PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 5 — Fasc. 4 — 1946

SOBRE LOS CUERPOS CONVEXOS DE ANCHURA CONSTANTE EN E_n

por L. A. Santaló (Rosario, Argentina)

(Recebido em 1946, Dezembro)

0. Resumen. Se sabe que entre la longitud L y la anchura a de una figura convexa plana de anchura constante, existe la relación

$$L=\pi a .$$

Analogamente, entre el volumen V, el área F y la integral de la curvatura media M de un cuerpo convexo del espacio de anchura constante a, existen las relaciones

$$2V-aF+2\pi a^3/3=0$$
$$M-2\pi a=0 .$$

El objeto de esta nota es generalizar estas relaciones, obteniendo todas las existentes, a los cuerpos convexos de anchura constante del espacio euclidiano n-dimensional. Estas relaciones son las (4·6) y (4·7) del n.º 4.

1. Definiciones y notaciones. En toda esta nota seguiremos las notaciones del libro de Bonnesen-Fenchel «*Theorie der konvexen Körper*», Berlin 1934. Vamos a recordar rapidamente las definiciones que necesitaremos.

Sea E_n el espacio euclidiano n-dimensional. Se llama *cuerpo convexo* de E_n a todo conjunto convexo de puntos que sea limitado y cerrado y tenga puntos interiores.

Los puntos del contorno de un cuerpo convexo C constituyen una hipersuperficie convexa que, por brevedad, representaremos también por C.

Se llama *hiperplano de apoyo (Stützebene)* de un cuerpo convexo C a todo hiperplano que tiene punto común con C sin atravesarlo, es decir, a todo hiperplano que tiene punto común con C pero deja a todo este cuerpo en un mismo semiespacio de los dos en que divide a E_n.

Sea O un punto interior a C, que tomaremos como origen de coordenadas. Una dirección $u=u(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ por O quedará determinada por sus cosenos directores $u_1, u_2, \ldots, u_n$, ligados por la relación $u^2=\sum u_i^2=1$. Normalmente a la dirección u hay un solo hiperplano de apoyo; sea $H(u)=H(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ la distancia de O a este hiperplano. La función

$$H=H(u) \tag{1·1}$$

se llama la *función de apoyo* de C.

Se llama cuerpo convexo *paralelo exterior* a C a distancia h, al cuerpo convexo $C(h)$ cuya función de apoyo es

$$H_h(u)=H(u)+h \tag{1·2}$$

siendo h una constante positiva.

Se demuestra (Bonnesen-Fenchel, pág. 49) que el volumen $V(h)$ de $C(h)$ está dado por la siguiente expresión

$$V(h)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}h^{\nu}W_{\nu} \tag{1·3}$$

donde las W_ν son unos invariantes del cuerpo convexo C.

Si la hipersuperficie que limita C tiene en cada punto radios principales de curvatvra finitos, los invariantes W_ν se expressan de la siguiente manera (Bonnesen-Fenchel, pág, 63).

Sea $\{R_1 R_2 \ldots R_\nu\}$ la función simétrica elemental de orden ν de los radios principales de curvatura $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$ y representemos por $d\omega$ el elemento de área de la esfera de radio unidad correspondiente a la dirección cuyo plano de apoyo normal toca a C en el punto donde los radios principales de curvatura son los R_i. Con estas notaciones W_ν está dado por

$$W_\nu=\frac{1}{n\binom{n-1}{n-\nu-1}}\int_E H\,\{R_1 R_2 \ldots R_{n-\nu-1}\}\,d\omega, \tag{1·4}$$

donde la integración está extendida a toda la superficie de la esfera unidad n-dimensional.

Como casos particulares de las W_ν se tienen:

W_0 es igual al volumen V de C, o sea,

$$W_0 = V\,; \tag{1·5}$$

nW_1 es igual al área F de C (o bien à la longitud L para $n=2$), o sea,

$$W_1 = F/n\,, \tag{1·6}$$

nW_2 es igual a la integral de la curvatura media de C, o sea,

$$W_2 = M/n \tag{1·7}$$

siendo

$$M = \frac{1}{n-1}\int\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\cdots+\frac{1}{R_{n-1}}\right)ds$$

donde ds es el elemento de área de C y la integración está extendida a toda la superficie de C;

W_n es igual al volumen de la esfera unidad n-dimensional, o sea:

$$W_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}\,. \tag{1·8}$$

2. Relaciones entre las W_ν para cuerpos convexos paralelos. La fórmula (1·3) nos dice que $V(h)$ es un polinomio en h de grado n. Por tanto, aplicando el desarrollo de Taylor para polinomios vale la fórmula

$$V(h) = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{h^\nu}{\nu!}\left(\frac{d^\nu V(h)}{dh^\nu}\right)_{h=0}\,. \tag{2·1}$$

Comparando con (1·3) se deduce

$$W_\nu = \frac{1}{\nu!\binom{n}{\nu}}\left(\frac{d^\nu V(h)}{dh^\nu}\right)_{-}\,. \tag{2·2}$$

Esta nueva expresión para las W_ν tiene la ventaja, sobre las (1·4), de no exigir la existencia o finitud de los radios principales de curvatura R_i.

