q$ (contenido en un $L_q$) y por $\mu_q^r$ la medida de los $L_r$ contenidos en $L_q$ que cortan a $Q_q$. Herglotz y Petkantschin demuestran que entre estas medidas existe la relación

$$\kappa_n^i = c_{qin} \mu_q^{i+q-n} \tag{4.33}$$

siendo $c_{qin}$ constantes que dejan sin determinar. Sin embargo, los cálculos anteriores permiten la determinación efectiva de estas constantes. En efecto, según [4.11] es

$$\kappa_n^i = \frac{O_{n-2} \ldots O_{n-i-1}}{2\,(n-i)\, O_1 \ldots O_{i-1}} M_{i-1}\,, \quad \kappa_n^0 = \text{volumen}\,. \tag{4.34}$$

y también

$$\mu_q^{i+q-n} = \frac{O_{q-2}\, O_{q-3} \ldots O_{n-i-1}}{2\,(n-i)\, O_1\, O_2 \ldots O_{i+q-n-1}} M_{i+q-n-1}^{(q)}\,,$$

$$\mu_q^0 = \sigma_q(Q_q) = \text{volumen}$$

Basta entonces aplicar las fórmulas [4.30], [4.31] y [4.32] para obtener que *el valor de las constantes* $c_{qin}$ *definidas por la relación* [4.33] *vale*

$$c_{qin} = \frac{\binom{q-1}{n-i} O_{n-2} \ldots O_{q-1}}{2\binom{n-1}{i-1} O_{i-1} \ldots O_{i+q-n}} O_{n-q} \qquad \textit{para } i \geq n-q+1$$

$$c_{qin} = \frac{1}{2\,(n-i)\binom{n-1}{i-1}} \frac{O_{n-2} \ldots O_{n-i-1}}{O_1\, O_2 \ldots O_{i-1}} O_{i-1} \quad \textit{para } i = n-q \tag{4.35}$$

$$c_{qin} = 0 \qquad \textit{para } i < n-q.$$

En el caso $i = n - q$, el factor $O_{i-1}$ se puede simplificar siempre que sea $i \neq 1$, pero para $i = 1$ este factor figura en el numerador pero no en el denominador, que empieza con $O_1$.

([20]) Ver el trabajo citado en nota ([8]), pág. 292, fórmula [70].

Es inmediato comprobar que estas fórmulas generales dan $c_{213} = \pi$, $c_{223} = \pi/2$, únicos datos calculados por Petkantschin en el trabajo citado.

## § 5. Probabilidades geométricas y fórmulas integrales de Crofton en el espacio euclidiano de $n$ dimensiones

1. Un problema de probabilidades geométricas. — Las ideas fundamentales de la Geometría Integral tienen su origen en la teoría de las llamadas probabilidades geométricas. Con las fórmulas integrales que obtenemos en este trabajo y las fórmulas de carácter diferencial que fueron obtenidas por Petkantschin (ver trabajo citado en nota [5]), casi todos los problemas de probabilidades geométricas clásicos, que en general han sido sólo estudiados para el caso del plano y del espacio ordinarios, pueden generalizarse sin dificultad al caso del espacio euclidiano de $n$ dimensiones. Vamos a dar, como modelo, un solo ejemplo.

*Sea $Q$ un cuerpo convexo dado. Siendo $p + q = n$, se dan arbitrariamente un $L_p$ y un $L_q$ que cortan a $Q$. Se pide la probabilidad de que los espacios $L_p$, $L_q$ se corten en el interior de $Q$.*

La medida de los casos favorables será

$$m_f = \int_{L_p \cap L_q < Q} dL_p \, dL_q .$$

Fijando primero $L_q$ y llamando $\sigma_q(L_q \cap Q)$ al volumen de la intersección $L_q \cap Q$, puesto que $L_p$ y $L_q$ sólo pueden tener un punto común (o coincidir) por ser $p + q = n$, aplicando [3.9] resulta

$$m_f = \frac{O_n O_{n-1} \ldots O_{n-p}}{O_1 O_2 \ldots O_p O_q} \int \sigma_q (L_q \cap Q) \, dL_q$$

o bien, aplicando de nuevo [3.9] al caso de $Q$ cortado por $L_q$

$$m_f = \frac{O_n \ldots O_{n-p}}{O_1 \ldots O_p O_q} \, \frac{O_n \ldots O_{n-q} O_q}{2\, O_1 \ldots O_q O_n} \, \sigma_n(Q) \qquad [5.1]$$

siendo $\sigma_n(Q)$ el volumen de $Q$.

Por otra parte, según [4.11], la medida de todos los casos posibles o medida total de casos, vale

$$m_t = \int\limits_{L_p \cap Q \neq 0} dL_p \int\limits_{L_q \cap Q \neq 0} dL_q =$$

$$\frac{O_{n-2} O_{n-3} \dots O_{n-p-1}}{2\,(n-p)\, O_1 O_2 \dots O_{p-1}} \; \frac{O_{n-2} O_{n-3} \dots O_{n-q-1}}{2\,(n-q)\, O_1 \dots O_{q-1}} M_{p-1} M_{q-1} \qquad [5.2]$$

siendo $M_{p-1}$, $M_{q-1}$ las integrales de curvatura media respectivas de $Q$.

Dividiendo [5.1] por [5.2] tendremos la probabilidad buscada, a saber (teniendo en cuenta que $p + q = n$),

$$P = \frac{2\,pq\, O_n O_{n-1}^2}{O_p O_{p-1} O_q O_{q-1}} \; \frac{\sigma_n(Q)}{M_{p-1} M_{q-1}}. \qquad [5.3]$$

En particular, para $p = 1$, $q = n - 1$, teniendo en cuenta la relación $2\,\pi O_{i-2} = (i-1)\, O_i$ esta fórmula se simplifica, dando

$$P = \frac{O_{n-1}\, \sigma_n(Q)}{M_0 M_{n-2}} \qquad [5.4]$$

donde, como sabemos, se puede sustituir $M_0$ por el área de $Q$.

La fórmula general [5.3] contiene como casos particulares los dos casos conocidos siguientes: *a*) Dada en el plano una figura convexa de área $F$ y longitud del contorno $L$, la probabilidad de que dos rectas que la cortan se corten entre sí interiormente a la misma vale $2\,\pi F/L^2$. *b*) Dados al azar una recta y un plano que cortan a un cuerpo convexo del espacio ordinario, la probabilidad de que se corten interiormente al mismo vale $4\,\pi\, V/FM$, siendo $V$ el volumen, $F$ el área y $M$ la integral de curvatura media del cuerpo convexo dado.

Otro caso particular interesante es aquel en que $Q$ es una esfera de radio $R$. Entonces es

$$\sigma_n(Q) = \frac{O_{n-1}}{n} R^n \;,\; M_{p-1} = O_{n-1} R^{n-p} \;,\; M_{q-1} = O_{n-1} R^{n-q}$$

y por tanto la fórmula general [5.3] se reduce a

$$P = \frac{2\,pq\, O_n O_{n-1}}{n\, O_p O_{p-1} O_q O_{q-1}}. \qquad [5.5]$$

En particular, para $p = 1$, $q = n - 1$, es $P = 1/n$. Es decir: *Dados una recta y un hiperplano que cortan a una esfera del espacio euclidiano* n *dimensional, la probabilidad de que se corten interiormente a la misma es igual a* $1/n$.

Generalización. — De manera análoga a la anterior, los resultados de los números precedentes permiten resolver el problema general siguiente: Dados $\alpha_i$ espacios lineales $L_{r_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$ tales que $\Sigma\alpha_i r_i \geq n$, que cortan a un cuerpo convexo $Q$, hallar la probabilidad de que todos ellos tengan punto común interior a $Q$.

La fórmula general que resuelve este problema es un poco complicada, y como el método es el mismo anterior, aplicado sucesivamente, es mejor resolver el problema directamente para cada caso particular que interese.

2. Generalización de las fórmulas principales de Crofton. — En la teoría de probabilidades geométricas, se suelen llamar fórmulas principales de Crofton a las dos siguientes ([21]):

*a*) Siendo $Q$ una figura convexa del plano de área $F$, $L_1$ una recta arbitraria del mismo y $\sigma$ la longitud de la cuerda $Q \cap L_1$, vale

$$\int_{L_1 \cap Q \neq 0} \sigma^3 \, dL_1 = 3 F^2. \qquad [a]$$

*b*) Si $P$ es un punto exterior a la figura convexa plana $Q$ de área $F$ y longitud $L$, y $\omega$ es el ángulo que forman las dos rectas de apoyo de $Q$ trazadas por $P$, vale

$$\int (\omega - \operatorname{sen} \omega) \, dP = \frac{1}{2} L^2 - \pi F \qquad [b]$$

donde $dP$ es el elemento de área del plano correspondiente al punto $P$ (densidad para puntos) y la integración del primer miembro está extendida a todo el exterior de $Q$.

