I ARTICULOS

LA PROBABILIDAD EN LA ESCUELA MEDIA: USO DE TABLAS DE NUMEROS AL AZAR

LUIS A. SANTALO

Universidad de Buenos Aires(*)

1. INTRODUCCION

Cada vez se asigna más importancia al estudio de las probabilidades y de la estadística en la escuela media, es decir, a las edades entre 12 y 18 años. La idea de probabilidad es muy formativa y las técnicas estadísticas muy útiles en el mundo de hoy. En la enseñanza de la matemática hay que simultanear el pensamiento determinista de la matemática clásica, con el pensamiento probabilístico que se hace necesario para muchas actividades actuales, en particular, en las vinculadas con la vida de relación y con las ciencias del hombre.

(*) *Nota de la Redacción:* El Profesor Luis A. Santaló nació en Gerona en 1911. Fue discípulo de Rey Pastor y de Blaschke y amplió su formación en las Universidades de Hamburgo, París, Princeton y Chicago, doctorándose en la Universidad de Madrid. Desde 1939 vive en Argentina desarrollando allí una importantísima labor en el campo de la investigación y de la enseñanza. Ha sido Vicerector del Instituto de Matemática de la Universidad de Rosario, Profesor en las Universidades de La Plata y Buenos Aires y, desde 1980, Presidente de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Ha publicado muchas memorias y trabajos de investigación dentro de su especialidad (geometría diferencial y geometría integral) abarcando además otros campos. Entre sus libros más importantes caben destacar los siguientes: "Geometría Integral", "Geometría Analítica", "Vectores y Tensores", "La probabilidad y sus aplicaciones", "Geometrías no euclidianas"... Hay que resaltar que además se ha distinguido por sus aportaciones a la enseñanza de las matemáticas. Son buena prueba de ello los numerosos artículos, conferencias y libros, con títulos como "La Matemática en la Escuela Secundaria", "La Enseñanza de la Matemática: de Platón a la Matemática Moderna", "Causas y efectos de las tendencias actuales en la enseñanza de la geometría", etc. Sin duda los Socios de Thales recordarán su magistral participación en las III Jornadas Andaluzas sobre didáctica de las Matemáticas (Huelva, 1987) donde pronunció la Conferencia Inaugural titulada "La matemática y su enseñanza a fines del segundo milenio". Señalemos finalmente, que el Profesor Santaló es miembro correspondiente de las Reales Academias de Ciencias de Madrid y Barcelona, Doctor Honoris Causa por esta última Universidad y ha sido distinguido con el Premio Príncipe de Asturias de investigación y técnica en el año 1983 como reconocimiento a su ingente labor en estos campos. El presente artículo ha sido enviado por el Profesor Santaló por expresa invitación del Consejo de Redacción de THALES.

Las ideas de probabilidad y estadística han sido muy elaboradas en el nivel superior, existiendo en todos los idiomas numerosos y excelentes textos al respecto, para todos los gustos y para todas las tendencias. En cambio, en el nivel elemental y medio, la cantidad de publicaciones es muy inferior. Hace falta estudiar la didáctica de las probabilidades para un adecuado aprendizaje y ofrecer a los profesores y alumnos guías y colecciones de problemas, ordenados por edad y por aplicaciones y especialidades. En este artículo nos proponemos exponer la utilidad e importancia del uso de tablas de dígitos al azar, para resolver "prácticamente" problemas cuya solución teórica a veces no es fácil. La presentación de los problemas y su solución empírica antes de estar en condiciones de entender la solución teórica, es muy útil didácticamente y como elemento de motivación para estudios posteriores. Por otra parte, con las tablas de números al azar se hace evidente el concepto estadístico de la probabilidad.

Muchos problemas de probabilidades se pueden "simular" y resolver experimentalmente mediante el uso de ruletas, bolilleros, dados o monedas, pero estos medios son poco adecuados para la práctica en el aula. Ellos pueden sustituirse, con ventaja, por tablas de números aleatorios o números al azar, como veremos con algunos ejemplos.

2. TABLAS DE NUMEROS ALEATORIOS

Nos referimos a tablas de números dígitos dados al azar. Conviene que cada alumno de la clase disponga de una tabla de unos 500 dígitos, que sea distinta para cada alumno, tanto para constatar que los resultados en general difieren poco entre sí, a pesar de las diferencias de tabla, como para que al promediar los resultados de todos los alumnos se obtengan resultados mucho más cercanos a los verdaderos, como efecto de haber operado con una tabla unión de todas las de los alumnos. Así, si la clase consta de 30 alumnos y cada uno dispone de una tabla de 500 números al azar, los resultados promedios de toda la clase serán como si se hubiera utilizado una tabla de 15.000 números al azar, lo que asegura, con gran probabilidad, una buena aproximación en los resultados.

