MATEMÁTICAS PARA PROFESORES

Luis A. Santaló
Buenos Aires. Argentina

Para el inolvidable amigo, Gonzalo Sánchez Vázquez, distinguido matemático y maestro de profesores.

Aunque la matemática es única, su presentación para un buen aprendizaje de la misma, varía mucho según los alumnos a quien va dirigida. Es usual, por ejemplo, hablar de "matemática para ingenieros", "matemática para biólogos", "matemática para químicos", "matemáticas para arquitectos" y hay muchos textos y una vasta experiencia para cada una de estas especialidades.

Sin embargo, se menciona poco la necesidad de una "matemática para profesores", entendiendo para profesores, aquellos del nivel medio o de segunda enseñanza. Es común, por ejemplo, que los cursos de Análisis Matemático o de Geometría en coordenadas de los primeros años del nivel terciario, sean los mismos en los Institutos formadores de profesores que en las Facultades de Ciencias cuyo objetivo es formar licenciados o doctores en matemática. Se hace únicamente, en general, alguna diferencia de nivel y cantidad de contenidos, pero se tiene poco en cuenta la forma de presentación y la metodología más conveniente en cada caso. Es decir se olvida que cada especialidad tiene su matemática, con mucha base común, pero también con facetas diferentes que es conveniente tener en cuenta,tanto para una mayor motivación, como para una mayor preparación para las actividades futuras de los alumnos.

No necesitan la misma preparación quienes piensen dedicarse a "investigar" en matemáticas, que los que tienen en la mira "enseñar" matemática. Ello no es tanto cuestión de profundidad o de calidad, cuanto de modalidad y variedad con que se presente el edificio matemático.

La misión de los profesores de matemática es enseñar Matemática, o mejor impartir una "cultura" matemática que esté al día de los avances de esta ciencia. Para ello la mejor manera es realizar una tesis como final de carrera, sea de un profesorado, una licenciatura, una maestría o un doctorado. De esta manera deberá adquirir, entre otras cosas, madurez en la práctica de planear y resolver problemas nuevos, buscar bibliografía, formular conjetura, presentar generalizaciones y conocer la existencia de revistas especializadas, de modo de poner a prueba su capacidad creativa. Aunque no termine la tesis, el esfuerzo realizado le será útil para ir formando en el alumno el oficio del matemático. Los temas de la tesis pueden ser a gusto del alumno, desde algún tema de matemática pura, hasta un tema de metodología o de psicología del aprendizaje.

La cultura matemática se adquiere con exposiciones en seminarios sobre temas actuales o asistiendo a conferencias o reuniones científicas o conferencias sobre la historia de las ideas matemáticas.

Hay que distinguir siempre la diferencia entre el profesor, cuya misión será la de enseñar y el futuro investigador que deberá construir novedades en el campo de la matemática. Esta diferencia aparece en la **información** y en la **resolución** de problemas.

INFORMACIÓN

La información que requieren los profesores es más amplia pero menos profunda que la de los investigadores. Esto se debe a que el profesor de escuela media (Instituto, Liceo, Escuelas Técnicas), que ejerza en una ciudad que no tenga Universidad, posiblemente sea la persona más versada en matemática del lugar y por lo tanto será la que deba informar sobre las noticias que los diarios, la radio y otros medios de comunicación publiquen respecto a matemática, noticias que cada día más se extienden en velocidad y frecuencia. Conviene que el profesor sepa buscar la información fidedigna, por ejemplo en las revistas especializadas (Mathematical Review, Zentralblatt) o mediante el correo electrónico (e-mail) y por Internet. No es necesario, lo que sería imposible, que el profesor pueda aclarar todos los problemas, pero sí que tenga una idea de los mismos. Vamos a dar ejemplos relativamente recientes:

El problema de los cuatro colores

Este bien conocido problema afirma que bastan cuatro colores para colorear cualquier mapa del plano de manera que cada país tenga un solo color y que no pueda haber dos países con una frontera común que tenga el mismo color.