([21]) Ver, por ejemplo, R. Deltheil. — *Probabilités géométriques*, París, 1926, o bien: W. Blaschke. — *Vorlesungen über Integralgeometrie*, Leipzig und Berlín, 1936.

La fórmula *a*) ha sido ya generalizada a $n$ dimensiones por H. Hadwiger ([22]), tomando la forma

$$\int_{L_1 \cap Q \neq 0} \sigma^{n+1}\, dL_1 = \frac{n\,(n+1)}{2}\, V^2,$$

donde $V$ es el volumen de $Q$.

La fórmula *b*), en cambio, solo ha sido generalizada por Herglotz al caso del espacio ordinario ($n=3$) (ver la obra de Blaschke citada en nota ([21])). Vamos a ver cómo se puede generalizar al caso general del espacio euclidiano de $n$ dimensiones.

Sean $L^1_{n-1}$, $L^2_{n-1}$ dos espacios $(n-1)$-lineales que se cortan según $L_{n-2}$. Llamando $\varphi_1$, $\varphi_2$ a los ángulos que forman $L^1_{n-1}$, $L^2_{n-1}$ alrededor de $L_{n-2}$ con respecto a un $L^0_{n-1}$ origen que pasa por el mismo, siendo por tanto $\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1|$ el ángulo entre $L^1_{n-1}$ y $L^2_{n-1}$, es conocida la siguiente fórmula diferencial ([23]),

$$[dL^1_{n-1}\, dL^2_{n-1}] = \operatorname{sen}^{n-1}\varphi\, [dL_{n-2}\, d\varphi_1\, d\varphi_2],$$

Integremos ambos miembros de esta expresión a todos los pares $L^1_{n-1}$, $L^2_{n-1}$ que cortan al cuerpo convexo $Q$. Según [4.11] la integral del primer miembro vale

$$I = M^2_{n-2}. \qquad [5.6]$$

Al integrar el segundo miembro, si $L_{n-2}$ es exterior a $Q$, los ángulos $\varphi_1$, $\varphi_2$ pueden variar entre 0 y el ángulo $\omega$ que forman los dos hiperplanos de apoyo de $Q$ por $L_{n-2}$. Llamemos

$$\Phi_{n-1}(\omega) = \int_0^\omega \int_0^\omega |\operatorname{sen}^{n-1}(\varphi_1 - \varphi_2)|\, d\varphi_1 d\varphi_2 \qquad [5.7]$$

cuyo valor explícito es

*a*) *para* $n-1$ *par*

$$\Phi_{n-1}(\omega) = -\frac{2}{n-1}\left(\frac{1}{n-1}\operatorname{sen}^{n-1}\omega + \right.$$

([22]) *Neue Integralrelationen für Eikorperpaare.* Acta Scientiarum Mathematicarum, vol. XIII, 1950, págs. 252-257.
([23]) Petkantschin. — *Loc. cit.*, nota ([5]), pág. 307.

$$\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}(n-3)} \frac{(n-2)\ldots(n-2i)}{(n-3)\ldots(n-1-2i)^2} \operatorname{sen}^{n-1-2i}\omega - \frac{(n-2)\ldots 3.1}{(n-1)\ldots 4.2}\omega^2\Bigg) \qquad [5.8]$$

*b*) *para* n — 1 *impar*

$$\Phi_{n-1}(\omega) = -\frac{2}{(n-1)}\left(\frac{1}{n-1}\operatorname{sen}^{n-1}\omega + \right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{(n-2)\ldots(n-2i)}{(n-3)\ldots(n-1-2i)} \operatorname{sen}^{n-1-2i}\omega - \frac{(n-2)\ldots 4.2}{(n-3)\ldots 3.1}\omega\right) \qquad [5.8]'$$

La parte de integral correspondiente a $L_{n-2}$ exterior a $Q$ vale $\int \Phi_{n-1}(\omega)\, dL_{n-2}\, (L_{n-2} \cap Q = 0)$. Cuando $L_{n-2}$ corta a $Q$ los ángulos $\varphi_1$, $\varphi_2$ pueden variar entre 0 y $\pi$ y por tanto la parte correspondiente de integral, según [4.11], vale

$$\Phi_{n-1}(\pi)\frac{O_{n-2}}{4} M_{n-3} \qquad [5.9]$$

donde $\Phi_{n-1}(\pi)$ está dado por

$$\Phi_{n-1}(\pi) = \frac{2(n-2)(n-4)\ldots 3.1}{(n-1)^2(n-3)\ldots 4.2}\pi^2 \text{ para } n-1 \text{ par} \qquad [5.10]$$

$$\Phi_{n-1}(\pi) = \frac{2(n-2)(n-4)\ldots 4.2}{(n-1)(n-3)\ldots 3.1}\pi \text{ para } n-1 \text{ impar.} \qquad [5,10]'$$

**Por tanto, igualando [5.6] con la suma de [5.9] y de la integral de [5.7] queda la siguiente *fórmula de Crofton generalizada a* n *dimensiones* ($n \geq 3$)**

$$\int_{L_{n-2}\cap Q=0} \Phi_{n-1}(\omega)\, dL_{n-2} = M_{n-2}^2 - \frac{O_{n-2}}{4}\Phi_{n-1}(\pi) M_{n-3} \qquad [5.11]$$

**donde $\Phi_{n-1}(\omega)$ está dado por [5.8], y $\Phi_{n-1}(\pi)$, por [5.10].**

**La fórmula general [5.11] vale para $n \geq 3$. Para $n = 2$ hay que hacer algunas modificaciones debido a que [4.11] en vez de $M_{-1}$ nos da el área de $Q$. Pero este caso $n = 2$, que es el original de Crofton, es ya muy conocido y trivial para que entremos en más detalles.**

Para $n = 3$, resulta

$$\int_{L_1 \cap Q = 0} (\omega^2 - \operatorname{sen}^2 \omega)\, dL_1 = 2\, M^2 - \frac{1}{2} \pi^3 F,$$

de acuerdo con el resultado de Herglotz (loc. cit. nota [21])).

## § 6. Medida de los $L_r$ que cortan a un cuerpo convexo y otras fórmulas integrales en espacios de curvatura constante K

1. La fórmula generalizada de Gauss-Bonnet para espacios de curvatura constante. — La clásica fórmula de Gauss-Bonnet de la teoría de superficies fué generalizada a espacios curvos $n$-dimensionales por Allendoerfer-Weil [24], siendo dada poco más tarde una demostración directa por S. S. Chern [25] por un método que se presta a la obtención de otras fórmulas análogas. A nosotros nos interesa la forma simple que esta fórmula generalizada toma para el caso de un espacio $S_n$ de curvatura constante $K$, en cuyo caso particular ella fué dada ya por Herglotz en el trabajo citado en la nota [10].

Para su enunciado necesitamos recordar qué se entienden por integrales de curvatura media de una hipersuperficie o variedad $(n - 1)$-dimensional del espacio $S_n$. La definición es completamente análoga a la del caso euclidiano (§ 4 n° 1). Es decir, si $R_i (i = 1, 2, \ldots, n - 1)$ son los radios de curvatura principales de la hipersuperficie, en un punto cuyo elemento de área $(n - 1)$-dimensional es $d\sigma_{n-1}$, la integral de curvatura media de orden $r$, o simplemente la *curvatura media de orden r*, es la integral [4.1] extendida a toda la hipersuperficie, convexa o no, de que se trate. Para $r = 0$, $M_0$ sigue siendo igual al área de la hipersuperficie.

Recordemos todavía que la distancia $\rho_i$ de un punto $P$ de la hipersuperficie al punto de contacto de la normal en $P$ con la envolvente de las normales a lo largo de la $i$-ésima línea de curvatura,

[24] Allendoerfer-Weil. — *The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedron*. Transactions of the American Math. Soc., vol. 53, 1943, págs. 101-129.

[25] S. S. Chern. — *A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet theorem for closed Riemannian manifolds*. Annals of Mathematics, vol. 45, págs. 747-752. También, *On the curvatura integra of a Riemannian manifold*. Annals of Mathematics, vol. 46, 1945, págs. 674-684.

está relacionada con el radio de curvatura principal $R_i$ por la fórmula

$$R_i = k^{-1} \operatorname{tang} k\rho_i \qquad [6.1]$$

que es interesante por relacionar $R_i$ ccn los radios $\rho_i$ de claro significado geométrico. Se observa, además, que sólo es $R_i = \rho_i$ en el caso euclidiano ([26]).