Cada alumno debe construirse su propia tabla, que la usará para todos los problemas. Las maneras de hacerlo son varias, por ejemplo:

a) Copiarla de alguno de los muchos textos de probabilidades que contiene tablas de números al azar. En general, esos textos contienen mucho mas de 500 dígitos, de manera que solo se tomará una parte de ellos, suficiente para nuestros propósitos. Se pueden tomar también las dos o tres últimas cifras de los números premiados en una loteria cuyos premios hayan sido obtenidos al azar.

b) Si se dispone de una ruleta bien equilibrada con las casillas 0,1,2,...,9 se pueden obtener con ella sucesivamente los 500 números al azar deseados.

c) Si se dispone de una calculadora de bolsillo se puede seguir el método clásico siguiente. Se empieza con un número decimal x_0, menor que 1, de por lo menos 5 cifras decimales (por ejemplo $x_0 = 0{,}3054281$). Se multiplica este número por 147. La parte decimal del producto será un número x_1, cuya primera cifra se toma como primer número de la tabla (en el ejemplo anterior es x_1 = parte decimal del producto $147 \cdot 0{,}3054281 = 0{,}8972302$ y por tanto el primer número de la tabla es 8). Aplicando el mismo procedimiento resulta $x_2 = 0{,}8938384$ y por tanto el segundo número de la tabla es nuevamente 8. El tercer número resulta 3 puesto que $x_3 = 0{,}3953918$, y asi sucesivamente. En lugar del número 147 (llamado "semilla") se pueden utilizar muchos otros, por ejemplo, 83, 117, 123, 133, 163, 173, 187 y 197. Detalles sobre el método pueden verse en el artículo de Lennart Rade [4]. Ver también el libro del grupo Azarquiel y José Colera [3], donde se mencionan otros métodos. Cada minicomputadora tiene una manera especial de engenderar dígitos al azar. Puede utilizarse cualquiera de ellos.

d) En el libro [2] de Glaymann y Varga se mencionan otros métodos. Por ejemplo, se puede tomar un icosaedro regular, en vez de un dado cúbico, y numerar sus caras de 0 a 9 (con cada número en dos caras diferentes) y luego lanzar el icosaedro al azar, como si fuera un dado, e ir anotando los números de la cara superior. Otra manera es la siguiente: se toma un dado cúbico con las caras numeradas 0, 1, 2, 3, 4 (dejando una cara sin numerar) y una moneda a la cual a una cara se le asigna el número 0 y a la otra el número 5. Se lanzan simultaneamente el dado y la moneda y se suman los puntos obtenidos (si sale la cara del cubo que no tiene número se anula la operación). Es fácil ver que las sumas obtenidas toman los valores 0, 1,..., 9, todos con la misma probabilidad. Por tanto, por sucesivos lanzamientos se irán generando números aleatorios. En este libro de Glaymann-Varga [2], se pueden ver también varias maneras de "testar" si una tabla de números aleatorios es realmente tal o no.

Por el método que sea, supongamos que cada alumno tiene ya su propia tabla de números dígitos al azar. Nosotros, para fijar las ideas, vamos a trabajar con la tabla adjunta, de 800 dígitos, que hemos obtenido por combinación desordenada de los métodos anteriores (lo cual no es muy recomendable, pero sirve para practicar distintos métodos y familiarizarse con ellos). Para los alumnos basta que la tabla tenga 500 dígitos.

Tabla de Números al Azar

1 1 6 8	0 2 8 9	8 8 9 5	1 5 5 2	5 3 9 1
7 9 0 4	0 1 3 9	2 1 1 3	8 3 9 7	3 5 6 2
3 6 9 4	9 3 3 0	1 6 2 4	5 3 9 5	4 9 9 0
1 7 4 8	5 4 2 2	7 8 4 1	4 9 4 7	3 7 4 6
3 1 7 8	4 2 9 1	1 7 2 3	3 0 3 2	4 4 7 4
6 0 4 2	8 8 4 6	6 3 4 7	5 8 8 0	7 2 5 0
6 0 6 1	7 7 6 2	5 1 5 5	4 2 3 3	1 6 9 3

Tabla de Números al Azar

1 3 2 4	1 0 4 6	3 0 3 8	0 9 7 3	2 0 6 8
6 8 0 5	3 3 0 0	2 1 9 8	2 3 7 8	2 5 2 0
2 9 4 0	3 7 6 2	4 8 7 6	4 2 0 8	6 0 3 9
9 7 4 0	1 6 4 8	4 0 8 3	2 6 6 4	9 2 5 5
1 4 9 5	9 1 6 9	5 6 0 8	8 2 7 9	7 0 9 2
2 3 7 7	9 9 6 4	3 5 8 3	9 1 4 1	7 3 5 2
1 0 5 7	0 0 9 5	0 8 1 6	1 8 9 7	6 4 4 8
4 7 8 3	4 2 2 3	3 6 1 5	0 5 1 8	9 4 6 1
2 8 3 4	7 3 7 8	0 7 3 4	9 2 6 5	2 8 5 0
0 3 2 9	7 5 9 2	7 9 6 2	0 3 5 7	1 1 9 7
2 6 1 1	9 9 4 7	6 8 6 4	3 3 4 5	7 1 2 5
7 9 9 2	5 0 6 8	2 9 0 6	1 5 3 8	1 2 2 7
6 9 6 8	2 0 7 4	3 6 8 3	5 8 6 3	2 1 2 1
7 8 5 1	7 3 3 4	7 3 4 8	8 8 2 3	0 9 3 4
8 2 8 5	0 5 0 5	7 9 9 2	5 5 6 0	2 9 6 8
6 7 8 4	2 7 4 0	7 2 5 5	1 7 1 2	7 5 9 3
2 7 0 2	9 8 5 3	9 1 8 4	0 4 2 7	6 3 2 2
6 1 6 5	3 4 6 3	9 7 0 8	7 5 2 6	4 3 2 9
0 4 5 7	9 8 0 6	7 5 3 5	7 1 4 3	8 0 5 3
7 1 2 5	4 7 6 2	6 8 4 8	3 8 9 4	4 0 6 3
8 4 7 8	6 9 8 8	6 3 0 0	5 5 7 1	5 2 7 6
1 7 3 4	9 7 0 6	8 3 3 6	3 6 4 9	0 0 9 9
5 7 8 5	7 1 2 9	7 8 0 7	7 6 9 8	8 2 6 1
7 0 9 5	9 7 9 7	8 7 2 2	3 7 2 8	9 0 1 7
4 1 0 9	4 4 2 6	8 6 8 4	6 9 8 8	4 1 3 6
9 1 8 0	7 5 2 6	4 3 0 9	7 6 5 3	6 7 8 4
0 1 7 1	9 4 5 2	8 7 6 1	5 6 4 9	1 2 7 6
0 1 3 5	3 9 8 8	9 3 0 5	5 9 6 9	0 6 5 1
2 8 9 1	3 0 3 3	5 6 1 8	3 2 1 0	5 8 9 4
5 7 0 1	4 7 3 4	9 0 1 1	9 1 6 1	3 7 0 3
3 2 8 1	4 4 5 9	3 2 0 1	6 7 2 7	0 9 2 1
8 9 7 8	0 8 3 8	5 0 4 5	7 3 2 1	3 5 7 9
0 5 9 9	8 0 4 2	5 2 6 5	4 5 2 5	3 2 8 4

Tabla de 0 y 1

Para problemas relativos al lanzamiento de monedas, con dos alternativas de probabilidad 1/2 cada una, a veces se recomienda disponer de una tabla de 0 y 1 al azar. En realidad no hace falta, pues basta tomar la tabla de dígitos anterior y asignar a los números pares (el 0 incluido) el 0 y a los impares el 1.

Tabla de números al azar de 1 a 6

Para los juegos relacionados con dados cúbicos, los únicos números que se utilizan son del 1 al 6. Para tener una tabla de números aleatorios de 1 a 6, se puede tomar la tabla total anterior y suponer que en ella no existen los números 0, 7, 8, 9. Para mayor facilidad en las operaciones, conviene repetir esa tabla de números al azar entre 1 y 6. A partir de la anterior se obtiene la tabla siguiente que será útil en muchos casos. Si se quiere proceder directamente, se puede lanzar un dado sucesivamente 500 veces e ir anotando los resultados.

Tabla de Números al Azar de 1 a 6

1 1 6 2	5 1 5 5	2 5 3 1	4 1 3 2	1 1 3 3
3 5 6 2	3 6 4 3	3 1 6 2	4 5 3 5	4 1 4 5
4 2 2 4	1 4 4 3	4 6 3 1	4 2 1 1	2 3 3 3
2 4 4 4	6 4 2 4	6 6 3 4	5 2 5 6	6 1 6 2
2 1 5 5	4 2 3 3	1 6 3 1	3 2 4 1	4 6 3 3
3 2 6 6	5 3 3 2	1 2 3 2	5 2 2 4	3 6 2 4
4 2 6 3	4 1 6 4	4 3 2 6	6 4 2 5	1 4 5 1
6 5 3 2	2 2 3 6	4 3 5 3	1 4 1 3	5 2 1 5
5 1 6 1	6 4 4 4	3 4 2 2	3 3 6 1	5 5 1 4
6 1 2 3	4 3 3 4	2 6 5 2	5 3 2 5	2 6 2 3
5 1 1 2	6 1 1 4	6 6 4 3	3 4 5 1	2 5 2 5
6 2 6 1	5 3 1 2	2 6 6 2	4 3 6 3	5 6 3 2
1 2 1 5	1 3 3 4	3 4 2 3	3 4 2 5	5 5 2 5
5 6 2 6	6 4 2 4	2 5 5 1	1 2 5 3	2 2 5 3
1 4 4 2	6 3 2 2	6 1 6 5	3 4 6 3	5 2 6 4
3 2 4 5	6 5 3 5	1 4 3 5	3 1 2 5	4 6 2 6
4 3 4 4	6 3 4 6	6 6 3 5	5 1 5 2	6 1 3 4
6 3 3 6	3 6 4 5	5 1 2 6	2 6 1 5	2 2 3 2
1 4 1 4	4 2 6 6	4 6 4 1	3 6 1 5	2 6 4 3
6 5 3 6	4 1 1 4	5 2 6 1	5 6 4 1	2 6 1 3