En vez del cuerpo convexo C, consideremos el paralelo exterior $C(h)$: para él debe valer también la misma fórmula (2·2). Por tanto, llamando $W_\nu(h)$ al valor del invariante W_ν para el cuerpo convexo

$C(h)$. será

$$W_\nu(h) = \frac{1}{\nu!\binom{n}{\nu}} \frac{d^\nu V(h)}{dh^\nu}. \tag{2·3}$$

Teniendo en cuenta (1·3) esta expresión nos da

$$W_\nu(h) = \sum_{i=0}^{n-\nu} \binom{n-\nu}{i} h^i W_{\nu+i}. \tag{2·4}$$

Esta relación, que para $\nu=0$ coincide con (1·3), sirve para calcular las $W_\nu(h)$ de $C(h)$ en función de las $W_{\nu+i}$ de C.

3. CUERPOS CONVEXOS PARALELOS INTERIORES DE OTRO DADO. Sea el cuerpo convexo C cuya función de apoyo es $H = H(u)$. Consideremos los infinitos hiperplanos cuya distancia al origen O vale, para cada dirección u,

$$H(u) = H(u) - h \tag{3·1}$$

siendo h una constante positiva.

La envolvente de tados estos hiperplanos será una hipersuperficie $C(-h)$ que tiene en cada punto la misma normal que la hipersuperficie de C en el punto correspondiente. Por consiguiente, a las lineas de curvatura de C corresponderán las lineas de curvatura de $C(-h)$ y los radios principales de curvatura R_i^* de $C(-h)$ estarán ligados con los de C por la relación

$$R_i^* = R_i - h \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{3·2}$$

Por tanto, la inversa de la curvatura total de Gauss de $C(-h)$ valdrá:

$$K(-h) = (R_1 - h)(R_2 - h)\ldots(R_{n-1} - h). \tag{3·3}$$

Para que esta curvatura tenga signo constante y por tanto $C(-h)$ sea la hipersuperficie de un cuerpo convexo, es suficiente que sea

$$h \leq \min R_i \quad \text{o bien} \quad h \geq \text{máx}\, R_i. \tag{3·4}$$

Si h cumple una de estas condiciones, la hipersuperficie $C(-h)$ será la hipersuperficie de un cuerpo convexo, que indicaremos también por $C(-h)$. Este $C(-h)$ se llamará el cuerpo convexo *paralelo interior* de C a distancia h.

Siendo $C(-h)$ también un cuerpo convexo, para él valen las relaciones anteriores (1·3) y (2·4), con solo sustituir en ellas h por $-h$. Basta, en efecto, sustituir en (1·4) H por $H-h$ y los R_i por R_i-h y desarrollar según las potencias de h.

4. Relaciones entre los invariantes W_ν de los cuerpos convexos de anchura constante. Sea $H=H(u)$ la función de apoyo de un cuerpo convexo C. Si $-u$ indica la dirección opuesta a u, los hiperplanos de apoyo normales a esta dirección serán paralelos y la distancia entre ellos será

$$a(u)=H(u)+H(-u). \tag{4·1}$$

$a(u)$ se llama la *anchura* de C según la dirección u.

Cuando $a(u)=$constante, se dice que C es un *cuerpo convexo de anchura constante.* Estos cuerpos, que para $n=2$ (caso del plano) se llaman *orbiformes* y para $n=3$ (caso del espacio) se llaman *esferiformes*, tienen notables propriedades (Bonnesen-Fenchel, § 15).

De la definición se deduce que todo cuerpo convexo de anchura constante a es paralelo interior de si mismo a distancia a, es decir, $C(-a)=C(a)$. En consecuencia los invariantes $W_\nu(-a)$ correspondientes a $C(-a)$ deben ser iguales a los W_ν correspondientes de C; únicamente puede haber cambiado el signo. Para ver esta diferencia de signo observemos que suponiendo H y los R_i positivos, los W_ν según (1·4) también lo serán; en cambio los $W_\nu(-a)$ tendrán el signo que resulte al sustituir en (1·4) $H-a$ y R_i-a en lugar de H y R_i. Se sabe (Bonnesen-Fenchel, pág. 128) que para un cuerpo convexo de anchura constante los radios principales de curvatura correspondientes a las lineas de curvatura homólogas en dos puntos opuestos, tienen su suma igual a la anchura a; por consiguiente es $a \geq R_i$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$ y como también $a \geq H$, de (1·4) resulta que el signo de $W_\nu(-a)$ es el de $(-1)^{n-\nu}$. Por tanto

$$W_\nu(-a)=(-1)^{n-\nu}W_\nu \tag{4·2}$$

Aplicando esta igualdad a (2·4) para $h=-a$, resulta que *entre los invariantes* W_ν *de los cuerpos convexos de anchura constante* a *de* E_n *existen las relaciones*

$$W_\nu=\sum_{i=0}^{n-\nu}(-1)^{n-\nu+i}\binom{n-\nu}{i}a^i W_{\nu+i} \tag{4·3}$$

para $\nu=0,1,2,\ldots,n$.

