GAZETA DE MATEMÁTICA
N.º 50 — Dezembro de 1951

Sobre pares de figuras convexas (*)

por L. A. Santaló
Universidad de La Plata — Argentina

Dedicatoria. Entre la gran variedad de asuntos que trató F. GOMES TEIXEIRA figura también el de los cuerpos convexos. En efecto, aunque matemático analitico principalmente, publicó varias notas sobre la geometria de las figuras convexas en las que se refleja su fino espíritu geométrico. Por esto, en este número dedicado a su memoria y como sincera homenaje a la misma, no creo esté demasiado fuera de lugar un tema como el indicado en el titulo de la presente nota.

1. Introducción.

El estudio de las figuras convexes (conjuntos convexos, limitados y cerrados) constituye un importante capitulo de la Geometria, con abundante literatura (1). A cada figura convexa van unidos una serie de características (longitud, área, diámetro, anchura mínima, circulo inscrito, etcétera) y el estudio de los valores extremales de algunas de estas caracteristicas, conocidas otras, presenta interesantes problemas.

Una generalización que parece poco estudiada es la de considerar figuras K^2 formadas por un par de figuras convexas. Mas general, se trataria de considerar figuras K^r formadas por r figuras convexas. Tambien en este caso se pueden definir ciertas caracteristicas (área, longitud, diámetro total, diámetro de cada componente, mínimo circulo que contiene K^r, etc.) y se presentan muchos problemas de máximos y mínimos, generalización de los correspondientes a $r=1$, únicos generalmente estudiados.

En esta nota nos vamos a limitar al caso $r=2$ y vamos a dar, como ejemplo, dos tipos de problemas: a) Una generalización del teorema de HELLY a figuras K^2 compuestas de dos figuras convexas; b) Algunos problemas extremales de figuras K^2.

(*) Recibido en Abril de 1951.

(1) T. BONNESEN-W. FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper*, Berlin, 1934.

2. Generalización del teorema de HELLY.

Para el caso del plano, $n=2$, el teorema de HELLY a que nos referimos, dice: *Dado en el plano un conjunto de figuras convexas, si cada 3 de ellas tienen punto común, existe punto común a todas* (1).

Nuestra generalización a «pares» de figuras convexas $K^2=K_1+K_2$ afirma:

TEOREMA. *Dado en el plano un conjunto de pares de figuras convexas* K^2, *si cada 17 de ellos tienem punto común, existe un punto común a todos.*

La demostración, que también puede aplicarse para el teorema original de HELLY, la basaremos en dos lemas.

LEMA I. *Sean* K_i $(i=1,2,3)$ *tres figuras convexas (cerradas) cuya intersección* J *tenga puntos interiores y sea tal que* $K_i \cap K_j = J$. *En estas condiciones, toda figura convexa* K *que tenga punto común con* K_1, K_2, K_3, *tiene punto común con* J.

Demostración. Supongamos que exista una figura convexa K con punto común con K_1, K_2, K_3 y sin punto común con J. Elijamos tres puntos $\alpha_i \in K_i \cap K$. El triângulo $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ (que puede degenerar en un segmento) está contenido en K y por tanto no contiene a J ni las rectas $\alpha_i \alpha_j$, pueden tener punto común con J, pues si $\alpha_1 \alpha_2$, por ejemplo, cortara a J en un punto P, por pertenecer este punto a las tres K_i, los puntos α_1, α_2 pertenecerian a una misma figura K_i, contra la hipótesis de que las K_i tomadas dos a dos no tienen mas punto común que la intersección J. Por tanto el triangulo $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ tiene un lado, sea $\alpha_1 \alpha_2$, que separa J y al otro vértice α_3. Tracemos por α_1 la recta de apoyo de J que

(1) BONNESEN-FENCHEL, loc. cit. pág. 3.