3. EJEMPLOS

3.1. Un valor medio

Se supone dado al azar un número entre 0 y 9999, es decir un número natural cuyo número de cifras es igual o menor que 4. Se desea el valor medio de la suma de sus cifras.

Para la solución experimental se toman las cuaternas de la tabla de números al azar de 0 a 9, y se calculan sucesivamente las sumas de sus cifras. Limitándonos a los primeros 100 números de la Tabla dada (25 números de 4 cifras), las sumas de las cifras resultan ser:

16, 19, 30, 13, 18, 20, 13, 7, 27, 16

22, 15, 13, 22, 22, 20, 13, 20, 24, 20

19, 16, 13, 8, 19

Sumando estos números y dividiendo por 25 tendremos el valor medio experimental buscado, que resulta ser 18,2. Ello equivale a haber tomado una muestra de 25 números de 4 cifras, que es una muestra bastante reducida, pero la tomamos únicamente como ejemplo del método. Haciendo lo mismo con más números, por ejemplo 100 números de 4 cifras, o sea, 400 números de la Tabla de números al azar, se obtendría un resultado más confiable. Lo interesante es comprobar que todos los alumnos, cada uno con su Tabla llegará a un resultado parecido.

El valor teórico se obtiene fácilmente observando que se trata de 10.000 números de menos de 5 cifras, y como cada dígito aparece 1000 veces, la suma de todos los dígitos de todos los números será 1000 (1 + 2 + ... + 9) = 45.000. Como en total hay 2500 cuaternas, el valor medio de la suma de las cifras de cada una será 45.000/ 2.500 = 18. El valor experimental obtenido ha sido, pues, muy bueno. Para muchos alumnos tal vez no sea tan bueno, pero siempre diferirá poco de 18 y el valor medio de todos los alumnos seguramente será muy aproximado a ese número.

3.2. Problema de las coincidencias

Se tienen 10 cartas dirigidas a distintos destinatarios y los 10 sobres correspondientes. Suponiendo que las cartas se han mezclado y que se colocan al azar una en cada sobre, se desea la probabilidad de que "por lo menos una carta" haya ido a parar a su correspondiente sobre.

Para simular el problema, supongamos que las cartas y los sobres se representan por los números 0, 1, 2,..., 9, y comparemos cada grupo de 10 dígitos de la Tabla de números al azar con los 10 de la fila siguiente que están en una misma columna, anotando si hay o no por lo menos una coincidencia. Por ejemplo, las dos primeras filas de la Tabla dan:

1 1 6 8 0 2 8 9 8 8	9 5 1 5 5 2 5 3 9 1
7 9 0 4 0 1 3 9 2 1	1 3 8 3 9 7 3 5 6 2

y vemos que en el primer conjunto "sí" hay coincidencia (el 0) y en el segundo "no". Procediendo así con los distintos pares de filas de la Tabla, se obtienen 40 experiencias, de las cuales 24 corresponden a "sí" (por lo menos presentan una coincidencia) y 16 a "no". Luego, la probabilidad experimental buscada es $p_{exp}(10) = 24/40 = 0{,}60$.

Si en vez de 10 cartas fueran 6, podríamos hacer lo mismo con la Tabla de números al azar de 1 a 6, agrupando cada 6 números de una fila con los correspondientes de la fila siguiente. Así, en nuestra tabla, los primeros casos son:

1 1 6 2 5 1	5 5 2 5 3 1	4 1 3 2 1 1	3 3 4 2 2 4
3 5 6 2 3 6	4 3 3 1 6 2	4 5 3 5 4 1	4 5 2 4 4 4

para los cuales se tiene la sucesión "sí", "no", "sí", "sí". Prosiguiendo hasta terminar con la Tabla, resultan 33 experiencias, de las cuales 26 son "si". Por tanto la probabilidad buscada (obtenida experimentalmente) vale $p_{exp}(6) = 26/33 = 0{,}78$.