Estas $n+1$ relaciones non son independientes. Para verlo, escribamos detalladamente (4·3) para $\nu=n$, $n-1, n-2, \ldots, n-\nu$, siendo ν par. Resultan las relaciones:

$$
\begin{aligned}
&0)\ W_n = W_n \\
&1)\ W_{n-1} = aW_n - W_{n-1} \\
&2)\ W_{n-2} = a^2 W_n - \binom{2}{1} aW_{n-1} + W_{n-2} \\
&3)\ W_{n-3} = a^3 W_n - \binom{3}{1} a^2 W_{n-1} + \binom{3}{2} aW_{n-2} - W_{n-3} \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot \\
&\nu)\ W_{n-\nu} = a^\nu W_n - \binom{\nu}{1} a^{\nu-1} W_{n-1} + \binom{\nu}{2} a^{\nu-2} W_{n-2} - \ldots + W_{n-\nu}.
\end{aligned}
\tag{4·4}
$$

Vamos a demostrar que, en la hipótesis dicha de ser ν un número par, la última ecuación escrita es una consecuencia de las anteriores. En efecto, multipliquemos la ecuación 0) por a^ν, la ecuacion 1) por $-\binom{\nu}{1}a^{\nu-1}$, y, en general,la ecuación i) por $(-1)^i\binom{\nu}{i}a^{\nu-i}$. Sumando luego miembro a miembro queda

$$\sum_{i=0}^{\nu}(-1)^i\binom{\nu}{i}a^{\nu-i}W_{n-i} = \sum_{j=0}^{\nu}\left(\sum_{i=j}^{i=\nu}(-1)^i\binom{\nu}{i}\binom{i}{j}\right)(-1)^j a^{\nu-j}W_{n-j}. \tag{4·5}$$

Pero según una fórmula conocida[1], es

$$\sum_{i=j}^{i=\nu}(-1)^i\binom{\nu}{i}\binom{i}{j} = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \neq j \\ (-1)^j & \text{si } \nu = j, \end{cases}$$

y como el primer miembro de (4·5) según la ecuación ν) de (4·4) es igual a $W_{n-\nu}$, resulta la identidad $W_{n-\nu} = W_{n-\nu}$.

Esto nos dice que de las $n+1$ relaciones (4·3) para $\nu=0, 1, 2, \ldots, n$ se pueden suprimir todas las correspondientes a $n-\nu$ par, por ser ellas consecuencia de las que les siguen.

En definitiva queda:

Entre los invariantes W_ν *de un cuerpo convexo de anchura constante* a *del espacio euclidiano de* n *dimensiones, existen las siguientes relaciones independientes:*

[1] Ver E. Netto, «*Lehrbuch der Combinatorik*», Leipzig und Berlin, 1927, pág. 255, fòrmula (43).

a) *Si* $n = 2m$:

$$2W_{2\nu-1} + \sum_{i=1}^{n-2\nu+1} (-1)^i \binom{n-2\nu+1}{i} a^i W_{2\nu-1+i} = 0 \qquad (4{\cdot}6)$$

para $\nu = 1, 2, 3, \ldots, m$.

b) *Si* $n = 2m+1$:

$$2W_{2\nu} + \sum_{i=1}^{n-2\nu} (-1)^i \binom{n-2\nu}{i} a^i W_{2\nu+i} = 0 \qquad (4{\cdot}7)$$

para $\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots, m$.

5. Ejemplos. 1. Para el plano $n = 2$, la relación única es

$$2W_1 - aW_2 = 0,$$

o sea, siendo $2W_1 = L$, $W_2 = \pi$,

$$L - \pi a = 0$$

que es la relación conocida entre la longitud L y la anchura a de las figuras planas convexas de anchura constante (Bonnesen-Fenchel, pág. 131).

2. Para el espacio ordinario, $n = 3$, las relaciones son

$$2W_0 - 3aW_1 + 3a^2 W_2 - a^3 W_3 = 0; \quad 2W_2 - aW_3 = 0$$

que, según (1·5), (1·6), (1·7) y (1·8) se pueden escribir

$$2V - aF + \frac{2}{3}\pi a^3 = 0; \quad M - 2\pi a = 0.$$

3. Para $n = 4$ se tiene

$$2W_1 - 3aW_2 + 3a^2 W_3 - a^3 W_4 = 0; \quad 2W_3 - aW_4 = 0,$$

o bien, según (1·5), (1·6), (1·7) y (1·8),

$$2F - 3aM + a^3\pi^2 = 0; \quad 4W_3 - a\pi^2 = 0.$$

Universidad Nacional del Litoral, Rosario, Argentina