PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 8 — Fasc. 4 — 1949

UN INVARIANTE AFIN PARA LOS CUERPOS CONVEXOS DEL ESPACIO DE n DIMENSIONES

por L. A. SANTALÓ (LA PLATA, ARGENTINA)

(Recebido em 1950, Novembro, 12)

1. Introducción. Sea K un cuerpo convexo del espacio euclidiano de n dimensiones E_n. Sea $P(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ un punto interior a K y $h=h(\omega)$ la función de apoyo de K con respecto al punto P (con ω indicaremos un punto sobre la esfera unidad). Si $d\omega$ representa el elemento de área ($(n-1)$-dimensional) de la esfera unidad correspondiente al punto ω, se sabe que la integral

$$(1.1) \qquad I(P) = \frac{1}{n}\int_{\Omega} \frac{d\omega}{h^n}$$

es un invariante de K con respecto las centro-afinidades unimodulares de centro P [9, p. 749]. I(P) es precisamente la medida de todos los hiperplanos exteriores a K, invariante con respecto las centro-afinidades de centro P. Con Ω indicaremos indistintamente la superficie de la esfera unidad de E_n y su área.

El mínimo de I(P) al variar P en el interior de K será un invariante de K con respecto todas las afinidades unimodulares de E_n. Lo representaremos por

$$(1.2) \qquad I_m = \min_P I(P), \qquad (P \subset K)$$

El objeto de esta nota es probar:

1.° Existe un solo mínimo relativo para I(P), el cual será por tanto mínimo absoluto. Si K tiene centro de simetria O, este mínimo corresponde al caso $P \equiv O$.

2.° El invariante afin I_m se relaciona con el volumen V y el área afin F_a de K por las desigualdades

$$(1.3) \qquad I_m V \leq (\Omega/n)^2, \qquad I_m F_a \leq \Omega^{2n}/n^{n-1}$$

en las cuales el signo igual vale unicamente para el caso de ser K un elipsoide de n dimensiones. Como hemos dicho, en estas desigualdades es

$$\Omega = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}. \tag{1.4}$$

Finalmente damos una interpretación geométrica de la primera desigualdad (1.3) para el caso en que K tiene centro de simetria, observando que ella demuestra una suposición de K. MAHLER, mejorando lo mas posible el extremo superior de una desigualdad de este autor.

2. Estudio de la función I(P) al variar P. La función I(P) definida por (1.1) toma el valor infinito para los puntos del contorno de K, mientras que para todo punto P interior a K tiene un valor finito y positivo. Vamos a buscar los puntos P interiores a K para los cuales I(P) toma un valor estacionario (o sea, se anulan sus primeras derivadas parciales).

Sea P_0 un punto interior a K que tomamos como origen de coordenadas y sea $h_0 = h_0(\omega)$ la función de apoyo de K con respecto a P_0. La función de apoyo $h = h(\omega)$ con respecto el punto $P(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ será

$$h(\omega) = h_0(\omega) - \sum_1^n \alpha_i \xi_i \tag{2.1}$$

siendo α_i los cosenos directores de la dirección ω.

Se tiene por tanto

$$\mathrm{I}(\mathrm{P}) = \frac{1}{n}\int_\Omega \frac{d\omega}{(h_0 - \Sigma\, \alpha_i \xi_i)^n} \tag{2.2}$$

y por consiguiente para que al punto P corresponda un valor estacionario de I(P) debe ser

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \xi_i} = \int_\Omega \frac{\alpha_i\, d\omega}{h^{n+1}} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{2.3}$$

Para ver si este valor estacionario es máximo o mínimo, observemos que es

$$\frac{\partial^2 \mathrm{I}}{\partial \xi_i\, \partial \xi_j} = (n+1)\int_\Omega \frac{\alpha_i\, \alpha_j\, d\omega}{h^{n+2}}. \tag{2.4}$$