Este problema de las coincidencias, para un número cualquiera *n* de cartas (y sus correspondientes sobres), presenta muchas variantes y fue estudiado por primera vez por P.R. Montmort en su libro *Essai d'Analyse sur les jeux de Hasard*, publicado en 1708. La solución teórica no es fácil y el resultado es:

$$p(n) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

cuyos primeros valores son:

$$p(1) = 1 \quad , \quad p(2) = 0{,}5, \quad , \quad p(3) = 0{,}666\ldots \quad , \quad p(4) = 0{,}625$$

$$p(5) = 0{,}633\ldots \quad , \quad p(6) = 0{,}6319\ldots \quad , \quad p(7) = 0{,}6321\ldots$$

y para $n > 7$ quedan invariables las 4 primeras cifras decimales del resultado. En nuestro caso, vemos que el resultado experimental es bastante bueno para $n = 10$, pero no tanto para $n = 6$. Si cada alumno de la clase hace la experiencia con su propia Tabla y luego se promedia, el resultado estará seguramente bastante próximo al teórico.

Para detalles se puede ver el libro de W. Feller [1, pág. 63) o también [5, págs. 22-24].

Otra forma de enunciar el mismo problema es suponer dos personas con un juego de *n* naipes cada uno que los van sacando sucesivamente y simultáneamente uno por uno y se pide la probabilidad de que al terminar, por lo menos una vez hayan coincidido los naipes sacados. El resultado es el p(n) anterior, siendo curioso que a partir de $n = 7$ el resultado es prácticamente independiente del número de naipes o de cartas considerados.

3.3. Dados repetidos

a) Se lanzan 6 dados. Se desea la probabilidad de que, por lo menos salga un 6 (equivale a lanzar 6 veces un mismo dado y pedir la probabilidad de que por lo menos una vez haya salido el 6).

b) Se lanzan 12 dados. Se desea la probabilidad de que salga el 6 por lo menos dos veces (equivale a lanzar un mismo dado 12 veces y pedir la probabilidad de que por lo menos salga dos veces el 6).

El problema es fácil de simular con la tabla de números al azar de 1 a 6. Para la parte a), agrupando en conjuntos de 6 cifras, se obtiene la sucesión que empieza con:

(1 1 6 2 5 1), (5 5 2 5 3 1), (4 1 3 2 1 1), (3 3 3 5 6 2),...

Viendo en cada prueba si está el 6 por lo menos una vez, se obtiene la sucesión "sí", "no", "no", "sí",... Prosiguiendo hasta los 360 primeros números de la Tabla. Se obtienen 40 "sí" y 20 "no" (en un total de 60 experiencias). Por tanto, el valor experimental de la probabilidad buscada es $p_{exp}(6) = 40/60 = 0,666$. El valor medio teórico es 0,665, es decir, hay una muy buena coincidencia.

Si en vez de grupos de 6 cifras se hacen grupos de 12 y se ve en cuales hay dos o más 6, en los 30 grupos que la Tabla permite formar se obtienen 17 "sí". Luego el valor experimental de la probabilidad del caso b) es $p_{exp}(12) = 17/30 = 0,566$. La probabilidad teórica en este caso es $p(12) = 0,619$. La aproximación obtenida es menor que la de antes, cosa esperada pues el número de experiencias es la mitad de antes. Juntando y promediando los resultados de todos los alumnos, se habrán simulado muchas más experiencias y el resultado será con gran seguridad bastante próximo al teórico en ambos casos.

El valor teórico de la probabilidad de que lanzando *n* dados se obtenga por lo menos *r* veces el 6, aplicando la ley binomial se demuestra que es:

$$p(r;n) = \sum_{i=r}^{n} \binom{n}{i} (1/6)^i (5/6)^{n-i}$$

Para r=1 o r=2 y n=6, n=12 se obtienen los valores antes mencionados. Lo interesante es observar que por el método experimental de las Tablas, se pueden obtener valores muy aproximados, mucho antes de estar en condiciones de entender la solución teórica. Con ello el alumno va entendiendo mejor las ideas de probabilidad y frecuencia y va siendo motivado para los estudios posteriores que le conducirán a la fórmula teórica anterior.

3.4. Colección de figuras o cupones

Una determinada marca de galletitas contiene con cada paquete una figura o un cupón y el conjunto de figuras o cupones distintos es igual a 10. Suponiendo que las figuras o cupones estén distribuidas al azar en los distintos paquetes, se desea saber el valor medio del número de paquetes que hay que comprar para tener el juego completo.