El problema fue planteado en 1878 por *Cayley* que lo atribuyó a *De Morgan* y estuvo un siglo desafiando a la comunidad matemática. Después de numerosos ensayos infructuosos, el problema fue resuelto por *K. Appel* y *W. Haken* y complementado por en 1976 y fue publicado en dos trabajos:

- *K. Appel-W. Haken*, Every planar map is four colorable. Parte 1. Discharging, Illinois Journal of Mathematics, 21-19977, 429-490.
- *K. Appel-W. Haken-J. Koch*, Every planar map is four colorable. Parte 2. Reducibility, Illinois Journal of Mathematics, 21-1977, 491-562.

La demostración, muy complicada tiene 133 páginas, obligó a considerar unos 1900 casos y unas 1200 horas de computador. Es el primer ejemplo de un problema largamente buscado que logró resolverse con el uso de las computadoras.

No se trata de que nadie, a no ser un fanático de la computación, intente seguir los pasos de la demostración, pero si que cada profesor tenga idea del trabajo y de ser posible alguna vez lo haya ojeado. Hay que tener en cuenta que en los años 1976-77 el hecho fue noticia en todo el mundo, muchas veces sin saber bien de qué se trataba.

El problema de Fermat

Este teorema que enunció Fermat (1601-1665) afirma que la ecuación:

$$x^n + y^n = z^n \quad \text{para} \quad n > 2$$

no puede tener soluciones enteras distintas de cero. El teorema preocupó a los matemáticos durante más de tres siglos hasta que finalmente fue resuelto por *Andrew Wiles* en 1994, utilizando los recursos más sofisticados de la matemática actual. A pesar del enunciado simple del problema, la solución resultó muy complicada, solo comprensible para algunos especialistas. Sin embargo dada la difusión de la solución que hicieron todos los medios de información, fue necesario que todos los profesores estuvieran al tanto de las alternativas de ella, que se publicó en un video tape titulado *"Fermat's last Theorem"*, editado por la American Mathematical Society, 1995, y también en el resumen de Gerd Falting, *"The proof of Fermat's Theore de R. Taylor y A. Wiles"*, publicado por las Notices de la American Mathematical Society, vol. 42, 1995, pág. 743-746.

Igual que antes, no se trata de entender la demostración del teorema, reservada para los especialistas, solamente que el profesor sepa cómo y dónde informarse para contestar las preguntas que al respecto posiblemente le formulen los alumnos o las personas interesadas del ambiente.

Sería Deseable que los alumnos del profesorado conocieran, por ejemplo, los folletos titulados *"What's happening in the Mathematical Sciences"* del autor *Barry A. Cipra*, vol. 1: 1993, vol. 2: 1994 y vol. 3: 1996, publicados por la American Mathematical Society.

PROBLEMAS DIFÍCILES

Es conveniente que durante sus estudios terciarios regulares los futuros profesores se vayan acostumbrando a coleccionar problemas o conjeturas "difíciles" en el sentido de que hayan sido propuestos hace tiempo y que no hayan podido ser resueltos hasta la fecha, a pesar de su enunciado elemental y fácilmente comprensible. De ellos hay muchos en la teoría de números. Son clásicos por ejemplo, los siguientes:

1) Todo número natural mayor que cuatro se puede expresar como suma de dos números primos impares, conjetura de Goldbach, 1742.
2) Dos números primos que difieren en dos unidades, por ejemplo (3-5), (5-7), (11-13), ..., se llaman *primos gemelos*. Todavía no se sabe si el número de primos gemelos es infinito.

3) Los primos que son de la forma $2^p - 1$ donde p es otro número primo, se llaman primos de Mersenne. No se sabe si hay infinitos de estos números.
4) Los números naturales que son iguales a la suma de sus divisores, diferentes de si mismos, se llaman *números perfectos*. Por ejemplo los números 6, 28, 496, 8128, son perfectos. No se sabe si hay infinitos números perfectos ni si hay algún número perfecto *impar*.
5) Se sabe que para todo primo $p > 3$ siempre hay un número primo comprendido entre p y 2p, pero no se sabe si existe siempre un número primo comprendido entre p^2 y $(p + 1)^2$.

Muchos problemas no resueltos sobre los números naturales están en el libro R. K. Guy *"Unsolved Problems in number Theory"*, Springer, Berlin, 1994.