Con estas notaciones, la fórmula de Gauss-Bonnet generalizada por Allendoerfer-Weil-Chern a que hemos hecho referencia, para el caso particular que nos interesa, se enuncia ([27]) o ([10]):

*Dado un cuerpo $Q$, convexo o no, del espacio $S_n$ de curvatura constante $K$, limitado por una hipersuperficie $\partial Q$ que tenga en cada punto curvaturas principales finitas, de manera que estén bien definidas sus integrales de curvatura media $M_r$ (que llamaremos también integrales de curvatura media de $Q$), valen las siguientes relaciones:*

*para $n$ par:*

$$\binom{n-1}{n-1} c_{n-1} M_{n-1} + \binom{n-1}{n-3} c_{n-3} M_{n-3} + \dots + \binom{n-1}{1} c_1 M_1 + K^{n/2} V = \frac{1}{2} O_n \chi(Q) \; ; \qquad [6.2]$$

*para $n$ impar:*

$$\binom{n-1}{n-1} c_{n-1} M_{n-1} + \binom{n-1}{n-3} c_{n-3} M_{n-3} + \dots + c_0 M_0 = \frac{1}{2} O_n \chi(Q) \, , \qquad [6.2]'$$

*siendo $c_i$ constantes definidas por*

$$c_i = \frac{O_n}{O_i O_{n-1-i}} K^{(n-1-i)/2} \qquad [6.3]$$

*y siendo $V$ el volumen de $Q$ y $\chi(Q)$ su característica de Euler-Poincaré.*

Lo mismo que en el caso euclidiano (§ 4, nº 4), para $n$ impar vale

([26]) Ver, por ejemplo: EISENHART. — *Riemannian Geometry*. Princeton, 1926, pág. 214.

([27]) C. B. ALLENDOERFER. — *Steiner's formulae on a general $S^{n+1}$*. Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 54, 1948, pág. 138.

la relación [4.24], pudiéndose introducir $\chi(\partial Q)$ en vez de $\chi(Q)$ si ello resulta conveniente.

Observemos que para $K = 0$, las fórmulas [6.2] y [6.2]' se reducen a la [4.25].

2. Integrales de las curvaturas medias de las secciones de un cuerpo $Q$, no necesariamente convexo, con espacios lineales $L_r$. — En § 4, nº 4, vimos cómo la fórmula [4.20], primeramente demostrada para cuerpos convexos, era válida también para cuerpos no convexos del espacio euclidiano, escribiéndose en la fórmula general [4.28]. Afirmamos ahora que *también es válida para cuerpos de cualquier espacio de curvatura constante $K$.*

En efecto, la densidad $dL_r$, tomada en la forma [1.18], es la misma para cualquier espacio de curvatura constante, independientemente del valor de esta constante $K$. Según [1.19] también $dL_{r[x]}$ es independiente de la curvatura constante del espacio, y lo mismo ocurre, como se ve repasando el razonamiento que ha conducido a ella, con la fórmula [4.27]. A partir de [4.27], la aplicación de los teoremas de Meusnier y de Euler para hipersuperficies del espacio euclidiano, conducía a la validez de [4.28]. Pero los teoremas de Meusnier y de Euler valen exactamente igual para los espacios de curvatura constante, luego también en este caso de [4.27] se pasa a [4.28]. Es decir:

*Las fórmulas* [4.28] *valen sin modificación para cuerpos de cualquier espacio de curvatura constante $K$.*

3. Medida de los $L_r$ que cortan a un cuerpo convexo en un espacio de curvatura constante $K$. — Sigamos con el caso general de ser $Q$ un cuerpo no necesariamente convexo. Considerándolo como una variedad de dimensión $n$ de $S_n$, la fórmula [3.9] aplicada al caso $q = n$, da

$$\int_{Q \cap L_r \neq 0} \sigma_r (Q \cap L_r)\, dL_r = \frac{O_{n-1} O_{n-2} \ldots O_{n-r}}{2\, O_1 O_2 \ldots O_{r-1}}\, \sigma_n(Q)\,, \qquad [6.4]$$

siendo $\sigma_n(Q)$ el volumen de $Q$ y $\sigma_r(Q \cap L_r)$ el volumen $r$-dimensional de la intersección $Q \cap L_r$.

Cortemos $Q$ por un $L_r$ y representemos por $M_i^{(r)}$ a las integrales de curvatura media de la intersección $Q \cap L_r$, considerada como cuerpo de $L_r$. Aplicando [6.2] o [6.2]' a dicha intersección, tendremos las relaciones:

Para $r = 2r'$ ($r$ par):

$$\frac{1}{2} O_r \chi(Q \cap L_r) = K^{r'} \sigma_r(Q \cap L_r) + \sum_{i=1}^{r'} \binom{r-1}{2i-1} \frac{O_r}{O_{2i-1} O_{r-2i}} K^{r'-i} M_{2i-1}^{(r)}. \qquad [6.5]$$

Para $r = 2r' + 1$ ($r$ impar):

$$\frac{1}{2} O_r \chi(Q \cap L_r) = \sum_{i=0}^{r'} \binom{r-1}{2i} \frac{O_r}{O_{2i} O_{r-2i-1}} K^{r'-i} M_{2i}^{(r)}. \qquad [6.6]$$

Multiplicando ambos miembros de [6.5] o [6.6] por $dL_r$ e integrando a todos los $L_r$ que cortan a $Q$, aplicando [4.28] y [6.4], resulta:
Para $r = 2r'$:

$$\int \chi(Q \cap L_r)\, dL_r = \frac{O_{n-2} O_{n-3} \ldots O_{n-r}}{O_1 O_2 \ldots O_r} \Bigl( K^{r'} O_{n-1} \sigma_n(Q) + \sum_{i=1}^{r'} \binom{r-1}{2i-1} \frac{O_r O_{r-1} O_{n-2i+1}}{O_{2i-1} O_{r-2i} O_{r-2i+1}} K^{r'-i} M_{\;\;i-1} \Bigr) \qquad [6.7]$$

y para $r = 2r' + 1$:

$$\int \chi(Q \cap L_r)\, dL_r = \frac{O_{n-2} \ldots O_{n-r}}{O_1 O_2 \ldots O_{r-1}} \sum_{i=0}^{r'} \binom{r-1}{2i} \frac{O_{r-1} O_{n-2i}}{O_{2i} O_{r-2i-1} O_{r-2i}} K^{r'-i} M_{2i}. \qquad [6.8]$$

En estas fórmulas se excluye el caso $r = 0$, pues en este caso trivial $dL_0$ es el elemento de volumen y las integrales anteriores valen, en ambos casos, el volumen del cuerpo $Q$.

Si $Q$ es un cuerpo convexo, entonces es $\chi(Q \cap L_r) = 1$ (puesto que la intersección es siempre una esfera topológica), y por tanto *las fórmulas anteriores nos dan la medida de los $L_r$ que cortan a un cuerpo convexo $Q$.*

Consideremos, por ejemplo, los casos particulares siguientes:

*a*) $r = 1$. Hay que aplicar [6.8] para $r' = 0$. Observemos que el numerador del primer coeficiente empieza con $O_{n-2}$ y por tanto para $r = 1$ este numerador debe tomarse igual a 1. Suponiendo $Q$ convexo, resulta

$$\int_{L_1 \cap Q \neq 0} dL_1 = \frac{O_n}{O_0\, O_1} M_0 = \frac{O_n}{4\,\pi} F \qquad [6.9]$$

donde $F = M_0$ representa el área de $Q$. Es decir:

*La medida de las rectas que cortan a un cuerpo convexo del espacio de curvatura constante $S_n$, es independiente de la curvatura del espacio y está dada por* [6.9] ([28]).

*b*) $r = 2$, $n = 3$. Poniendo la notación usual $\sigma_3(Q) = V =$ volumen de $Q$, resulta

$$\int_{Q \cap L_2 \neq 0} dL_2 = M_1 + KV \qquad [6.10]$$

Es decir: *la medida de los planos del espacio tridimensional de curvatura constante $K$ que cortan a un cuerpo convexo está dada por* [6.10].

([28]) Este resultado es un caso particular del que da la medida de las geodésicas de un espacio de Riemann cualquiera que cortan a una hipersuperficie del mismo. Esta generalización a espacios de Riemann cualesquiera se hace en un trabajo nuestro de próxima aparición en los « Summa Brasiliensis Mathematicae ».

La fórmula [6.10] fué obtenida directamente en el trabajo citado en la nota (7). De ella hicimos aplicación a un problema de geometría no euclidiana en la nota *Una desigualdad entre los elementos de un tetraedro en geometría no-euclidiana*, Mathematicae Notae, vol. IX, 1950.