Para simular el problema asignemos a cada figura uno de los números 0, 1, 2,..., 9 y veamos en la Tabla de números al azar cuantos números sucesivos hay que tomar para tener el juego completo de los 10 dígitos distintos. Por ejemplo, en la Tabla dada, la primera experiencia es la sucesión 1-1-6-8-0-2-8-9-8-8-9-5-1-5-5-2-5-3-9-1-7-9-0-4 que consta de 24 números. Esto quiere decir que en esta prueba se han necesitado 24 paquetes para tener el juego completo de las 10 figuritas. Continuando con la Tabla, la próxima sucesión que contiene los 10 números 0, 1,..., 9 es 0-1-3-9-2-1-1-3-8-3-9-7-3-5-6-2-3-6-9-4 que consta de 20 números, es decir en esta segunda prueba, han bastado 20 paquetes para tener el juego completo. Prosiguiendo sucesivamente hasta terminar con la Tabla, se obtienen sucesiones cuyos números de elementos son:

24-20-20-30-45-25-23-32-23-20-24-19-32-29-22-30-35-24

15-22-21-23-29-34-25-16-21-39-25-24-20

En total se han simulado 31 casos y los números anteriores indican los números de paquetes que han sido necesarios comprar en cada caso. La media aritmética de estos 31 casos es 25,1. Este será la solución experimental del problema. El valor teórico es 29,29. Si repiten el procedimiento todos los alumnos de la clase, con su Tabla particular, se constatará que los valores de cada uno no difieren mucho del teórico, y que el valor promedio de todos ellos es mucho más aproximado.

Nota. Si en lugar de 10 figuras, el juego completo consta de *n* figuras, la teoría prueba que el valor medio del número de paquetes que hay que comprar para tener el juego completo vale:

$$1 + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \ldots\ldots + \frac{n}{2} + n \qquad (1)$$

que para $n = 10$ da el valor 29,29 antes mencioando. Para resolver el problema por simulación para $n < 10$ se puede utilizar la misma Tabla anterior limitada a los números 0, 1, 2,..., $n-1$ y prescindiendo de los demás. Así, para $n = 6$ se puede tomar la Tabla de números al azar de 1 a 6; el valor medio teórico es en este caso 14,70. Para $n > 10$ la simulación es más complicada y se necesitan Tablas con más números al azar, pero la idea es la misma. Lo interesante es observar, nuevamente, que el método experimental de "simular" mediante Tablas de números al azar, es bastante aproximado y muy comprensible y fácil de realizar por los alumnos, mucho antes de que estén en condiciones de comprender la demostración de la fórmula teórica (1).

Para detalles, ver [1, págs. 174-175]. Una demostración rápida de (1) es la siguiente: el primer paquete tiene una figura cualquiera; la probabilidad de que el segundo paquete tenga una figura distinta es (n–1)/n y por tanto el valor medio del número de paquetes que deberán comprarse para obtenerla es n/(n–1). La probabilidad de que la figura del paquete sucesivo sea distinta de las otras dos es (n–2)/n y por tanto el valor medio del número de paquetes que hace falta comprar es n/(n–2). Procediendo sucesivamente se obtiene (1).

3.5. Problema de las palomas

Se trata de un problema de A. Engel citado por Glaymann y Varga en [2]. Se suponen 10 cazadores que no yerran nunca y que tiran sobre 10 palomas, cada cazador sobre una paloma que elige al azar. Se desea saber el valor medio del número de palomas que quedan con vida.

La simulación es fácil. La Tabla de números al azar se supone dividida en grupos de 10, cada uno indicando una experiencia en la cual los números 0, 1, 2,..., 9 indican las palomas tocadas por algún cazador. Así, el primer grupo es 1-1-6-8-0-2-8-9-8-8, lo que indica que han quedado libres las palomas 3-4-5-7, o sea, 4 palomas. En la segunda experiencia, los números son 9-5-1-5-5-2-5-3-9-1 lo que indica que han quedado libres las palomas 0, 4, 6, 7, 8, o sea, 5 palomas. Prosiguiendo de esta manera, se obtiene que en las 10 primeras experiencias, las palomas que han resultado libres son 4, 5, 3, 2, 4, 4, 4, 4, 3, 5 con un promedio de 3,8. En las 10 experiencias siguientes, siempre siguiendo con la Tabla, los números de palomas libres resultan ser 4, 4, 4, 3, 4, 3, 3, 3, 2, 2, con un promedio de 3,2. En las experiencias siguientes, hasta los 80 casos que permiten las Tablas, los valores medios de las experiencias resultan ser 3,6; 2,9; 3,3; 3,5; 3,1; 3,4. El valor medio total resulta 3,35. El valor medio teórico es 3,48 que no difiere mucho del experimental.

La fórmula general del valor medio del número de palomas que quedan libres si hay N tiradores que nunca yerran y tiran sobre P palomas, es:

$$P\left(\frac{P-1}{P}\right)^N \qquad (2)$$

que con la Tabla de números aleatorios puede experimentarse para distintos valores de P y N. Por ejemplo, para P = N = 6, nuestra Tabla de números aleatorios de 1 a 6 permite hacer 66 pruebas y el valor medio experimental resulta ser 2,04, muy próximo al valor teórico 2,00.