CURIOSIDADES

También conviene acostumbrar a quienes van a ser profesores a tomar nota y coleccionar curiosidades que presentan conjeturas no resueltas, pero atractivas, por ejemplo las siguientes:

1) Toma un número natural cualquiera. Si es impar multiplícalo por 3 y añádele 1. Si es par, toma la mitad, Repitiendo la operación sucesivamente se llega siempre al número 1. Así:

$$12 \to 6 \to 3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

otro ejemplo:

$$100 \to 50 \to 25 \to 76 \to 38 \to 19 \to 58 \to 29 \to 88 \to 44 \to 22 \to 11 \to 34$$

$$\to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

Esto ha sido comprobado con calculadoras hasta números muy grandes, pero no se tiene una demostración de que el hecho sea general.

2) En el evangelio, según San Juan, (cap. 21, versículo 11), se lee que: "Los discípulos no habiendo pescado nada durante la noche se disponían abandonar la tarea, cuando siguiendo el consejo de Jesús, echaron de nuevo la red, la cual cuando Simón Pedro, la levantó y la trajo a tierra estaba llena de grandes peces en número 153 y siendo tantos la red no se rompió".

Por ésto el número 153 se consideró en la antigüedad como número mágico, buscándose distintas propiedades del mismo. Por ejemplo se vio que era un número triangular:

$$1 + 2 + 3 \ldots\ldots + 17 = 153$$

y también:

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 153$$

así como:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 = 153$$

En épocas recientes se ha encontrado otra propiedad, a saber: "Se parte de un número natural cualquiera que sea múltiplo de 3 y se suman los cubos de sus cifras. Al resultado, que será también un múltiplo de 3, se aplica la misma operación. Continuando de esta manera se llegará siempre al número 153.

Ejemplos:

$$256 \rightarrow 141 \rightarrow 432 \rightarrow 1458 \rightarrow 702 \rightarrow 351 \rightarrow 153$$

y también:

$$1998 \rightarrow 1971 \rightarrow 1074 \rightarrow 408 \rightarrow 576 \rightarrow 684 \rightarrow 792 \rightarrow 108 \rightarrow 513 \rightarrow 153$$

Por eso se dice que el número 153 es un *agujero negro* (respecto de la suma de los cubos de sus cifras) en el sentido de que al llegar a él ya no se puede salir más.

Este tipo de curiosidades se presta mucho para practicar los cálculos necesarios y también para hacer estadísticas, por ejemplo, calcular las sucesiones anteriores para los 100 primeros números y dibujar luego los gráficos de barras de los números que en cada caso son necesarios para llegar a 153. También se puede pensar en lo que pasa si se empieza por un número par.

La bibliografía para estas curiosidades es muy abundante y antes se llamaban "recreaciones matemáticas". Conviene que durante los cursos para profesores se comenten algunos de estos libros, cuyo conocimiento forma parte de la cultura general de todo docente en matemática. Recientemente se puede citar: *Brian Bolt, Actividades matemáticas*, varios tomos, Editorial Labor, 1989; *Martín Gardner*, también varios volúmenes de la misma editorial anterior.

Otros libros muy interesantes son los de: *Miguel de Guzmán: Mirar y ver,* Editorial Alhambra, Madrid 1976; *Cuentos con cuentas*, Editorial Labor 1984 y otros del mismo autor, todos muy interesantes por los contenidos y las notas históricas añadidas al final de cada capítulo.

PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Hasta mediados de este siglo, los problemas elementales, lo que no quiere decir que fueran simples, que se practicaban en las escuelas formadoras de profesores o en los ingresos a las escuelas técnicas tradicionales, eran casi exclusivamente construcciones con regla y compás. Las construcciones de triángulos dados 3 de sus elementos eran fuentes inagotables de ejercicios y problemas con diferentes grados de dificultad. Lo mismo pasaba con la construcción de circunferencias dadas tres condiciones, como ser, pasar por un punto o ser tangente a otras circunferencias.Había que resolver la posibilidad de hacerlo con regla y compás y en general no era fácil. Por ejemplo el problema de la construcción de un triángulo dadas sus 3 bisectrices no es resoluble con regla y compás.

El modelo que se mostraba los alumnos como ejemplo genial, era el de Gauss (1777-1885) que a los 19 años había demostrado que a los únicos polígonos regulares que se pueden escribir con regla y compás, impares y menores de 257, son de 3,5,15,17,51,85 y 255 lados.

Como bibliografía clásica se puede citar:

J. Petersen, Methodes et theories pour la resolution de problemes de constructions geometriques.Gauthier-Villars, Paris 1879 y existe la traducción española más reciente.

Ahora en cambio, como consecuencia de la epidemia de la matemática moderna de la década de los 60 (recordar la frase de Dieudonné "basta de triángulos!), ya no se usan más la regla y el compás y la raíz cuadrada ha perdido su privilegio debido a las calculadoras, que con el mismo esfuerzo extraen las raíces de cualquier orden.

Las construcciones geométricas han sido sustituidas por desigualdades geométricas. Por ejemplo en lugar de construir un triángulo dados tres elementos (alturas,medianas,bisectrices,radio del circulo inscrito,etc.),se piden las desigualdades que deben cumplir estos elementos para que la construcción sea posible.Ver la siguiente bibliografía:

O. Bottema y otros,Geometric Inequalities,Nordhoff Groningero,Holanda 1968.

D.S. Mitrinovic y otros, Recent Advances in geometric Inequalities,Kluwert Academic Public.1989.

Dmitri Fomin, Sergei Genkin, Ilia Itenberg, Mathematical Circles (Russian Experience), American Mathematical Society 1996.

Muchos de estos problemas se pueden enunciar en términos de probabilidad. Así dados tres elementos de un triángulo, calcular la probabilidad de que el triángulo se pueda construir.

Por ejemplo, la probabilidad de que se pueda construir un triángulo dadas al azar las tres alturas, vale:

$$2\log 2-1=0{,}386.$$

Claro que para estos problemas hay que elegir la manera de dar los tres elementos al azar lo cual es también instructivo para idear distintos métodos posibles y comparar las probabilidades obtenidas. (*Luis Santaló*, La Probabilidad en las construcciones geométricas, Anales de la Sociedad Científica Argentina, tomo 152, Pags. 203,229, Buenos Aires, 1951.)

PROBLEMAS SOBRE CONVEXOS Y ANÁLOGOS.

Si se sustituyen los triángulos por conjuntos convexos entre cuyas características (longitud, área, anchuras máxima y mínima, radio de la circunferencia inscrita,...) se suponen ciertas condiciones, cabe preguntarse las relaciones que deben cumplir las mismas para que existan conjuntos que las tienen como característica.

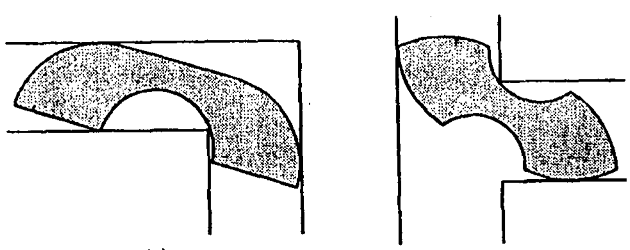
Vamos a citar algunos problemas no resueltos, pero cuyos enunciados son fácilmente comprensibles. No son problemas muy difíciles, debido a que su divulgación en el ambiente ha sido escasa, pero hasta el momento se consideran como problemas no resueltos. Ellos han sido tomados del libro:

Hallard T. Croft, Kenneth J. Falconer, Richard K. Guy, Unsolved Problems in Geometry, Springer-Verlag Berlin 1991.

1) Sea P un poliedro de volumen V, área A, tal que la longitud total de sus aristas sea L, probar que se cumplen las desigualdades:

$$A/L^2 < (6\pi)^{-1} \quad , \quad V/L^3 \leq (2^4 \cdot 3^{11})^{-1/6}$$

2) Encontrar la mayor de las mínimas distancias entre n puntos que están en un cuadrado de lado 1. El resultado se conoce para $n \leq 9$ y para n=14,16,25 y 36 pero no para otros valores de n como por ejemplo para n=10.
3) *El problema del gusano:* Hallar el dominio convexo del área mínima dentro del cual se puede colocar cualquier curva de longitud 1. Se ha propuesto que el área mínima sea 0,286 pero no está demostrado.
4) Dados n puntos en un cuadrado de lado 1, de desea saber la longitud más corta L que los une. Para n=2 es $L=\sqrt{2}$; para n=3 es $L(3)=1+\sqrt{5}/2$ pero no se sabe el valor de L para n>3.
5) Hallar el dominio de área máxima tal que pueda trasladarse a lo largo de dos corredores que se encuentran según una esquina en ángulo recto. Se conoce el llamado *piano de Shephard* (fig. a), que tiene el área 2,2074; pero no parece que sea la máxima. El mismo problema se plantea para 2 corredores en forma de T, para el cual se conoce el *coche de Comway* (fig. b), pero tampoco tiene el área máxima.



(a) (b)

MOSAICOS

Otro tipo de problemas que conviene que los profesores tengan a mano, sobre todo para motivar a los alumnos con vocación artística, son los *mosaicos o teselados*. Se llaman mosaicos a toda familia de polígonos convexos y acotados que sea localmente finita y que cubra totalmente el plano sin superponerse. En todo mosaico hay que distinguir las caras, los lados y los vértices. En todo vértice deben concurrir por lo menos tres lados y tres caras. Es fácil demostrar que si todas las caras de un mosaico tienen el mismo número de lados este número debe ser 3,4,5 o 6. Si las caras son triángulos, estos pueden tener cualquier forma, o sea, a partir de cualquier triángulo se puede construir un mosaico cuyas caras sean congruentes con el mismo. Lo mismo ocurre si las caras son cuadriláteros. En cambio, si el número de lados de cada cara es 5 o 6, existen muchos mosaicos, pero ya no se puede partir de un pentágono o un exágono cualquiera si no que hay que partir de pentágonos o exágonos especiales. Por ejemplo no existen mosaicos que tengan todas sus caras pentágonos regulares congruentes. Un catálogo muy completo de mosaicos cuyas caras tengan 5 o 6 caras se encuentra en libro de *H.Grünbaum-G.C. Shephard*, Tillings and Patterns, Freeman, New York 1986.

Supongamos ahora un mosaico que solo puede tener dos clases de caras, unas de m_1 lados y otras de m_2 lados, ambas con igual frecuencia. Entonces deberá ser:

$$m_1+m_2 \leq 12$$

Se propone dar ejemplos de cada tipo para los distintos valores de m_1 y m_2, por ejemplo la figura a es un ejemplo de m_1=4, m_2=8 y la figura b es un ejemplo de m_1=4 y m_2=3, en cada caso con frecuencia 1/2.

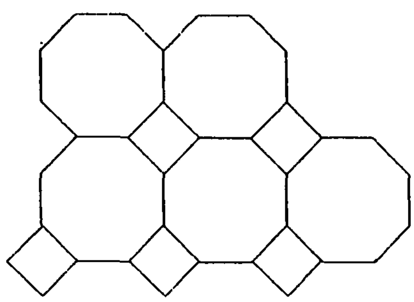


FIGURA A

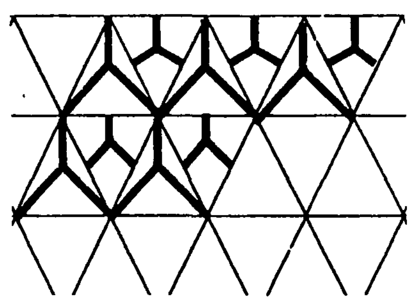


FIGURA B

Supongamos ahora un subgrupo G de los movimientos del plano y un dominio D (llamado dominio fundamental), tal que todo punto del plano es imagen de un punto de un punto de D (por una transformación de G) y que todos los transformados de D por los elementos de G no tienen punto interior común. Entonces, todo el plano queda cubierto por D y sus transformados por G, formando un mosaico caracterizado por G y D. Se sabe que de estos grupos hay 17, llamados *grupos cristalográficos*, (encontrados independientemente por *Fedorov* en 1891 y *Polya* en 1924). Variando el dominio fundamental pero conservando el grupo se pueden obtener diferentes representaciones de estos mosaicos. Su estudio se puede ver en *H.W. Guggenheimer*, Plane geometry and its groups, Holden Day, San Francisco 1967 y *D. Schattschneider*, The plane symmetry groups: their recogniton and notation, American Mathematical Monthly,85,1978,439-451.

Entre los mosaicos de la Alhambra de Granada se han descubierto modelos de los 17 grupos cristalográficos (ver *Montesinos Amilibia*, Caleidoscopios en la Alhambra, Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, tomo XXIII, Madrid 1987; Classical Tesellations and Tree, Manifolds Springer Verlag, Berlín 1987 y *Pérez Gómez*, The four regular mosaics missing in the Alhambra, Comput. Math. Appl. 14,1987,133-137.

Para los cursos para los profesores de matemática se puede proponer, a los alumnos interesados, dibujar distintos modelos para cada mosaico. También es útil mostrar algunos cuadros del pintor *Escher* inspirados en los mosaicos de la Alhambra.

RECTÁNGULOS

El profesor de matemática debe acostumbrar a sus alumnos a medir el tamaño y la forma de los objetos que aparecen con más frecuencia en su entorno. Por ejemplo, la longitud de las lapiceras, los números de páginas de los libros que usa y las dimensiones de sus cuadernos de apuntes. Con esto comprobará que las medidas obtenidas no difieren demasiado entre sí, ni en el tamaño ni en la forma. Un amplio campo de ejercicios y aplicaciones se obtienen con la recopilación de datos relativos a los rectángulos. La figura del rectángulo es una de las más frecuentes en todos los órdenes: en arquitectura, las formas de las puertas, las ventanas y las habitaciones de las casas, en las bibliotecas las distintas formas de los libros y revistas, en los escritorios las formas de las hojas para escribir, las tarjetas, los sobre y postales. Todo esto se presta a coleccionar distintos tipos de rectángulos para después ordenar sus formas y comparar las de uso más frecuente.

Esta geometría de los rectángulos ha sido estudiada en el interesante libro de *Claudio Alsina* titulado Viaje al país de los rectángulos, Red Olímpica, Buenos Aires, 1995, en el que los profesores encontrarán abundante material para que los alumnos aprendan a medir datos reales y tomen el gusto a observar y clasificar datos de la realidad que los circunda.

Por ejemplo, Alsina, en el libro citado, trae una estadística de los rectángulos de los cuadros de formatos verticales y horizontales de diversas galerías de arte de Europa, observando que para los formatos verticales (altura mayor que la base), la relación más usada es la de 5/4 y para los formatos horizontales (base mayor que la altura), la más usada es 4/3.

G. D. Birkhoff (Aesthetic measure, Harvard University Press 1933), ha estudiado una "medida estética" para figuras planas y cuerpos geométrico. Para los rectángulos, distingue como notables las siguientes posibilidades, siendo r la razón del lado mayor al menor:

- $r = 1$ (cuadrado)
- $r = \sqrt{2} = 1{,}141$ (rectángulo que por una paralela a los lados menores por el punto medio del mayor, resultan rectángulos semèjantes).
- $r = (1 + \sqrt{5})/2 = 1{,}618$ que es la clásica razón áurea.
- $r = \sqrt{3} = 1{,}732$ es el rectángulo platónico que es la unión de las dos mitades de un triángulo equilátero.
- $r = 2$, unión de dos rectángulos.

Además se puede añadir las razones simples:

$3/2 = 1{,}5$; $4/3 = 1{,}333$; $5/4 = 1{,}250$; $5/3 = 1{,}667$; $6/5 = 1{,}200$;

$7/6 = 1{,}167$; $7/5 = 1{,}400$; $7/4 = 1{,}750$; $8/7 = 1{,}143$; $8/5 = 1{,}600$;

$9/8 = 1{,}125$; $9/7 = 1{,}286$; $9/5 = 1{,}800$.

Una tarea para proponer es medir las razones entre los lados de unos cuantos libros y construir el gráfico de barras correspondiente o hacer los mismo con conjuntos de sobres, fotografías, cuadros, postales, etc.

Hemos citado unos cuantos problemas o temas de estudio, como modelos que consideramos deben ser mostrados a los alumnos durante su formación como profesores y como complemento de las distintas asignaturas de los planes de estudio oficiales, bien entendido que cada futuro profesor debe reunir ejemplos análogos, convenientemente actualizados, para usarlos en el ejercicio de su profesión.