Por tanto, si $Q(\xi_1 + \varepsilon_1, \xi_2 + \varepsilon_2, \cdots, \xi_n + \varepsilon_n)$ es un punto próximo a P, por el desarrollo de Taylor es, teniendo en cuenta (2.3),

$$I(Q)-I(P)=\frac{n+1}{2}\sum\int_{\Omega}\frac{\alpha_i\,\alpha_j\,\varepsilon_i\,\varepsilon_j}{h^{n+2}}\,d\omega+\cdots.$$

$$=\frac{n+1}{2}\int_{\Omega}\frac{(\Sigma\,\alpha_i\,\varepsilon_i)^2}{h^{n+2}}\,d\omega+\cdots$$

Por tanto, como $h>0$, para $|\varepsilon_i|$ suficientemente pequeños, es siempre $I(Q)>I(P)$, es decir: *los valores estacionarios de* $I(P)$ *son siempre mínimos.*

De aqui se deduce que el mínimo de $I(P)$ es único. En efecto según un resultado de MORSE [7, en especial pág. 393] si todos los puntos extremales de una función definida en el interior de un cuerpo convexo son mínimos relativos, su número debe ser uno solo. Luego, resumiendo:

Existe un solo punto interior a K *para el cual* $I(P)$ *toma un valor mínimo (que será el mínimo absoluto), el cual está caracterizado por cumplirse para él las condiciones* (**2**.3).

Por ejemplo, si K tiene centro de simetria, las condiciones (**2**.3) se cumplen evidentemente para él y por tanto: *para los cuerpos convexos con centro de simetria el mínimo de* $I(P)$ *corresponde al centro de simetría.*

3. El invariante afin I_m y sus relaciones con el volumen y el área afin. Llamemos I_m al valor (**1**.2), o sea al mínimo de $I(P)$ con respecto todos los puntos interiores a K. Este I_m será un invariante de K con respecto todas las afinidades unimodulares. Si K tiene centro de simetria ya hemos dicho que I_m tiene el valor (**1**.1) para la función de apoyo $h=h(\omega)$ referida al centro de simetria.

Para comparar I_m com el volumen V y el área afin F_a de K (que son los otros invariantes afines mas simples), debemos recordar algunos resultados conocidos.

1.° Sea K^0 un cuerpo convexo de E_n limitado por una superficie S^0 que tenga en cada punto radios de curvatura principales bien determinados $R_1, R_2, \cdots, R_{n-1}$ y pongamos

$$D=R_1\,R_2\,R_3\cdots R_{n-1}. \tag{3.1}$$

Por ser S^0 convexa es $R_i>0$.

Si $d\sigma$ es el elemento de área ordinaria de S^0 y $d\omega$ el elemento de área sobre la esfera unidad correspondiente a la dirección de la normal a S^0 en el punto donde se considera el $d\sigma$, es

$$d\sigma=D\,d\omega. \tag{3.2}$$

El *área afin* de S^0 se define por

$$F_a^0 = \int_{S^0} D^{-1/(n+1)}\, d\sigma = \int_{\Omega} D^{n/(n+1)}\, d\omega \tag{3.3}$$

y entre esta área afin de S^0 y el volumen V^0 del cuerpo K^0 que ella limita existe la desigualdad de BLASCHKE [1, p. 198]

$$(F_a^0)^{n+1} \leqslant \Omega^2 (nV^0)^{n-1} \tag{3.4}$$

donde el signo de igualdad vale unicamente para el caso de ser K^0 un elipsoide de n dimensiones.

La desigualdad (3.4) es debida a BLASCHKE para el caso $n=3$, pero la misma demostración vale sin apenas modificación para el caso n-dimensional.(*)

2.° Sean K y K^0 dos cuerpos convexos de E_n limitados respectivamente por las superficies S, S^0. Si $h(\omega)$ es la función de apoyo de K y $d\sigma$ el elemento de área de S^0, el *primer volumen mixto* de MINKOWSKI de K y K^0 es

$$V_1 = \frac{1}{n} \int_{S^0} h\, d\sigma \tag{3.5}$$

y se sabe que existe la desigualdad de MINKOWSKI

$$V_1^n \geqslant V (V^0)^{n-1} \tag{3.6}$$

donde V es el volumen de K y V^0 el de K^0. La igualdad vale unicamente cuando K y K^0 son homotéticos. Ver, por ejemplo, BONNESEN-FENCHEL [3, p. 91].