La demostración de (2) es la siguiente: La probabilidad de que una paloma sea tocada por un determinado cazador es 1/P y la probabilidad de que quede libre del disparo de un cazador será 1–1/P = (P–1)/P. La probabilidad de que quede libre de los N cazadores será $[(P-1)/P]^N$ y el valor medio de palomas libres es el producto de esta probabilidad por P, o sea, (2). La demostración no es calculatoriamente difícil, pero conceptualmente exige una preparación superior a la necesaria para comprender la simulación experimental. Por esto creemos que el uso de Tablas de números al azar puede anteceder en bastante tiempo al tratamiento teórico de muchos problemas de probabilidades.

3.6. Sorteo de Premios

Supongamos una clase de 36 alumnos. Se sortean entre ellos 36 premios. Se desean los valores medios de los números de alumnos a los que corresponden ningún premio E(0), un sólo premio E(1), dos premios E(2), tres premios E(3) o más de tres premios E(> 3).

El problema es una variante de un problema de A. Engel citado por Glaymann-Varga [2, pág. 190].

Veamos como se puede simular el problema con la Tabla de números al azar de 1 a 6. Tomemos una cuadrícula de 6 x 6 casillas, de manera que cada una de ellas venga determinada por el par de números naturales (a, b) con $1 \leqslant a \leqslant 6$, $1 \leqslant b \leqslant 6$, tomando a como indicador de la abscisa de la casilla y b la ordenada. Para cada par de números de la Tabla (a, b) se anota un punto en la casilla (a, b). Considerando que estos puntos son los premios distribuidos al azar y que las casillas son los alumnos, tomando 36 pares tendremos simulada una primera experiencia. Contando el número de casillas con 0, 1, 2, 3 o más puntos, resulta, con las Tablas dadas, que los valores medios respectivos son:

$$E_1(0)=14 \quad , \quad E_1(1)=12 \quad , \quad E_1(2)=6 \quad , \quad E_1(3)=4$$

Estos son los valores medios experimentales con una sola experiencia: los resultados son muy poco confiables. Continuando con los siguientes 36 pares de la Tabla y repitiendo la experiencia, resulta:

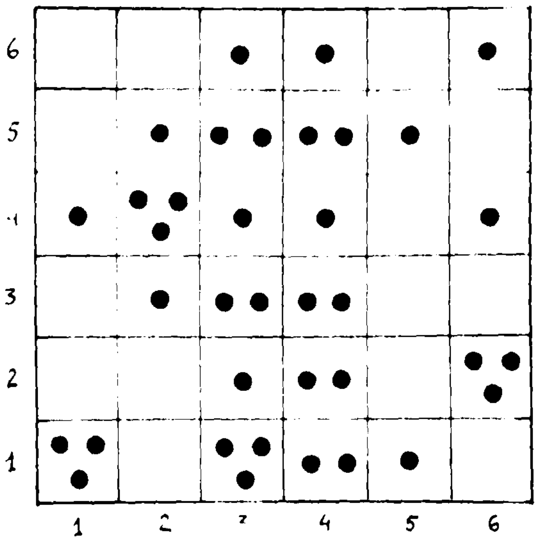
$E_2(0)=11$,

$E_2(1)=16$,

$E_2(2)=8$,

$E_2(3)=0$,

$E_2(4)=1$



La experiencia siguiente da:

$$E_3(0)=16 \quad , \quad E_3(1)=10 \quad , \quad E_3(2)=5 \quad , \quad E_3(3)=4 \quad , \quad E_3(4)=1$$

y la última experiencia posible con la Tabla de que disponemos de 400 dígitos al azar, da:

$$E_4(0)=15 \quad , \quad E_4(1)=12 \quad , \quad E_4(2)=5 \quad , \quad E_4(3)=3 \quad , \quad E_4(4)=0 \quad , \quad E_4(5)=1$$

Tomando la media aritmética de estos valores se tienen los siguientes valores medios experimentales:

$$E_{exp}(0)=14 \ , \ E_{exp}(1)=12{,}5 \ , \ E_{exp}(2)=6 \ , \ E_{exp}(3)=2{,}7 \ , \ E_{exp}(>3)=0{,}8$$

Hemos simulado 4 experiencias, que es un número muy reducido. Si cada alumno hace lo mismo con su Tabla, y si hay 30 alumnos, tendremos simuladas 120 experiencias y tomando el valor medio se tendrán resultados mucho más confiables.