deja a distinto lado a J y a α_3. Sea Q el punto de contacto (o uno de ellos si hay mas de uno). Por pertenecer Q a J, cada segmento $Q\alpha_i$ pertenece a K_i y es exterior a J. Si Q fuera interior a alguna K_i habria dos de estas figuras con punto común exterior a J, contra la hipótesis. Luego Q pertenece al contorno de las tres K_i y por tanto las prolongaciones de $Q\alpha_i$ serán exteriores a K_i. Si esto fuera possible, tomando un punto S interior a J y próximo a Q, alguno de los segmentos $S\alpha_i$ cortaria a alguno de los $Q\alpha_i$ en puntos distintos de los extremos; estos puntos de intersección perteneceriam a dos K_i sin pertenecer a J, lo que es contrario a la hipótesis.

LEMA II. *Sean 17 pares de figuras convexas* K_i^2 $(i=1,2\cdots,17)$ *cuya intersección* J *tenga puntos interiores y sea tal que* $K_i^2 \cap K_j^2 = J$ *(es decir, las figuras* K_i^2 *no tienen, dos a dos, otros puntos comunes que los de* J*). En estas condiciones, todo par de figuras convexas* K^2 *que corte a todas las* K_i^2*, corta también a* J.

Demostración. La intersección de pares de figuras convexas se compone, a lo sumo, de 4 figuras convexas J_i; sea $J=J_1+J_2+J_3+J_4$. Según el Lema I, cada componente de K^2 podrá cortar a lo sumo a 2 figuras K_i^2 por cada J_i sin cortar a J: en total puede cortar a 8 figuras K_i^2 sin cortar a J. Las dos componentes de K^2 pueden, por tanto, cortar a lo sumo a 16 figuras K_i^2. Luego si cortan, por hipótesis, a 17, deben cortar a J.

Sentados estos lemas pasemos a la demostración del teorema.

Supongamos primeiro que cada 17 figuras K^2 tengan puntos *interiores* comunes, para poder aplicar los lemas anteriores. Luego veremos que esta condición es superflua. Supongamos también primero que el conjunto sea finito. Procedemos por inducción. Supongamos el teorema cierto para N figuras K^2 y vamos a demostrar que lo es también para $N+1$.

Sean K_i^2 $(i=1,2\cdots,16)$ 16 figuras de entre las N que cumplen la condición del enunciado y K_{N+1}^2 la nueva figura añadida. Sea J_i la intersección de todas las K_α^2 $(\alpha=1,2\cdots,N)$ sin contar la K_i^2 $(i=1,2,\cdots,16)$ y S la intersección de las K_i^2 $(i=1,2,\cdots,16)$. Por suponer el teorema cierto para N, la figura K_{N+1}^2 debe cortar a los J_i y también a S por suponer que cada 17 figuras del conjunto tienen punto común. Pero las figuras J_i, S tomadas dos a dos no tienen mas punto común que J, luego se cumplen las condiciones del Lema II y K_{N+1}^2 debe cortar a J.

Debemos ahora prescindir de la condición de que cada 17 figuras tengan puntos «interiores» comunes. Supongamos que solo tienen punto común. Considerando las figuras paralelas exteriores a distância ε, ellas tendrán puntos «interiores» comunes y por tanto la demostración anterior vale. Si el teorema vale para qualquier ε, tratándose de conjuntos cerrados, vale en el límite para $\varepsilon=0$.

El paso a un conjunto infinito, numerable o no, se puede hacer aplicando un teorema de Riesz, exactamente igual a como lo hace D. KÖNIG para el caso del teorema de HELLY (1).

3. Generalizaciones.

El problema se puede generalizar considerando conjuntos de figuras K^r compuestas cada una de r figuras convexas y también pasando al espacio euclidiano de n dimensiones en lugar del plano. En ambos casos la demostración puede hacerse siguiendo en lineas generales el método anterior. Nos limitaremos a dar el siguiente enunciado general.