(*) Para generalizar la demostración de BLASCHKE a n dimensiones solo hay que tener en cuenta la siguiente desigualdad:

Si $|a_{ik}|, |b_{ik}|$ *son dos determinantes positivos de orden* m, *para* $p \geqslant 0$ *se verifica*

$$(2^p |a_{ik} + b_{ik}|)^{1/(m+p)} \geqslant |a_{ik}|^{1/(m+p)} + |b_{ik}|^{1/(m+p)}. \tag{*}$$

Para $p=0$ esta desigualdad coincide con una dada por MINKOWSKI [5, p. 35] y puede demostrarse de manera análoga. En efecto, siempre se pueden multiplicar los dos determinantes $|a_{ik}|, |b_{ik}|$ por un mismo determinante de valor unidad tal que los productos sean determinantes con solo los elementos de la diagonal principal distintos de cero. Llamando a_i, b_i a estos elementos, será

$$|a_{ik}| = \prod_1^m a_i, \quad |b_{ik}| = \prod_1^m b_i, \quad |a_{ik} + b_{ik}| = \prod_1^m (a_i + b_i).$$

Escribiendo 2^p en la forma $(1+1)(1+1)\cdots(1+1)$ (p factores), la desigualdad (*) resulta un caso particular de la desigualdad general

$$\left(\prod_1^s (\alpha_i + \beta_i)\right)^{1/s} \geqslant \left(\prod_1^s \alpha_i\right)^{1/s} + \left(\prod_1^s \beta_i\right)^{1/s}$$

a cual es bien conocida [5, p. 39].

Pasemos ahora a nuestro problema. Sea $h = h(\omega)$ la función de apoyo del cuerpo convexo K referida al punto P para el cual I(P) es mínimo. Hemos visto que entonces se cumplen las condiciones (**2**.3). Según un resultado clásico de MINKOWSKI [3, p. 121], cumpliéndose las condiciones (**2**.3) existirá un cuerpo convexo K^0 limitado por una superficie S^0 cuyos radios principales de curvatura $R_1, R_2, \cdots, R_{n-1}$ cumplan la condición

$$D(\omega) = R_1 R_2 \cdots R_{n-1} = h^{-(n+1)}. \tag{3.7}$$

El elemento de área $d\sigma$ de K^0 valdrá $d\sigma = D\,d\omega = h^{-(n+1)}\,d\omega$ y por tanto, según (**3**.5) el primer volumen mixto entre K y K^0 vale

$$V_1 = \frac{1}{n}\int_{S^0} h\,d\sigma = \frac{1}{n}\int_{\Omega} h^{-n}\,d\omega = I_m. \tag{3.8}$$

La desigualdad (**3**.6) de MINKOWSKI da por tanto

$$I_m^n \geqslant V(V^0)^{n-1} \tag{3.9}$$

siendo V el volumen de K y V^0 el de K^0.

Por otra parte, el área afín de K^0, según (**3**.3) vale

$$F_a^0 = \int_{\Omega} D^{n/(n+1)}\,d\omega = \int_{\Omega} h^{-n}\,d\omega = n\,I_m \tag{3.10}$$

y por tanto la desigualdad de BLASCHKE (**3**.4) da

$$(n\,I_m)^{n+1} \leqslant \Omega^2 (nV^0)^{n-1}. \tag{3.11}$$

De (**3**.9) y (**3**.11) resulta

$$I_m V \leqslant (\Omega/n)^2 \tag{3.12}$$

que es la desigualdad que queriamos obtener.

Si se quiere relacionar I_m con el área afín F_a basta tener en cuenta (**3**.4), que combinada con (**3**.12) da

$$I_m^{n-1} F_a^{n-1} \leqslant \Omega^{2n}/n^{n-1}. \tag{3.13}$$

Tanto en (**3**.12) como en (**3**.13) el signo de igualdad vale para los elipsoides n-dimensionales (basta comprobarlo para la esfera). Como, además, en (**3**.11) la igualdad solamente vale para elipsoides, y en (**3**.9) para cuerpos convexos homotéticos, resulta:

Entre el invariante afín I_m, el volumen V y el área F_a de un cuerpo convexo K de E_n tienen lugar las desigualdades (**3**.12) *y* (**3**.13), *en las cuales el signo de igualdad vale unicamente para el caso de ser* K *un elipsoide de n dimensiones.*

Desde otro punto de vista y con una interpretación distinta, una desigualdade equivalente a la (**3.**12) para $n=3$ se encuentra ya en BLASCHKE [2].

4. *Interpretacion geometrica.* Consideremos el caso en que K tenga centro de simetria O. Entonces, según la definición (**1.**1), I_m coincide con el volumen del cuerpo polar reciproco de K respecto la esfera unidad de centro O. La desigualdad (**3.**12) coincide entonces con una señalada como probable por K. MAHLER [6], el cual demuestra unicamente una acotación mucho menos precisa. Otra acotación mejor fué obtenida por A. DVORETZKI y C. A. ROGERS [4]. La acotación (**3.**12) es la mejor posible puesto que es alcanzada por el elipsoide.

Seria interesante hallar la acotación inferior óptima del producto $I_m V$, que según K. MAHLER debe ser

$$I_m V \geqslant 4^n/n! \tag{3.14}$$

donde la igualdad vale unicamente para los paralelepipedos. Sin embargo por el método anterior no hemos podido demostrar (**3.**14).

5. Nota. Supongamos que K no tenga centro de simetria. Si G es el centro de gravedad de K supuesto cubierto con masa homogénea, I(G) será también un invariante por afinidades unimodulares de K. Se sabe que, en general, I(G) no coincide con I_m como ha probado con un ejemplo P. PI CALLEJA [8], pero queda abierta la cuestión de si en las desigualdades (**3.**12) y (**3.**13) puede sustituirse I_m por I(G).

BIBLIOGRAFIA

[1] W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie II*, Springer, Berlin, 1923.

[2] W. BLASCHKE, Ueber affine Geometrie VII: Neue Extremeigenschaften von Ellipse und Ellipsoid, *Leipziger Berichte*, **69**, pp. 306, 318, 1917.

[3] T. BONNESEN—W. FENCHEL, Theorie der konvexen Körper, *Ergebnisse der Mathematik*, Berlin, 1934.

[4] A. DVORETZKY—C. A. ROGERS, Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces, *Proceedings of the National Academy of Sciences of U. S. A.* **36**, pp. 192-197, 1950.

[5] HARDY—LITTLEWOOD—POLYA, *Inequalities*, Cambridge, 1934.

[6] K. MAHLER, Ein Uebertragungsprinzip für konvexe Körper, *Casopis Matematiky a Fysiky*, **68**, pp. 93-102, 1939.

[7] M. MORSE, Relations between the critical points of a real function of n indepen-

dent variables, *Transactions of the American Mathematical Society*, **27**, pp. 345--396, 1925.

[8] P. Pi Calleja, Sobre la figura polar de una dada respecto de un circulo con centro en el baricentro, *Mathematicae Notae*, **9**, pp. 88-93, 1950.

[9] L. A. Santaló, Integral Geometry in Projective and Affine Spaces, *Annals of Mathematics*, **51**. pp. 739-755, 1950.

[10] L. A. Santaló, Un invariante afin para las curvas convexas del plano, *Mathematicae Notae*, **8**, pp. 103-111, 1949.

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO-MATEMATICAS — LA PLATA.