PARTE II

# LA DENSIDAD CINEMATICA EN ESPACIOS DE CURVATURA CONSTANTE

## § 7. Fórmulas integrales referentes a la intersección de dos variedades $C_q$, $C_r$ $(r + q \geq n)$

1. Una fórmula diferencial. — Recordemos la expresión [1.7] de la densidad cinemática $dG$. Si el origen de los vectores $e_i$ es el punto $x$, las expresiones [1.8] y [1.13] nos dicen que $dG$ es igual al producto del elemento de volumen $[\omega^1 \omega^2, \ldots, \omega^n]$ del espacio correspondiente al punto $x$, por la densidad cinemática « alrededor » de $x$ que indicamos por $dG_{[x]}$.

Sea $C_q$ una variedad $q$-dimensional fija y $C_r$ otra variedad $r$-dimensional móvil. Supondremos que ambas sean « regulares » en el sentido explicado en § 3, nº 1. Supongamos $q + r \geq n$ y consideremos únicamente posiciones de $C_r$ en las cuales tiene punto común con $C_q$. Representemos por $C_q \cap C_r$ la intersección de $C_q$ con $C_r$ y sea $x$ un punto de esta intersección. Elijamos los vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ que componen el $n$-edro móvil de manera que $e_1, e_2, \ldots, e_{r+q-n}$ sean tangentes a $C_q \cap C_r$ en el punto $x$, y $e_{r+q-n+1} \cdots, e_r$ sean tangentes a $C_r$, de manera que en conjunto $e_1, e_2, \ldots, e_r$ determinan el $r$-plano tangente a $C_r$ en el punto $x$. Los demás vectores $e_{r+1}, \ldots, e_n$ son tales que, con los anteriores, forman un $n$-edro ortogonal.

Sean $b_1, b_2, \ldots, b_{n-r}$ otros vectores unitarios, ortogonales entre sí y a los $e_1, e_2, \ldots, e_{r+q-n}$ de manera tal que, con estos últimos, determinen el $q$-plano tangente a $C_q$ en $x$. Como consideramos únicamente posiciones de $C_r$ en las cuales tiene punto común con $C_q$, se podrá elegir siempre el punto $x$ (origen del $n$-edro móvil unido a $C_r$) de manera que pertenezca a la intersección $C_q \cap C_r$ y por tanto será

$$dx = \Sigma\, \alpha^h e_h + \Sigma\, \beta^j b_j \quad (1 \leq h \leq r+q-n;\ 1 \leq j \leq n-r), \qquad [7.1]$$

siendo $\alpha^h$, $\beta^j$ formas de Pfaff. Por tanto se tiene

$$\omega^{r+h} = dx \cdot e_{r+h} = \sum_{j=1}^{n-r} \beta^j (b_j \cdot e_{r+h}) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-r)$$

y por tanto

$$\left[\prod_{h=1}^{n-r} \omega^{r+h}\right] = \| b_j \cdot e_{r+h} \| \left[\prod_{1}^{n-r} \beta^j\right].$$

El determinante del segundo miembro está formado por los productos escalares $(b_j \cdot e_{r+h})$, o sea, por los cosenos de los ángulos $\varphi_{j,\, r+h}$ que forman los vectores $b_j$ y $e_{r+h}$ y por tanto será una función $\Phi\,(\varphi_{j,\, r+h})$ de estos ángulos. El producto $[\Pi\, \beta^j]$ $(j = 1, 2, \ldots, n-r)$ es el elemento de volumen sobre $C_q$ normal a la intersección $C_q \cap C_r$ en el punto $x$. Por tanto, llamando $d\sigma_{q+r-n}(x)$ al elemento de volumen de la intersección $C_q \cap C_r$ en el punto $x$, vale la relación

$$\left[d\sigma_{r+q-n}(x) \,.\, \prod_{1}^{n-r} \beta^j\right] = d\sigma_q(x)$$

siendo $d\sigma_q(x)$ el elemento de volumen de $C_q$ en el punto $x$.

Además $[\omega^1 \omega^2 \ldots \omega^r]$, dada la elección de los ejes $e_1, e_2, \ldots, e_r$ que hemos hecho, es igual a $d\sigma_r(x)$ (elemento de volumen de $C_r$), y por tanto se tiene, en definitiva,

$$\left[d\sigma_{r+q-n}(x) \prod_{1}^{n} \omega^i\right] = \Phi\,(\varphi_{j,\, r+h})\, [d\sigma_q(x) \,.\, d\sigma_r(x)]\,. \qquad [7.2]$$

Multiplicando ambos miembros por la densidad cinemática $dG_{[x]}$ alrededor del punto $x$, queda

$$[d\sigma_{r+q-n}(x) \,.\, dG] = \Phi\,(\varphi_{j,\, r+h})\, [d\sigma_q(x)\, d\sigma_r(x)\, dG_{[x]}] \qquad [7.3]$$

fórmula diferencial importante que en seguida vamos a utilizar.

Obsérvese, igual que en § 3, nº 1, que esta fórmula no depende de la curvatura del espacio. Además, si $r + q - n = 0$, el factor $d\sigma_{r+q-n}$ del primer miembro desaparece, pero la fórmula subsiste igualmente.

2. Integral del volumen $\sigma_{r+q-n}$ $(C_q \cap C_r)$ de la intersección $C_q \cap C_r$. — Integremos ambos miembros de [7.3] a todo el grupo $G$ de los movimientos. Para cada posición de $C_r$, en el primer miem-

bro se puede integrar $d\sigma_{r+q-n}$, dando el volumen $\sigma_{r+q-n}$ $(C_q \cap C_r)$ de la intersección $C_q \cap C_r$. Queda por tanto la integral

$$\int_G \sigma_{r+q-n} (C_q \cap C_r)\, dG\,, \qquad [7.4]$$

extendida a todo el grupo $G$, o sea a todas las posiciones de $C_r$. Cuando $C_r$ no tiene punto común con $C_q$ es $\sigma_{r+q-n}$ $(C_q \cap C_r) = 0$. Si $r + q - n = 0$, la función $\sigma_{r+q-n} (C_q \cap C_r)$ es igual al número de puntos de la intersección $C_q \cap C_r$.

En cuanto al segundo miembro de [7.3], al integrar a todos los valores de las variables que conducen a posiciones diferentes de $C_r$, la integral $\int \Phi\, dG_{[x]}$ extendida a todo el grupo $G_{[x]}$ de los movimientos « alrededor » del punto $x$, dará un valor constante $c$. Queda por tanto

$$\int_G \sigma_{r+q-n} (C_q \cap C_r)\, dG = c\, \sigma_q (C_q)\, \sigma_r (C_r) \qquad [7.5]$$

siendo $\sigma_q (C_q)$ y $\sigma_r (C_r)$ los volúmenes de las variedades $C_q$ y $C_r$, respectivamente.

Falta determinar la constante $c$. Su cálculo directo, a partir de su definición $c = \int \Phi\, dG_{[x]}$ no es fácil. Sin embargo el valor de $c$ se puede calcular fácilmente de manera indirecta. Basta observar que [7.5] tiene la misma forma, con la misma constante $c$, cualquiera que sea la curvatura $K$ del espacio. Consideremos el caso $K > 0$, o sea, el caso de una esfera $n$-dimensional. Sea en ella $C_q$ una $q$-esfera máxima y $C_r$ otra $r$-esfera máxima. La intersección $C_q \cap C_r$ es entonces una $(q + r - n)$-esfera máxima, y por tanto se tiene

$$\sigma_{q+r-n} (C_q \cap C_r) = O_{q+r-n}\, k^{-(q+r-n)}\,, \quad \sigma_q (C_q) = O_q k^{-q}\,,$$

$$\sigma_r (C_r) = O_r k^{-r}\,.$$

Además, en este caso, la medida total $\int_G dG$ se conoce, dada en § 1, nº 2, o sea,

$$\int_G dG = O_n\, O_{n-1} \ldots O_1\, k^{-n}. \qquad [7.7]$$

Aplicando [7.5] a este caso particular resulta:

$$O_{q+r-n}\, O_n\, O_{n-1} \ldots O_1 = c\, O_q\, O_r$$

de donde se despeja $c$ y sustituyendo en [7.5] queda la fórmula final

$$\int_G \sigma_{r+q-n} (C_q \cap C_r)\, dG = \frac{O_1\, O_2 \ldots O_n\, O_{r+q-n}}{O_q\, O_r}\, \sigma_q (C_q)\, \sigma_r (C_r)\,, \qquad [7.8]$$

que nos da *la integral del volumen de la intersección de dos variedades $C_q$, $C_r$ extendida a todas las posiciones de esta última y para un espacio de curvatura constante cualquiera.*

Como ya observamos, si $r + q - n = 0$, la función $\sigma_{r+q-n}(C_q \cap C_r)$ es igual al número de puntos de la intersección $C_q \cap C_r$ [29].

Vamos a dar algunos ejemplos simples de la fórmula [7.8].

*a)* $n = 2$, $q = 1$, $r = 1$. Es el caso de dos curvas del plano (euclidiano o no), una fija y la otra móvil. Siendo $N$ el número de puntos de intersección de ambas para cada posición de la móvil, resulta

$$\int_G N\, dG = 4\, L_0\, L_1$$

siendo $L_0$, $L_1$ las longitudes de las dos curvas. Esta es la llamada fórmula de Poincaré de la Geometría Integral de los espacios de dos dimensiones de curvatura constante.

*b)* $n = 3$, $q = 2$, $r = 1$. Es el caso de una superficie $C_2$ y una curva $C_1$ del espacio de 3 dimensiones (de cualquier curvatura constante). Llamando $N$ al número de puntos de intersección de ambas para cada posición de $C_1$, resulta

$$\int_G N\, dG = 4\, \pi^2\, F\, L$$

siendo $F$ el área de $C_2$ y $L$ la longitud de $C_1$.

*c)* $n = 3$, $q = 2$, $r = 2$. Es el caso de dos superficies de un espacio tridimensional. Llamando $L_{12}$ a la longitud de la curva de

[29] La fórmula [7.8] para el caso $r + q - n = 0$ del espacio euclidiano fué obtenida por H. Federer. — *Coincidence functions and their integrals.* Transactions of the Am. Math. Soc., vol. 59, págs. 441-446, 1946.

intersección, [7.8] nos da

$$\int_G L_{12}\, dG = 2\pi^3 F_1 F_2$$

siendo $F_1$, $F_2$ las áreas respectivas de las dos superficies.

*d)* $q = n$, $r = n$. Es el caso de dos cuerpos $n$-dimensionales del espacio $n$-dimensional. Llamando $\sigma_n^{12}$ al volumen de su intersección será

$$\int_G \sigma_n^{12}\, dG = O_1 O_2 \ldots O_{n-1}\, \sigma_n^1\, \sigma_n^2$$

siendo $\sigma_n^1$, $\sigma_n^2$ los volúmenes respectivos de los dos cuerpos ([30]).

3. Caso de varias variedades móviles. — Supongamos ahora la misma variedad fija $C_q$ del número anterior, pero $h$ variedades móviles $C_{r_1}$, $C_{r_2}$, ..., $C_{r_h}$ de dimensiones respectivas $r_1$, $r_2$, ..., $r_h$.

Llamando $dG_i$ a la densidad cinemática correspondiente a $C_{r_i}$ y suponiendo

$$q + r_1 + r_2 + \ldots + r_h - n\,h \geq 0$$

queremos calcular la integral

$$\int_G \sigma_{q+r_1+\ldots+r_h-hn}\,(C_q \cap C_{r_1} \cap \ldots \cap C_{r_h})\, dG_1 \ldots dG_h$$

donde el integrando indica el volumen de la intersección de las $h + 1$ variedades $C_q$, $C_{r_1}$, $C_{r_2}$, ..., $C_{r_h}$.

Para ello basta proceder por inducción a partir de [7.8]. En efecto, aplicando [7.8] al caso de ser $C_q \cap C_{r_1} \cap \ldots \cap C_{r_{h-1}}$ una variedad fija y únicamente $C_{r_h}$ móvil, con densidad $dG_h$, es

$$\int_G \sigma_{q+r_1+\ldots+r_h-hn}\,(C_q \cap C_{r_1} \cap \ldots \cap C_{r_h})\, dG_1 \ldots dG_h =$$

$$\frac{O_1 \ldots O_n\, O_{q+r_1+\ldots+r_h-hn}}{O_{q+r_1+\ldots+r_{h-1}-(h-1)n}\, O_{r_h}} \int_G \sigma_{q+r_1+\ldots+r_{h-1}-(h-1)n}\,(C_q \cap C_{r_1} \cap \ldots \cap C_{r_{h-1}})\, dG_1 \ldots dG_{h-1}$$

([30]) Para estos casos particulares, sólo para el caso euclidiano, ver: L. A. Santaló. — *Integralgeometrie, Ueber das kinematische Mass in Raum.* Hermann, París, 1936.

y procediendo sucesivamente y simplificando resulta finalmente

$$\int_G \sigma_{q+r_1+\ldots+r_h-hn}(C_q \cap C_{r_1} \cap \ldots \cap C_{r_h})\, dG_1 \ldots dG_h$$

$$= \frac{(O_1 O_2 \ldots O_n)^h O_{q+r_1+\ldots+r_h-hn}}{O_q O_{r_1} \ldots O_{r_h}} \sigma_q(C_q)\, \sigma_{r_1}(C_{r_1}) \ldots \sigma_{r_h}(C_{r_h}) \qquad [7.9]$$

Por ejemplo, para $n = 3$, si se tiene una superficie fija, $q = 2$, de área $F_1$, y dos superficies móviles ($r_1 = r_2 = 2$) de áreas $F_2$, $F_3$, respectivamente, llamando $N_{123}$ al número de puntos comunes para cada posición de las superficies móviles, resulta

$$\int_G N_{123}\, dG_2\, dG_3 = 8\pi^6 F_1 F_2 F_3 .$$

4. Caso particular en que $C_r$ es una esfera $r$-dimensional. — Supongamos que la variedad $C_r$ móvil sea una esfera $r$-dimensional. Sea $P$ su centro y representemos por $dP$ el elemento de volumen del espacio correspondiente al punto $P$. Según [1.11] la densidad cinemática $dG$ puede escribirse

$$dG = [dP\, dO_{n-1} \ldots dO_{r+1}\, dO_r \ldots dO_1] . \qquad [7.10]$$

Tomemos los vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ que forman el $n$-edro móvil del espacio de manera que $e_1, e_2, \ldots, e_{n-r-1}$ sean normales al espacio lineal $L_{r+1}$ que contiene a la $r$-esfera $C_r$. Entonces en [7.10] se puede integrar $[dO_r\, dO_{r-1} \ldots dO_1]$ sin que cambie la posición de $C_r$, es decir, mediante las rotaciones alrededor del espacio lineal determinado por $e_1, e_2, \ldots, e_{n-r-1}$ la $r$-esfera $C_r$ se superpone sobre sí misma. Además, si la esfera $C_r$ es de radio $\rho$, según [2.4], es $\sigma_r(C_r) = k^{-r} \operatorname{sen}^r k\rho\, O_r$, y por tanto [7.8] queda

$$\int \sigma_{r+q-n}(C_q \cap C_r)\, dP\, dO_{n-1} \ldots dO_{r+1} =$$

$$\frac{O_{r+1} O_{r+2} \ldots O_n O_{r+q-n}}{O_q} k^{-r} \operatorname{sen}^r k\rho\; \sigma_q(C_q) \qquad [7.11]$$

donde la integral del primer miembro está extendida a todas las posiciones de $C_r$.

Si $r = n - 1$, o sea, se trata de una esfera $(n-1)$-dimensional o hiperesfera de centro el punto variable $P$ y radio $\rho$, queda

$$\int_{S_n} \sigma_{r+q-n} (C_q \cap C_{n-1})\, dP = \frac{O_n O_{q-1}}{O_q} k^{-(n-1)} \operatorname{sen}^{n-1} k\rho\, \sigma_q (C_q). \quad [7.12]$$

También para una $C_q$ fija y $h$ hiperesferas de radio $\rho$ vale la fórmula [7.9], que en este caso aparece como una integral de volumen $h$ veces extendida a todo el espacio $S_n$. Por ejemplo, tomando $h = q$, la intersección de $C_q$ con $q$ hiperesferas se compone de puntos aislados; sea $N$ su número. La fórmula [7.9] toma la forma

$$\int N\, dP_1\, dP_2 \ldots dP_q = \frac{2\, O_n^q}{O_q} k^{-q(n-1)} \operatorname{sen}^{q(n-1)} k\rho\, \sigma_q (C_q) \quad [7.13]$$

o bien, para el caso euclidiano,

$$\int N\, dP_1 \ldots dP_q = \frac{2\, O_n^q}{O_q} \rho^{q(n-1)} \sigma_q (C_q) \quad [7.14]$$

fórmula que puede servir para « definir » el área o volumen $q$-dimensional de un conjunto de puntos, como hemos hecho en otro lugar ([31]).

## § 8. Algunas fórmulas integrales en el espacio euclidiano

1. La fórmula fundamental cinemática. — Sea ahora $S_n$ el espacio euclidiano $n$-dimensional ($K = 0$). Sean $Q_0$, $Q_1$ dos cuerpos del mismo, no necesariamente convexos, $Q_0$ fijo y $Q_1$ móvil.

Supongamos que las hipersuperficies que limitan $Q_0$ y $Q_1$ tengan en cada punto radios de curvatura principales distintos de cero, de manera que estén bien definidas las integrales de curvatura media respectivas $M_h^0$, $M_h^1$ $(h = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, (§ 4, nº 1). Para cuerpos cuyos contornos no cumplen estas condiciones de regularidad, los invariantes $M_h$ se pueden determinar en la mayoría de los casos tomando el valor de los mismos para el cuerpo paralelo exterior a distancia $\varepsilon$ y haciendo luego $\varepsilon \to 0$.

([31]) L. A. Santaló. — *Unas fórmulas integrales y una definición de área q-dimensional para un conjunto de puntos.* Revista de Matemáticas y Física Teórica de la Universidad Nacional de Tucumán, 1951.

En particular, sean $\chi_0 = \chi(Q_0)$, $\chi_1 = \chi(Q_1)$ las características de Euler-Poincaré de $Q_0$, $Q_1$ y $\chi_{01} = \chi(Q_0 \cap Q_1)$ la de su intersección, que dependerá de la posición de $Q_1$. Si $V_0$, $V_1$ son los volúmenes de $Q_0$, $Q_1$, vale la siguiente fórmula integral

$$\int_G \chi_{01}\, dG = O_1 O_2 \ldots O_{n-2} \left\{ O_{n-1} (\chi_0 V_1 + \chi_1 V_0) + \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} M_h^0 M_{n-2-h}^1 \right\}. \qquad [8.1]$$

Esta fórmula se llama la « fórmula fundamental cinemática » de la Geometría Integral para el espacio euclidiano. Para $n = 2, 3$ fué demostrada por Blaschke y para el caso general por Chern-Yien (trabajo citado en nota [8]), y recientemente de nuevo por Chern (ver nota [9]).

Para nuestro objeto nos interesa tener presente la demostración de Chern-Yien, generalización de la dada por Blaschke para $n = 3$ en *Deltion*, 1936. En estas demostraciones se busca la integral de $M_{n-1}(Q_0 \cap Q_1)$, de donde se pasa a la integral de $\chi(Q_0 \cap Q_1)$ por medio de la relación [4.25].

Supondremos la fórmula [8.1] conocida, remitiendo a la bibliografía indicada.

Para el próximo número necesitamos aplicarla al caso particular de ser $Q_0$, $Q_1$ *convexos* y además $Q_0$ degenerado en un cuerpo convexo $q$-dimensional $Q_0^{(q)}$ contenido en un $L_q$.

En primer lugar, si $Q_0$, $Q_1$ son convexos, es $\chi_0 = \chi_1 = \chi_{01} = 1$, y por tanto [8.1] queda

$$\int_{Q_0 \cap Q_1 \neq 0} dG = O_1 \ldots O_{n-2} \left\{ O_{n-1} (V_0 + V_1) + \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} M_h^0 M_{n-2-h}^1 \right\}. \qquad [8.2]$$

Si además $Q_0$ es un cuerpo convexo aplastado, contenido en un espacio lineal $L_q$, sus curvaturas medias $M_h^0$ sabemos que valen (§ 4, nº 5)

$$M_h^0 = \frac{\binom{q-1}{h+q-n}}{2\binom{n-1}{h}} O_{n-q} M_{h+q-n}^{0(q)} \qquad \text{para} \qquad h \geq n-q$$

$$M_h^0 = \frac{1}{\binom{n-1}{h}} O_{n-q-1}\, \sigma_q (Q_0^{(q)}) \qquad \text{para} \qquad h = n-q-1 \qquad [8.3]$$

$$M_h^0 = 0 \qquad \text{para} \qquad h < n-q-1$$

Por tanto, introduciendo en [8.2] las curvaturas medias $M_h^{0(q)}$ de $Q_0^{(q)}$ *como cuerpos convexos de* $L_q$, resulta (siendo $V_0 = 0$),

$$\int_{Q_0^{(q)} \cap Q_1 \neq 0} dG = O_1 \ldots O_{n-2} \left\{ O_{n-1} V_1 + \frac{\binom{n}{n-q}}{n\binom{n-1}{q}} O_{n-q-1}\, \sigma_q (Q_0^{(q)})\, M_{q-1}^1 \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n} \sum_{h=n-q}^{n-2} \binom{n}{h+1} \frac{\binom{q-1}{h+q-n}}{2\binom{n-1}{h}} O_{n-q} M_{h+q-n}^{0(q)} M_{n-2-h}^1 \right\}. \qquad [8.4]$$

Por ejemplo, para $n = 3$, $q = 2$, se tiene el caso de la medida de las posiciones de un cuerpo convexo $Q_1$ en que corta a una figura plana y convexa $Q_0$. En este caso es $\sigma_q (Q_0^{(q)}) = f_0 =$ área de $Q_0$, $M_1^{0(q)} = 2\pi$, $M_0^{0(q)} = u_0 =$ longitud del contorno de $Q_0$. Además, $M_0^1 = F_1 =$ área de $Q_1$, $M_1^1 = M_1 =$ curvatura media de $Q_1$, $M_2^1 = 4\pi$. Por tanto [8.4] queda

$$\int_{Q_0^{(2)} \cap Q_1 \neq 0} dG = 2\pi \left\{ 4\pi V_1 + 2 f_0 M_1 + \frac{\pi}{2} u_0 F_1 \right\}. \qquad [8.5]$$

2. Integral de las integrales de curvatura media $M_h (Q_0 \cap Q_1)$ de la intersección de dos cuerpos convexos. — Queremos calcular, siempre en el espacio euclidiano, las integrales de las curvaturas medias $M_h (Q_0 \cap Q_1)$ de las intersecciones de dos cuerpos convexos $Q_0$, $Q_1$ extendidas a todas las posiciones de $Q_1$, o sea, a todo el grupo de los movimientos del espacio.

Para ello consideramos la integral

$$I = \int dG\, dL_q . \qquad [8.6]$$

extendida a todas las posiciones de $Q_1$ y $L_q$ en que la intersección $Q_0 \cap Q_1 \cap L_q$ es distinta de cero.

Fijando primero $Q_1$ y llamando $M^{01}_{q-1}$ a la integral de la curvatura media de la intersección $Q_0 \cap Q_1$, según [4.11], es

$$I = \frac{O_{n-2}\, O_{n-3} \ldots O_{n-q-1}}{2\,(n-q)\, O_{q-1}\, O_{q-2} \ldots O_1} \int M^{01}_{q-1}\, dG . \qquad [8.7]$$

En cambio, fijando primero $L_q$ y llamando $Q^{(q)}$ a la intersección $Q_0 \cap L_q$, según [8.4], es

$$I = O_1 \ldots O_{n-2} \int \left\{ O_{n-1} V_1 + \frac{\binom{n}{n-q}}{n \binom{n-1}{q}} O_{n-q-1}\, \sigma_q (Q^{(q)})\, M^1_{q-1} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n} \sum_{h=n-q}^{n-2} \binom{n}{h+1} \frac{\binom{q-1}{h+q-n}}{2 \binom{n-1}{h}} O_{n-q}\, M^{(q)}_{h+q-n}\, M^1_{n-2-h} \right\} dL_q$$

y aplicando fórmulas conocidas ([4.11], [3.9], [4.20])

$$I = O_1 \ldots O_{n-2} \left\{ O_{n-1} V_1 \frac{O_{n-2} \ldots O_{n-q-1}}{2\,(n-q)\, O_1 \ldots O_{q-1}} M^0_{q-1} + \right.$$

$$\frac{\binom{n}{q}}{n \binom{n-1}{q}} O_{n-q-1} \frac{O_{n-1} \ldots O_{n-q} O_q}{2\, O_1 \ldots O_q} M^1_{q-1} V_0 + \frac{1}{n} \sum_{h=n-q}^{n-2}$$

$$\left. \frac{\binom{n}{h+1} \binom{q-1}{q+h-n}}{2 \binom{n-1}{h}} \frac{O_{n-2} \ldots O_{n-q}\, O_{2n-h-q}}{2\, O_1 \ldots O_{q-2}\, O_{n-h}} O_{n-q}\, M^1_{n-2-h}\, M^0_{h+q-n} \right\} .$$

Igualando con [8.7] y simplificando resulta

$$\int_G M^{01}_{q-1}\, dG = O_1 O_2 \dots O_{n-2} \left\{ O_{n-1} (V_1 M^0_{q-1} + V_0 M^1_{q-1}) \right.$$

$$\left. + \frac{(n-q)\, O_{q-1} O_{n-q}}{2\, O_{n-q-1}} \sum_{h=n-q}^{n-2} \frac{\binom{q-1}{q+h-n} O_{2n-h-q}}{(h+1)\, O_{n-h}} M^1_{n-2-h} M^0_{h+q-n} \right\}. \qquad [8.8]$$

Esta fórmula vale para $0 < q \leq n-1$. Para $q = n$, ella debe sustituirse por la de Chern-Yien [8.1], teniendo en cuenta [4.25].

Consideremos, como ejemplos, los siguientes casos particulares:

*a*) $q = 1$. Llamando $F_{01}$ al área de la intersección $Q_0 \cap Q_1$ y $F_0$, $F_1$ a las áreas de $Q_0$, $Q_1$, queda

$$\int F_{01}\, dG = O_1 O_2 \dots O_{n-1} (V_1 F_0 + V_0 F_1)$$

como también es fácil de obtener directamente.

*b*) $q = 2$. Llamando igualmente $F_0$, $F_1$ a las áreas de $Q_0$, $Q_1$, queda

$$\int M_{01}\, dG = O_1 \dots O_{n-1} (V_1 M^0_1 + V_0 M^1_1) + O_1 \dots O_{n-2} \frac{O_n^2}{4\, O_{n-1}} F_0 F_1, \qquad [8.9]$$

donde hemos utilizado la relación $2\pi O_{i-2} = (i-1)\, O_i$.

Por ejemplo, para $n = 3$, queda que la integral de la curvatura media de la intersección de dos cuerpos convexos del espacio ordinario vale

$$\int_G M_{01}\, dG = 8\pi^2 (V_1 M^0 + V_0 M^1) + \frac{1}{2}\pi^4 F_0 F_1 \qquad [8.10]$$

de acuerdo con el resultado obtenido en otro lugar (ver trabajo citado en nota ([30]), pág. 31).

2. Paso a cuerpos no convexos. — La fórmula [8.8] la hemos demostrado para cuerpos convexos. Sin embargo, los elementos que en ella intervienen tienen pleno significado también en el caso de cuerpos no convexos (siempre que para su contorno se puedan definir las integrales de curvatura media, sea directamente, sea considerando el cuerpo paralelo exterior a distancia $\varepsilon$ y tomando el límite para $\varepsilon \longrightarrow 0$ de la curvatura media correspondiente de este cuerpo paralelo). Vamos a demostrar que en este caso también vale la fórmula [8.8].

Sean $Q_0$, $Q_1$ dos cuerpos no necesariamente convexos del espacio euclidiano $n$-dimensional.

La integral de la curvatura media $M_{q-1}^{01}$ de la intersección $Q_0 \cap Q_1$ se descompone en tres partes: $a$) la integral de $\{1/R_1^0, 1/R_2^0, \ldots, 1/R_{q-1}^0\}$ extendida a la parte del contorno de $Q_0$ que es interior a $Q_1$; $b$) la integral análoga extendida a la parte del contorno de $Q_1$ que es interior a $Q_0$; $c$) la parte correspondiente a la variedad $(n-2)$-dimensional intersección del contorno de $Q_0$ con el de $Q_1$.

Las integrales de las dos primeras partes se calculan inmediatamente tomando un punto fijo en el contorno de uno de los cuerpos e integrando el otro a todas las posiciones en que contiene a este punto, el cual se hace variar luego a todo el contorno del primer cuerpo. Se obtienen así los dos primeros términos del segundo miembro de [8.8], o sea, la expresión $O_1 O_2 \ldots O_{n-1} (V_1 M_{q-1}^0 + V_0 M_{q-1}^1)$.

Más complicado es hallar la integral de la parte correspondiente a la intersección $\partial Q_0 \cap \partial Q_1$ de los contornos, la cual es una variedad de discontinuidad para la curvatura de $Q_0 \cap Q_1$. Se podría seguir un camino análogo al de Chern-Yien en el trabajo citado para ver que la integral de esta parte es una suma de la forma $\Sigma \alpha_{nqh} M_{n-2-h}^1 M_{h+q-n}$ (la sumatoria respecto $h$ y de $n-q$ a $n-2$), con los coeficientes $\alpha_{nqh}$ independientes de los cuerpos $Q_0$, $Q_1$. Por tanto, ellos deben ser los mismos que en el caso de cuerpos convexos, es decir, deben ser los mismos que figuran en la fórmula [8.8], la cual, en consecuencia, resulta válida también para cuerpos no convexos.

Sin necesidad de precisar tanto los cálculos se puede proceder también, más simplemente, de la manera siguiente:

Consideremos la fórmula [7.3] aplicada a las variedades $\partial Q_0$, $\partial Q_1$. En este caso será $q = r = n-1$, y por tanto queda

$$[d\sigma_{n-2}(x) . dG] = \Phi(\varphi)\, [d\sigma^0_{n-1}(x)\, d\sigma^1_{n-1}(x)\, dG_{(x)}] \qquad [8.11]$$

siendo $\varphi$ el ángulo de los dos contornos en el punto $x$ de su intersección. La contribución de la intersección $\partial Q_0 \cap \partial Q_1$ a la curvatura media $M^{01}_{q-1}$ de $Q_0 \cap Q_1$ se obtendrá tomando el cuerpo paralelo exterior a distancia $\varepsilon$, calculando luego la integral de la $(q-1)$-ésima curvatura media correspondiente a la parte paralela a $\partial Q_0 \cap \partial Q_1$ y hallando el valor límite de la misma para $\varepsilon \to 0$. Esta integral será de la forma $\int F(x, \varphi, \theta_h, R^0_i, R^1_i)\, d\varphi\, d\sigma_{n-2}(x)$, siendo $F$ una función (cuya forma explícita no interesa) del punto $x$ de la intersección $\partial Q_0 \cap \partial Q_1$, $\varphi$ el ángulo que una dirección variable entre las dos normales a $\partial Q_0$ y $\partial Q_1$ en $x$ forma con una de estas normales, $\theta_h$ $(h = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2} n (n-1))$ los ángulos que fijan la posición de $Q_1$ alrededor de $x$ y $R^0_i$, $R^1_i$ los radios principales de curvatura de $\partial Q_0$, $\partial Q_1$ en el punto $x$. Al multiplicar por $dG$ e integrar, aplicando [8.11], resulta que la integral resultante es igual a $\int F(x, \varphi, \theta_h, R^0_i, R^1_i)\, d\varphi\, d\sigma^0_{n-1}\, d\sigma^1_{n-1}\, dG_{[x]}$. Al integrar $dG_{[x]}$ y $d\varphi$ a todas las posiciones diferentes de $Q_1$ alrededor del punto $x$, resulta una función sólo de $x$, $R^0_i$, $R^1_i$. El resultado de integrar después el producto de esta función por $[d\sigma^0_{n-1}\, d\sigma^1_{n-1}]$ sabemos que en el caso de ser $Q_0$, $Q_1$ convexos nos da la sumatoria que aparece en el segundo miembro de [8.8]. Como este resultado, según el camino anterior, se deduce de razonamientos puramente « locales », no puede depender de si los cuerpos son o no convexos.

Por consiguiente, *la fórmula* [8.8] *vale para cuerpos cualesquiera, con sólo que para ellos estén definidas las integrales de curvatura media* $M^0_h$, $M^1_h$.

## § 9. La fórmula fundamental cinemática para espacios de curvatura constante

1. Integral de las curvaturas medias de la intersección de dos cuerpos cualesquiera en espacios de curvatura constante. — La fórmula [8.8] acabamos de ver que vale también para cuerpos cualesquiera, no necesariamente convexos, del espacio euclidiano. Queremos demostrar ahora que ella vale también para cuerpos cualesquiera de un espacio de curvatura constante $K$.

La demostración es completamente análoga a la del § 6, nº 2. En efecto, la fórmula [8.8] para cuerpos no necesariamente convexos, hemos observado en el número anterior que podía obtenerse a partir de cálculos locales en los cuales sólo hace falta aplicar los teoremas generalizados de Euler y de Meusnier a la intersección de variedades $(n-1)$-dimensionales y las fórmulas de Olinde Rodrigues a la misma intersección (para hallar la función $F(x, \varphi, \theta_h, R_i^0, R_i^1)$ del número anterior). Pero estas fórmulas valen todas ellas igualmente para los espacios de curvatura constante, lo mismo que la fórmula [7.3], y por tanto el resultado final debe ser también el mismo. En cuanto a los dos primeros sumandos del segundo miembro de [8.8] también valen lo mismo para cualquier espacio de curvatura constante, pues el razonamiento inmediato del número anterior para ellos, vale igualmente.

En definitiva:

*Las fórmulas* [8.8] *para* $0 \leq q \leq n-1$, *valen para cualquier par de cuerpos* $Q_0$, $Q_1$, *no necesariamente convexos, y para cualquier espacio de curvatura constante* $K$.

Para $q = n$ ya hemos dicho que la fórmula [8.8] debe sustituirse por la de Chern-Yien en la cual se sustituya $\chi_{01}$ por $(1/O_{n-1})\, M_{n-1}^{01}$, de acuerdo con [4.25]. Queda así, como complemento de las fórmulas [8.8], la siguiente

$$\int_G M_{n-1}^{01}\, dG = O_1 O_2 \ldots O_{n-1} \left\{ M_{n-1}^0 V_1 + M_{n-1}^1 V_0 + \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} M_h^0 M_{n-2-h}^1 \right\}, \qquad [9.1]$$

la cual, por las mismas razones expuestas, es válida para cuerpos cualesquiera (con sólo que para ellos estén definidas las integrales de curvatura media $M_h^0$, $M_h^1$) y para cualquier espacio de curvatura constante.

2. La fórmula fundamental cinemática en espacios de curvatura constante. — Sean $Q_0$, $Q_1$ dos cuerpos *no necesariamente convexos* del espacio de curvatura constante $K$.

Ya dijimos que la fórmula [8.1] se llama la « fórmula fundamental cinemática » de la Geometría Integral para el espacio euclidiano

$n$-dimensional. Nuesto objeto es generalizarla a espacios de curvatura constante. Ello es ya fácil una vez disponemos de la fórmula generalizada de Gauss-Bonnet (§ 6, nº 1) y de las integrales de curvatura media [8.8] y [9.1].

Hay que distinguir dos casos:

1º *n par.*

Apliquemos la fórmula [6.2] a la intersección $Q_0 \cap Q_1$ e integremos a todas las posiciones de $Q_1$. Necesitamos en primer lugar la integral de volumen $V_{01}$ de la intersección $Q_0 \cap Q_1$. Ella puede obtenerse fácilmente de manera directa o bien aplicando la fórmula [7.8] al caso $q = r = n$. Se obtiene

$$\int_G V_{01}\, dG = O_1 O_2 \ldots O_{n-1} V_0 V_1 . \qquad [9.2]$$

Las fórmulas [8.8] nos dan las integrales de $M_h^{01}$ para $h = 1, 2, \ldots n-2$, y la [9.1] la integral de $M_{n-1}^{01}$. Con esto, la integración de ambos miembros de [6.2] extendida a todas las posiciones de $Q_1$, después de simplificar y ordenar, nos da

$$\int_G \chi(Q_0 \cap Q_1)\, dG = -\frac{2\, O_1 O_2 \ldots O_{n-1}}{O_n} K^{n/2} V_0 V_1 +$$

$$+ O_1 O_2 \ldots O_{n-1} (V_1 \chi_0 + V_0 \chi_1) +$$

$$O_1 \ldots O_{n-2} \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} M_h^0 M_{n-2-h}^1 +$$

$$O_1 \ldots O_{n-2} \left\{ \sum_{i=0}^{n/2-2} \binom{n-1}{2i+1} \frac{n-2i-2}{O_{n-2i-3}} K^{\frac{n-2i-2}{2}} \right.$$

$$\left. \sum_{h=n-2i-2}^{n-2} \frac{\binom{2i+1}{n-h-1} O_{2n-h-2i-2}}{(h+1)\, O_{n-h}} M_{n-2-h}^1 M_{h+2i+2-n}^0 \right\} \qquad [9.3]$$

donde $\chi_0$, $\chi_1$ son las características de Euler-Poincaré y $M_h^0 M_h^1$ las integrales de curvatura media de $Q_0$ y $Q_1$, respectivamente.

Por ejemplo, para $n = 2$, poniendo $F_0$, $F_1$ (en vez de $V_0$, $V_1$)

para indicar las áreas de las dos figuras y $L_0$, $L_1$ (longitudes de los contornos) en vez de $M_0^0$, $M_0^1$, resulta la fórmula conocida

$$\int_G \chi_{01}\, dG = -K F_0 F_1 + 2\pi (F_1 \chi_0 + F_0 \chi_1) + L_0 L_1 . \quad [9.4]$$

2° *n impar.*

Integrando análogamente ambos miembros de la fórmula [6.2] aplicada a la intersección $Q_0 \cap Q_1$ y teniendo en cuenta las fórmulas [8.8], [9.1], después de simplificar y ordenar resulta

$$\int_G \chi (Q_0 \cap Q_1)\, dG = O_1 O_2 \ldots O_{n-1} (V_1 \chi_0 + V_0 \chi_1) +$$

$$+ O_1 \ldots O_{n-2} \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} M_h^0 M_{n-2-h}^1 +$$

$$+ O_1 \ldots O_{n-2} \left\{ \sum_{i=0}^{(n-3)/2} \binom{n-1}{2i} \frac{n-2i-1}{O_{n-2i-2}} K^{\frac{n-1-2i}{2}} \right.$$

$$\left. \sum_{h=n-2i-1}^{n-2} \binom{2i}{n-h-1} \frac{O_{2n-h-2i-1}}{(h+1)\, O_{n-h}} M_{n-2-h}^1 M_{h+2i+1-n}^0 \right\} . \quad [9.5]$$

Por ejemplo, para $n = 3$ resulta

$$\int_G \chi (Q_0 \cap Q_1)\, dG = 8\pi^2 (V_1 \chi_0 + V_0 \chi_1) + 2\pi (F_0 M_1 + F_1 M_0) \quad [9.6]$$

como obtuvimos directamente en otro lugar (trabajo citado en nota [7]).

Observemos el hecho curioso de que la integral de la característica de Euler-Poincaré de la intersección de dos cuerpos, sólo es independiente de la curvatura del espacio para $n = 3$.

SUMMARY

We use the following notations:

$S_n$ = $n$-dimensional space of constant curvature $K$.
$L_r$ = linear $r$-dimensional subspace of $S_n$.
$G$ = group of motions of $S_n$.
$g_r$ = subgroup of $G$ which leaves invariant a fixed $L_r$.
$dG$ = invariant element of volume of $G$ = kinematic density of $S_n$.
$dL_r$ = invariant element of volume of the homogeneous space $G/g_r$ = density for sets of $L_r$.
$O_i$ = volume of the $i$-dimensional euclidean sphere of radius unity (given by [1.12]).
$C_q$ = $q$-dimensional variety of $S_n$.
$\sigma_q(C_q)$ = volume of $C_q$.
$\sigma_{q+r-n}(C_q \cap L_r)$ = $(q+r-n)$-dimensional volume of the intersection $C_q \cap L_r$.
$\sigma_{q+r-n}(C_q \cap C_r)$ = $(q+r-n)$-dimensional volume of the intersection $C_q \cap C_r$.
$M_r$ = integrated mean curvature of order $r$ (defined by [4.1] and [4.2]).
$M_i^{(r)}$ = integrated mean curvature of order $i$ of a body contained in a $L_r$, considered as a $r$-dimensional body of $L_r$.
$\chi(C_n)$ = characteristic of Euler-Poincaré of $C_n$.

With these notations our principal results are the following:

§ 1 and § 2 are concerned with the expressions of $dG$ and $dL_r$. These densities were found by Blaschke [4], Petkantschin [5] and Müller [12], but the method of the « moving frames » of Cartan we follow it seems to be the more indicated one for our purposes. With these densities we evaluate the total volume of certain groups ([1.15], [1.16]) and of certain homogeneous spaces ([2.2], [2.3], [2.6]).

In § 3 we get the formula [3.9] which condenses a great deal of particular cases.

In § 4 we consider the euclidean space ($K = 0$) and obtain the formula [4.11], which gives the measure of the $L_r$ which have common point with a fixed convex body $Q$, and the more general formula [4.28] which holds for any body $C_n$, not necessarily convex. With these formulas we are able to compute the explicit value of certain constants $c_{qin}$ (formula [4.35]) which were considered by Herglotz and Petkantschin (5).

In § 5 we make application to a problem of geometrical prcbabilities and to the generalization to the $n$-dimensional (euclidean) space of the classical integral formulas of Crofton.

In § 6 the formulas [6.7] and [6.8] are obtained, which contain, as particular case, the measure of the $L_r$ which cut a fixed convex body $Q$ in a space of constant curvature.

Part II deals with the kinematic density. In § 7 and § 8 we get the formulas [7.8] and [8.8] wich are of a great generality and contain several particular cases.

Finally, in § 9 we generalize to spaces of constant curvature the kinematic fundamental formula of the Integral Geometry. For $n = 2, 3$ this formula is due to Blaschke and for the $n$-dimensional euclidean space to Chern-Yien (8) and (9).