Los valores teóricos, calculables cuando se conoce la ley de distribución binomial, están dados por la fórmula general que da el valor medio del número de personas a las que corresponden *i* premios en un sorteo de *m* premios entre *n* personas, a saber:

$$E(i) = n\binom{m}{i}\left(\frac{1}{n}\right)^i\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m-i}$$

Así, para el caso considerado de $n = m = 36$ los valores teóricos resultan ser:

$$E(0)=13{,}1 \quad , \quad E(1)=13{,}4 \quad , \quad E(2)=6{,}7 \quad , \quad E(3)=2{,}1 \quad , \quad E(>3)=0{,}7$$

no muy distintos de los anteriores, a pesar de haber simulado solamente 4 experiencias.

3.7. Distribución de los hijos

Una familia tiene 6 hijos. Se desean las probabilidades de que el número de hijas mujeres sea, respectivamente, 0, 1,..., 6. Se supone que la probabilidad de que un hijo sea varón o mujer es la misma, y por tanto, igual a 1/2.

Para simular el problema con una tabla de números al azar convenimos en que los números pares (el 0 incluido) representan mujeres y los impares varones. Tomemos grupos de 6 números de la Tabla y anotemos el número de números pares, que representará el número de mujeres. Con los primeros 60 dígitos de la Tabla, se forman 10 grupos, que representan 10 familias y los números de hijas mujeres que resultan son:

4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 2, 3, 2

En las 10 familias siguientes, los números de hijas mujeres son:

3, 4, 2, 3, 2, 3, 4, 6, 3, 4

y procediendo sucesivamente tenemos las siguientes muestras de familias con 6 hijos:

3, 2, 3, 2, 4, 2, 6, 3, 3, 4

3, 5, 6, 2, 5, 5, 2, 1, 5, 2

1, 3, 1, 2, 4, 2, 5, 4, 2, 3

3, 3, 4, 3, 1, 3, 2, 1, 4, 2

2, 5, 2, 4, 4, 3, 3, 1, 4, 3

4, 2, 3, 5, 4, 1, 1, 3, 4, 4

3, 3, 3, 3, 3, 1, 2, 4, 5, 4

4, 5, 1, 2, 3, 3, 3, 2, 3, 4

Se tiene así una muestra de 100 familias de 6 hijos. Contando el número de ellas que tiene 0, 1,..., 6 hijas mujeres y tomando el valor medio, resultan las probabilidades experimentales siguientes:

$$p_{exp}(0)=0 \quad , \quad p_{exp}(1)=0{,}12 \quad , \quad p_{exp}(2)=0{,}24 \quad , \quad p_{exp}(3)=0{,}31 \quad ,$$

$$p_{exp}(4)=0{,}21 \quad , \quad p_{exp}(5)=0{,}09 \quad , \quad p_{exp}(6)=0{,}03$$

Las probabilidades teóricas, se pueden calcular por la fórmula de la ley binomial:

$$p(r) = \binom{6}{r} \frac{1}{2^6}$$

y resultan ser:

$$p(0)=0{,}015 \quad , \quad p(1)=0{,}09 \quad , \quad p(2)=0{,}23 \quad , \quad p(3)=0{,}31$$

$$p(4)=0{,}23 \quad , \quad p(5)=0{,}09 \quad , \quad p(6)=0{,}015$$

Los valores experimentales dependen, naturalmente, de la Tabla utilizada. Variarán para cada alumno, pero lo interesante es observar cómo, a pesar de usar tablas distintas, los resultados son siempre bastante coincidentes y no muy alejados de los valores teóricos, de manera que para muchas aplicaciones prácticas, los resultados experimentales se obtienen con suficiente aproximación.

BIBLIOGRAFIA

[1] FELLER, W. *An introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. 1, J. Wiley, New York 1950.

[2] GLAYMANN, M. - VARGA, T. *Les probabilités à l'Ecole*, CEDIC, 1973, existe traducción castellana por Editorial Teide, Barcelona.

[3] Grupo Azarquiel y José Colera, *La Calculadora de Bolsillo como instrumento pedagógico*, Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad Autónoma de Madrid, Ediciones Cantoblanco, 1983, Libro 1, Segunda parte, III.

[4] RADE, LENNART, *Random digits and the programmable calculator*, articulo del libro "Teaching Statistics and Probability", National Council of Teachers of Mathematics, 1981. Yearbook, 1906. Association Drive, Reston, Virginia, U.S.A.

[5] SANTALO, L.A. *Probabilidad e Inferencia Estadística*, Monografía n.° 11, Serie Matemática, Organización de los Estados Americanos (O.E.A.), Washington, D.C. (U.S.A.), 1975.

AVISO IMPORTANTE

Se ruega a los Srs. suscriptores que optaron en su día por el pago de su suscripción mediante cheque o giro postal y no lo hubiesen hecho efectivo todavía, remitan a la mayor brevedad el importe correspondiente al año 1988 (Números 10-11-12).

MUCHAS GRACIAS