Sea dado en el espacio euclidiano de n *dimensiones un conjunto de figuras* K^r *compuestas cada una de* r *figuras convexas. Si cada* nr^3+1 *de ellas tienen punto común, existe un punto común a todas.*

El número nr^3+1 es el que da la demostración anterior. Es posible, sin embargo, que se pueda disminuir. Para el caso $r=2$, $n=2$ que hemos considerado en detalle, es probable que se pueda sustituir 17 por 13.

Seria también interesante ver si el teorema anterior se puede generalizar de manera análoga a como el primitivo teorema de HELLY fué generalizado por su proprio autor a conjuntos de «celdas» en vez de figuras convexas (2).

4. Tres problemas extremales sobre pares de figuras convexas.

Dada uma figura K^2 compuesta de dos figuras convexas K_1, K_2, utilizaremos las siguientes denominaciones:

d = *Distancia mínima* = extremo inferior de las distancias entre un punto de K_1 y otro de K_2.

D = *Distancia máxima* = extremo superior de las distancias entre un punto de K_1 y otro de K_2.

δ = Diámetro = extremo superior de las distancias entre dos puntos cualesquiera de K^2. Es siempre $D \leqslant \delta$.

δ_1, δ_2 = Diámetros de las componenetes K_1, K_2.

F = *Área* de K^2.

L = *Longitud* del contorno de K^2.

(1) D. KÖNIG, *Ueber konvexe Körper*, Mat. Zeits. **14**, 1922.

(2) E. HELLY *Ueber systeme von abgeschlossenen Mengen mit gemeinschaftlichen Punkten*, Monatshefte Mat. und Phis., **37**, 1930.

Con estas denominaciones vamos a considerar tres problemas.

1. *Dados* d *y* D, *hallar el máximo de* F.

Sean K_1 y K_2 las dos componentes de K^2. Sean L_1, L_2 las longitndes de los contornos respectivos y supongamos $L_1 \geqslant L_2$. Supongamos primero que el contorno de K_2 no tenga puntos angulosos, de manera que también resulte convexa la figura $K_2 - \varepsilon$ paralela interior a distancia ε suficientemente pequeña. Afirmamos que para la K^2 de máxima área, K_2 no puede tener puntos interiores. En efecto, en caso contrario consideremos las figuras convexas $K_1 + \varepsilon$, $K_2 - \varepsilon$ paralelas exteriores e interiores respectivamente a distancia ε. Para la nueva figura K^2 resultante, d y D no han variado y en cambio el área se ha incrementado de

$$(1) \qquad \Delta F = L_1 \varepsilon + \pi \varepsilon^2 - (L_2 \varepsilon - \pi \varepsilon^2) = (L_1 - L_2)\varepsilon + 2\pi\varepsilon^2 \geqslant 0$$

o sea, F ha aumentado. Si K_2 tiene puntos angulosos (teniendo puntos interiores) se puede aproximar convenientemente por otra figura convexa que no los tenga y el resultado subsiste.

Luego, para que K^2 sea de área máxima la componente K_2 no debe tener puntos interiores: debe ser un segmento. Sea el segmento de extremos A, B. Supongamos que sea AP ($P \in K_1$) el segmento tal que $d = AP$. Sea r la recta normal a AP trazada por P. Con centro B y radio D tracemos el arco de circunferencia que se apoya en r. Queda así un segmento de círculo en el interior del cual debe quedar K_1. Este segmento circular será máximo cuando la distancia de B a r sea mínima, o sea, cuando B esté en la paralela a r por A. Entonces K_1 debe estar contenida en los dos segmentos de círculo de centros A, B y radio D limitados por r. La parte común a estos segmentos será máxima cuando ambos coincidan, o sea, $A \equiv B$. Por tanto:

Dados d *y* D *el máximo de* F *se obtiene por la figura compuesta de un punto* A *mas un segmento de círculo de radio* D *y centro* A *cuya base diste* d *del punto* A.

Poniendo $\varphi = \arccos(d/D)$ el resultado se puede escribir

$$F \leqslant \varphi D^2 - d D \operatorname{sen} \varphi .$$

2. *Dados* d, D *hallar el máximo de* L.

Con la misma demostración anterior, con solo sustituir (1) por $\Delta L = L_1 + 2\pi\varepsilon - (L_2 - 2\pi\varepsilon) = L_1 - L_2 + 4\pi\varepsilon \geqslant 0$, resulta que el máximo corresponde a la misma figura anterior. Por tanto se puede también escribir

$$L \leqslant 2\varphi D + 2\sqrt{D^2 - d^2}.$$

Ambos problemas se complican si se sustituye D por δ.

3. *Hallar el círculo de radio mínimo que contiene a cualquier par de figuras convexas cuyos diámetros respectivos sean* δ_1, δ_2 *y la distancia mínima entre ellas sea* d.

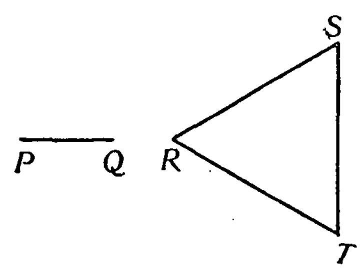
Para el caso de una sola figura convexa se sabe que el radio mínimo ρ está dado por $\rho = \delta/\sqrt{3}$ (¹). En el caso de un par de figuras convexas conviene considerar dos casos (supondremos siempre $\delta_2 \geqslant \delta_1$):

a) $\delta_2 \leqslant \delta_1 + d$. Consideremos el caso de dos segmentos PQ, RS de una misma recta cuyas longitudes sean $PQ = \delta_1$, $QR = d$, $RS = \delta_2$. Para cubrirlos a los dos se necesita un círculo de radio

$$(2) \qquad \rho = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2 + d).$$

Vamos a demostrar que cualquier par de figuras convexas en las condiciones del enunciado puede cubirse con este círculo. En efecto, cualquier K_1 de diámetro δ_1 que contenga Q estará contenida en el círculo de centro Q y radio $\delta_1 = QP$; analogamente, cualquier K_2 de diámetro δ_2 que pase por R estará contenida en el circulo de centro R y radio $\delta_2 = RS$. Como ambos circulos están contenidos en el circulo de diámetro PS, queda probado el enunciado.

b) $\delta_2 > \delta_1 + d$. En este caso no vale lo anterior. Considereemos la K^2 formada por un segmento PQ de longitude δ_1 y un triángulo equilátero RST de



lado δ_2 colocados como indica la figura 1, en la cual es $QR = d$. Para cubrir toda la figura hace falta un circulo de radio

(¹) BONNESEN-FENCHEL, loc. cit. pag. 78.

$$(3) \qquad \rho = \frac{\delta_2^2 + (\delta_1+d)^2 + \sqrt{3}\,\delta_2(\delta_1+d)}{2(\delta_1+d) + \sqrt{3}\,\delta_2}.$$

Afirmamos que con este radio se puede cubrir cualquier figura K^2 con las condiciones del enunciado. En efecto, la primera componente K_1 de K^2 estará contenida en el segmento circular limitado por la circunferencia de centro R y radio δ_1+d y la perpendicular por Q a la recta QR. La segunda componente K_2 puede estar contenida en un circulo de radio $\delta_2/\sqrt{3}$ (sea O su centro) y por tanto estará contenida en la intersección de este circulo con el de centro R y radio δ_2. Si giramos el circulo de radio ρ que contiene la fig. 1 alrededor de R hasta que su centro se coloque sobre RO, cubrirá tanto al segmento circular mencionado que cubre K_1 como a la intersección mencionada que contiene a K_2, y por tanto cubrirá a K^2.

En resumen:

Dados δ_1, δ_2 y d, y suponiendo $\delta_2 \geqslant \delta_1$, cualquier figura K^2 con estos elementos puede cubrirse con un circulo de radio ρ dado por (2) si $\delta_2 \leqslant \delta_1 + d$ o por (3) si $\delta_2 > \delta_1 + d$.

LA PLATA (Argentina), Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas.