La enseñanza de las Ciencias en la Escuela Media

I. La Matemática

L. A. Santaló

(Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Buenos Aires, Argentina)

1. La matemática moderna

Durante la primera mitad del siglo actual, la matemática progresó considerablemente en extensión. Puede discutirse el más o el menos de su crecimiento en profundidad, también importante a pesar de que muchos problemas del siglo XIX continúan sin solución; pero lo que es indiscutible es que la matemática desbordó impetuosamente su cauce tradicional, inundando por primera vez extensas zonas del conocimiento, zonas que al recibir su influjo fertilizante se fortalecieron y desarrollaron vigorosamente.

Ello resultó beneficioso para ambas partes. Las nuevas disciplinas matematizadas adquirieron de golpe una mayor seguridad en sus métodos y una mayor garantía en sus resultados, al mismo tiempo que resultaban aplicables a situaciones más variadas que las tradicionales. Por otra parte, ante las nuevas posibilidades, la matemática tuvo que agilizar sus métodos y ampliar algunas de sus partes. Capítulos medio olvidados resultaron de gran utilidad y fueron puestos otra vez sobre el tapete, siendo necesario insistir en su estudio desde los nuevos puntos de vista, con lo cual aparecieron nuevas direcciones de investigación. Otros capítulos en cambio, quedaron en reserva, en los archivos de la matemática, por no adaptarse o ser de poco interés para los problemas del momento.

Vamos a indicar algunos hechos y etapas importantes en esta expansión ininterrumpida de la matemática, lo cual servirá a su vez para mejor comprender los orígenes y contenido de la llamada matemática moderna.

a) En la tercera década del siglo empieza la difusión del álgebra moderna. Trabajos de investigación aislados y dispersos de matemáticos de primera línea, algunos del siglo pasado, son sistematizados y puestos al alcance de los estudiantes universitarios en unos cursos memorables de Emmy Noether en Göttingen (1924-28) y E. Artin en Hamburgo (1926), origen de la obra fundamental *Moderne Algebra* de B. L. van der Waerden (1930), obra básica para todos los estudios matemáticos desde la fecha misma de su aparición. El método axiomático, hasta entonces exclusivo de la geometría, entra en el álgebra y a su través invade toda la matemática. La matemática se hace más abstracta y a pesar de ello y tal vez por ello, empiezan a multiplicarse sus aplicaciones a otros campos.

b) La física, campo natural de aplicación de la matemática y, desde Newton, su principal fuente de problemas, sufre en este siglo cambios fundamentales. Nace la mecánica cuántica y, con ella, la matemática es llevada a nuevas investigaciones. Con los *Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica* de J. von Neumann (1932), la teoría del espacio de Hilbert y de sus operadores cobra interés fundamental. Por otra parte, la matemática tradicional empieza a ser insuficiente para explicar los fenómenos de la física atómica. Se hace necesario introducir nuevos elementos, como la función "delta" de Dirac (1926) que carecen de todo rigor desde el punto de vista ortodoxo. También los técnicos, desde Heaviside (1893) estaban utilizando reglas de "cálculo simbólico" no justificadas. Hace falta extender la matemática para cubrir estas desviaciones espurias. La obra es realizada por Laurent Schwartz en su *Teoría de las Distribuciones* (1950).

c) En 1943 aparece la obra de J. von Neumann y O. Morgenstern titulada *Teoría de Juegos y Comportamiento Económico*. Se trata de aplicar a la economía la teoría de "juegos de estrategia" o juegos entre personas inteligentes, en que el azar, si bien interviene, no juega el papel esencial, teoría que se remonta a Borel a principios de siglo, pero que es desarrollada y puntualizada por von Neumann en 1928. Rápidamente se observa que esta teoría resulta aplicable a una gran variedad de campos hasta entonces supuestos refractarios al tratamiento matemático. Se emplea con éxito no sólo en economía, sino también en sociología y estrategia militar. Esas aplicaciones motivan, a partir de 1945, la aparición de nuevas técnicas matemáticas que van recibiendo los nombres de programación, investigación operativa y teoría de la decisión, técnicas todas ellas de uso cada vez más extendido en la organización industrial, dirección de empresas y planificación en general.

d) Las nuevas aplicaciones de la matemática dan lugar a problemas cuyo planteo no ofrece mayor dificultad, pero cuya solución resulta imposible por los métodos convencionales. Se trata, por ejemplo, de resolver sistemas formados por un gran número de ecuaciones lineales y un gran número de incógnitas o por ecuaciones diferenciales complicadas. Su método de solución es conocido, pero la cantidad de operaciones a realizar exige meses o años de trabajo a mano o con máquinas de calcular mecánicas. Para resolver estos problemas nacen las computadoras electrónicas, cuyas posibilidades no pueden ser desconocidas por ningún matemático o técnico actual. Su teoría reactualiza las álgebras de Boole (1815-1864) y la lógica simbólica. Muchos problemas, antes imposible de resolver matemáticamente por imposibilidad práctica de hacer los cálculos necesarios, hoy se resuelven en pocos minutos. Al mismo tiempo, muchas técnicas de cálculo numérico, hasta hace poco indispensables al ingeniero o al matemático aplicado, han quedado fuera de uso.

e) Todo lo anterior significó una extensión considerable del campo de la matemática. El número de personas interesadas en conocer su manejo aumentó de golpe de manera inusitada. Ya no eran solamente los ingenieros que necesitaban entrenarse en el cálculo matemático, sino que también los economistas, biólogos, sociólogos y otros especialistas, tanto investigadores como técnicos, se vieron obligados a aprender más matemáticas y aprenderlas de acuerdo con las nuevas modalidades. Por otra parte, al lanzarse en 1957 el primer satélite artificial, la admiración por la técnica tan elaborada y perfecta que significaba, basada en cálculos de precisión insospechada, motivó un pedido unánime en todo el mundo de que la enseñanza de la matemática fuera extendida e intensificada. El hombre común sintió que la comprensión del mundo que le rodea sólo puede conseguirse a través de un mayor conocimiento de la matemática.

2. — La enseñanza de la matemática moderna

La rápida evolución de la matemática hizo que los programas de enseñanza de la misma quedaran bien pronto rezagados, casi sin conexión con la matemática usada en las nuevas actividades. Los egresados en cualquier disciplina científica o técnica se encontraban ante la necesidad de aprender nuevos conceptos que no les habían sido ni tan sólo mencionados en sus cursos regulares de matemáticas, al mismo tiempo que gran parte de lo aprendido les resultaba inútil e inadecuado ante las nuevas necesidades. Se sentía la sensación propia de un soldado que en la guerra actual se le equipara con las armaduras de los cruzados. Nació la preocupación natural para corregir esta situación e inmediatamente después de la última guerra mundial empezó a introducirse la matemática moderna en las Universidades e Institutos de enseñanza superior. Primero, la reforma se hizo en las Facultades de Ciencias, en cuyos Departamentos de Matemática esta ciencia es un fin en sí misma y poco después en las Facultades de Ingeniería y Escuelas Especiales, en que la matemática es un instrumento indispensable, instrumento que tampoco podía ser el mismo de los siglos pasados. Ello no fué obra demasiado difícil; la claridad del problema y su perentoria necesidad hicieron que la reforma fuese llevada a cabo prácticamente en todos los países entre 1945 y 1960.

Sin embargo, la reforma de la enseñanza al nivel superior no es suficiente. En primer lugar porque no todos los alumnos que cursan estudios secundarios pasan luego a la enseñanza superior y sin embargo también ellos precisan de una matemática renovada para mejor desenvolverse en la vida presente. En segundo lugar, para quienes prosiguen luego estudios matemáticos al nivel universitario, la enseñanza recibida, de ser anticuada, resulta de poco ayuda, debiendo dedicar tiempo, muy necesario para aprender nuevas cosas, a familiarizarse con conceptos y modalidades nuevas que caben perfectamente en el nivel medio de la enseñanza. Por esto en todos los países el problema se focalizó en la segunda enseñanza.

Tratándose de un problema mundial, con características análogas en todos los países, es natural que interesara por igual a distintas entidades de carácter internacional, a saber: la Unión Internacional de Matemáticos (I M U) a través de su Comisión Permanente de Enseñanza de la Matemática, la Organización Europea para Cooperación Económica y Desarrollo (O E C D, primeramente indicada con O E E C), la Organización de Estados Americanos (O E A), la U N E S C O y otros organismos similares. Con su ayuda, y en gran parte gracias a la iniciativa e incansable labor del matemático norteamericano Marshall H. Stone, han tenido lugar en distintas partes del mundo sucesivas reuniones para considerar y debatir el problema de la Enseñanza de la Matemática en la Escuela Media. He aquí una lista de las principales de estas reuniones:

1. *Seminario de Royaumont.* Organizado por la O E E C bajo el título de *New Thinking in School Mathematics.* Realizado del 23 de noviembre al 4 de diciembre de 1959 en Royaumont, Asnières-sur-Oise (Francia). Se publicaron las comunicaciones y discusiones.*

2. *Reunión de Dubrovnik* (Yugoeslavia). Celebrada del 21 de agosto al 19 de septiembre de 1960. Se preparó en ella el informe titulado *Synopses for modern secondary school mathematics,* publicado por la O E E C (1961).

3. *Seminario de Aarhus.* Organizado por la International Comission for Mathematical Instruction (I C M I) del 30 de mayo al 2 de junio de 1960 y celebrado en Aarhus (Dinamarca). Se dedicó a la enseñanza de la geometría al nivel secundario. Se publicaron (en mimeógrafo) las comunicaciones y discusiones.

4. *Segunda confererncia sobre Educación Matemática en Sud-Asia.* Tuvo lugar en el Tata Institute for Fundamental Research de Bombay (India) entre el 20 y el 27 de enero de 1960. La primera conferencia se había celebrado en el mismo lugar entre el 22 y 28 de febrero de 1956. Se publicaron las comunicaciones.

5. *Reunión de Bolonia* (Italia) sobre la enseñanza de la matemática. Celebrada del 4 al 7 de octubre de 1961. Un resumen de las comunicaciones y conferencias se publicó en el Bollettino della Unione Matematica Italiana, Serie III, Año XVII, junio de 1962.

6. *Primera Conferencia Interamericana sobre Educación Matemática.* Celebrada en Bogotá (Colombia) del 2 al 9 de diciembre de 1961. Estuvieron presentes delegados de prácticamente todos los países americanos y asistieron también matemáticos europeos especialmente invitados. Las comunicaciones y discusiones se han publicado en el volumen titulado *Educación Matemática en las Américas,* editado por por Howard F. Fehr, Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1962. Las recomendaciones aprobadas en esta Conferencia se publicaron en

* Las publicaciones de la O E E C pueden solicitarse a "Direction des Affaires Scientifiques, Chateau de la Muette, 2 rue André Pascal, París 16, Francia."

CIENCIA E INVESTIGACIÓN, tomo 18, febrero de 1962, págs. 94-96.

En todas estas reuniones hubo general coincidencia respecto de la necesidad de cambiar el contenido de los programas vigentes para la enseñanza de la matemática al nivel secundario. Se nombraron comisiones encargadas de planear los medios para llevar a cabo las reformas en los distintos países. Varias Universidades e Instituciones, principalmente norteamericanas, organizaron grupos de trabajo para redactar programas piloto que concretaran las reformas propuestas. Es importante, por ejemplo, el *School Mathematics Study Group* (S M S G) financiado por la National Science Foundation y dirigido por el profesor E. G. Begle, que funciona actualmente en la Stanford University, Palo Alto, California. Yendo más allá de los programas, en los Estados Unidos se han publicado varios libros de texto preparados por grupos de profesores de enseñanza secundaria y universitaria, con el objeto de mostrar el espíritu de las nuevas modalidades. Textos análogos, a veces por iniciativa privada, se han publicado también en otros países. Naturalmente que ellos no pasan de ser ensayos y una base de discusión para textos futuros, que poco a poco irán tomando forma más definitiva, tanto en su contenido intrínseco como en su método de exposición. En el Apéndice al final mencionaremos algunos de estos ensayos.

3. El informe Kemeny

En el Congreso Internacional de Matemáticas de Edinburgo (1958), la Comisión Internacional para la Enseñanza de la Matemática, decidió que las subcomisiones nacionales estudiaran el siguiente tema: ¿Cuáles son los tópicos de la matemática moderna y de sus aplicaciones que deben incluirse en los programas de la enseñanza secundaria? Las respuestas debían ser comunicadas a la Comisión para ser discutidas en el próximo congreso internacional de 1962.

Contestaron a la encuesta 21 naciones. Las respuestas fueron tenidas en cuenta en un importante informe que el profesor John G. Kemeny presentó al Congreso Internacional de Matemáticas de Estocolmo (1962), actuando como relator del tema. En opinión de la mayoría dichos tópicos son: a) Elementos de la teoría de conjuntos; b) Introducción a la lógica; c) Probabilidades y Estadística; d) Álgebra Moderna. Al mismo tiempo se recomendaba la modernización del lenguaje y de la estructura conceptual de la matemática. Respecto de la intensidad en que estos temas deben ser introducidos veamos, libremente traducidos, algunos párrafos del informe Kemeny:

a) El concepto de conjunto, así como los de unión, intersección y complemento entre conjuntos, es básico para toda la matemática moderna. La mayoría de las naciones opinantes abogaron por una pronta introducción y uso de estas ideas fundamentales.

b) Lo mismo puede decirse de la lógica simbólica elemental. Las estructuras isomorfas del álgebra de Boole y del cálculo proposicional pueden estudiarse simultáneamente. La lógica juega un doble papel en la matemática, pues aparte de constituir la base de todos sus razonamientos, es un interesante tema en sí misma. Después de siglos de hacer libre uso de la lógica, sin examinar detenidamente sus fundamentos, los matemáticos han invertido el proceso, haciendo de la lógica una de las ramas de la matemática.

c) Las probabilidades y estadística se introducen por su importancia práctica y por el interés que despiertan, más bien que por su utilidad dentro de la estructura de la matemática. La intensidad en que debe darse la teoría de probabilidades está sujeto a discusión. Tal vez baste limitarse a los casos discretos o aún finitos. Puesto que los problemas más familiares al alumno se refieren a un número finito de casos posibles, la formulación de los fundamentos de la probabilidad en tales términos corresponde bien a la experiencia diaria del alumno.

d) Respecto del álgebra moderna parece haber cierta discrepancia entre los partidarios de introducir temas referentes a las estructuras algebraicas (grupos, anillos, cuerpos) y los partidarios del álgebra lineal. Una y otra tendencia tienen la ventaja de dar una visión más profunda de ciertas estructuras ya familiares al alumno; el álgebra lineal es una formulación algebraica de ideas geométricas, mientras que las estructuras algebraicas aparecen como generalización natural de la experiencia del alumno con los números.

La introducción axiomática de las estructuras del álgebra tiene la saludable ventaja de borrar la falsa idea de que la axiomática es una exclusividad de la geometría, idea expresada en la frase del alumno que observaba: "En geometría se demuestran las cosas; en álgebra se dice cómo deben hacerse las cosas", o, en otras palabras: "En geometría hay teoremas, en álgebra hay reglas". Esta idea desaparece con la introducción axiomática de las estructuras de grupo de espacio vectorial.

La estructura de grupo es la más simple y útil. Es también muy atractiva por el hecho de ser aplicable tanto a ciertos conjuntos de números, bien conocidos del alumno, como a conjuntos de operaciones geométricas (transformaciones, simetrías de figuras planas). El estudio de los espacios vectoriales es más complicado, pero es muy útil en geometría y también para mejor comprender el significado de las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales.

e) Otra disciplina que también se ha indicado para ser introducida en la enseñanza secundaria es la Topología, naturalmente en su parte elemental. Francia, por ejemplo, propone dar la noción intuitiva de entorno y aplicarla a los conceptos de convergencia, límites y continuidad. Polonia va todavía más lejos y sugiere que deben darse, *sin demostración*, el teorema de Jordan sobre curvas cerradas, la clasificación de las superficies poliedrales y algunos ejemplos de superficies no orientables, hasta la discusión del teorema de Euler.

f) Como aplicaciones de la matemática moderna, se señalan cuatro direcciones: estadística, física, máquinas calculadoras y programación lineal. La parte de máquinas, naturalmente, sólo como información del tipo de problemas que las mismas pueden resolver.

g) Finalmente, la introducción de nuevos temas plantea la necesidad de suprimir otros que tradicionalmente figuraban en los programas. La opinión general es que debe reducirse el tiempo dedicado a la geometría sintética y sobre todo a la trigonometría, geometría del espacio y a ciertas prácticas de cálculo numérico de poco o ningún uso en la actualidad.

Estos párrafos, tomados de manera aislada y no literal, reflejan las conclusiones fundamentales a que se llegó en la encuesta mencionada.

4. La enseñanza de la geometría

Vamos a abundar en algunas consideraciones sobre la enseñanza de la geometría al nivel secundario, muchas de ellas resultado de las reuniones internacionales mencionadas y también del informe Kemeny anterior.

La geometría fué considerada durante siglos como la parte de la matemática más indicada para ejercitar el razonamiento deductivo. Ello era debido a su construcción axiomática que, iniciada con Euclides, se mantuvo prácticamente sin modificación hasta fines del siglo pasado. El sistema de Euclides, con sus cinco axiomas, resultaba ideal para la enseñanza de la geometría, inclusive al nivel secundario.

Sin embargo, durante el siglo XIX, se fueron poniendo de manifiesto serios inconvenientes al sistema de Euclides. Aparte la inconsistencia de ciertas definiciones, resultaba que sus cinco postulados no eran suficientes, es decir, la construcción axiomática de la Geometría a partir de ellos no es rigurosa. La construcción axiomática rigurosa fué hecha por David Hilbert en 1899, pero el sistema de axiomas necesarios es ya mucho más complicado que el de Euclides, por lo cual resulta difícil, sino imposible, su adaptación a la enseñanza secundaria; su comprensión necesita de una formación matemática muy elaborada. A pesar de ello, por la inercia de los siglos anteriores, se quiso conservar una enseñanza axiomática de la geometría y se pretendió poner al nivel de la enseñanza media el sistema de Hilbert, con el resultado de que ni se aprendía a razonar axiomáticamente, por excesiva complejidad del sistema, ni se aprendía geometría por quedar la atención diluída entre la maraña de postulados, cuya necesidad era incomprensible para el alumno.

La tendencia moderna, no general pero sí muy difundida, consiste en aceptar la realidad y abandonar la enseñanza de una geometría axiomática. El valor formativo de los sistemas axiomáticos que evidentemente constituyen la esencia de toda la matemática, puede conservarse trasladando el método axiomático al álgebra donde se encuentran importantes ejemplos, tan ilustrativos como pueden serlo los de la geometría y mucho más simples.

La supresión de la axiomática permite concentrar la parte de geometría sintética que es fundamental como base de todo conocimiento matemático, en los primeros años del ciclo secundario, dándola en forma intuitiva, con demostraciones para ejercitar el razonamiento pero sin pretensiones de construirlo todo a partir de unos pocos enunciados explícitamente formulados.

Por otra parte, una vez adquiridos los conocimientos básicos del álgebra, en los últimos años de la enseñanza media, ha de volverse a la geometría, pero con tratamiento analítico y en forma vectorial. Se ha señalado a la geometría euclidiana el defecto de esconder la idea de vector. Un tratamiento analítico a partir del concepto de espacio vectorial permite subsanar este defecto y aún, si así se desea, volver a la axiomática por el camino algebraico de los espacios vectoriales.*

5. La enseñanza del álgebra

Respecto del álgebra, la tendencia es hacerla depositaria de la parte de axiomática que se quita a la geometría. Con ello se gana, sobre todo, en generalidad. El extenso campo de aplicaciones que actualmente tiene la matemática hace poco recomendable una enseñanza demasiado concreta, limitada a las formas tradicionales, muy particulares, de sus estructuras generales. Junto con la idea de número entero, que ya posee el alumno desde la enseñanza primaria, será interesante para él la idea de anillo, que luego podrá aplicar sin esfuerzo a muchas otras situaciones (polinomios, matrices cuadradas de un orden dado) y la idea de grupo, cuya importancia ya hemos señalado anteriormente. Igualmente, los ejemplos de números fraccionarios y reales deben servir para insistir sobre la idea de grupo y adquirir la de cuerpo; el manejo de algún cuerpo particular no usual (por ejemplo el de los restos módulo un número primo) será muy útil para comprender la gran generalidad de los esquemas matemáticos, origen de su extensa variedad de aplicaciones.

Los conceptos de isomorfismo y relación de equivalencia deben enseñarse de manera natural cuanto antes, para economizar y sistematizar muchos conocimientos, inclusive de la vida corriente. La idea de función debe adquirirse desde los primeros años con toda su generalidad (aplicación de un conjunto en otro) y toda clase de ejemplos. La primera idea de probabilidad, que aparece de manera natural en la combinatoria, junto con algunos ejemplos simples de problemas de estrategia, herencia o decisión abre grandes perspectivas al alumno. La teoría elemental de inecuaciones lineales, ilustrada con ejemplos fáciles de programación lineal es otro punto que la iluminación moderna vuelve atractiva su clásica aridez.

Todo esto no es más difícil que el álgebra tradicional. En general gusta mucho a los alumnos, lo que prueba que se trata de conceptos adecuados a su edad, y tienen la ventaja de abrirle claros y bien delimitados marcos donde encuadrar muchas de las muy variadas situaciones que presenta la vida moderna. Esta es la tendencia actual: ya que no es posible dar reglas definitivas para todos los procesos en que se aplica el método matemático, dar las estructuras básicas para que el alumno adquiera la flexibilidad necesaria para adaptarse a cada caso con que se pueda encontrar en el futuro. La enseñanza pasa a ser, en gran parte, potencial.

* Para más detalles se puede ver L. A. Santaló, *Nuevas tendencias en la Enseñanza de la Geometría*, Instituto Superior del Profesorado, Buenos Aires, 1962.

Lo mismo que en la geometría, también en álgebra la inclusión de nuevos tópicos hace imprescindible suprimir o abreviar algunos de los tradicionales. Desde luego que el manejo del simbolismo y cálculo matemático debe en gran parte conservarse, pero sin ningún peligro pueden abreviarse considerablemente las exageraciones, hoy en día inútiles (si es que alguna vez han tenido utilidad), de estos mismos cálculos. Los ejercicios, en particular, deben ser "simples", útiles para aclarar las ideas, pero nunca de una complicación excesiva que no aclara nada sino que más bien confunde y aburre al alumno. Hay que dar, por ejemplo, el concepto de logaritmo y mostrar su utilidad para el cálculo, sea mediante tablas, sea a través de la regla de cálculo, pero no hace falta pretender que el alumno salga un experto en el cálculo de fórmulas complicadas (que jamás tendrá oportunidad de aplicar) ni en el manejo exhaustivo de las tablas de logaritmos o de la regla de cálculo. Si alguna vez lo necesita, poseyendo la idea clara de sus posibilidades, con la simple lectura del folleto explicativo de la regla o de la introducción de las tablas, podrá defenderse sin dificultad. Lo mismo puede decirse de muchos otros capítulos (expresiones algebraicas, operaciones con polinomios, factoreo, operaciones con raíces, racionalización de expresiones complicadas) que hoy ocupan inútilmente muchas horas de enseñanza y que podrían reducirse fácilmente a su cuarta o quinta parte sin ningún desmedro para la formación ni para la información del alumno.

6. La formación del profesorado secundario

En todos los países, la gran dificultad para introducir la matemática moderna en la Escuela Media consiste en la preparación del profesorado que debe enseñarla. La rápida evolución de las ideas hace que el profesor no pueda mantenerse estático, enseñando año tras año lo que aprendió de estudiante. Debe estar al día y para ello debe leer y estudiar continuamente lo que se hace, lo que se dice y lo que se recomienda en su especialidad. Debe, por otra parte, observar atentamente cómo responde el alumno a las nuevas enseñanzas y preparar cuidadosamente de acuerdo con ello las clases, buscando la mejor forma de presentar los conceptos. Todo ello exige esfuerzo, tiempo y vocación, cosas difíciles de exigir a un profesorado universalmente poco remunerado y, en muchos países, sobrecargado hasta lo inverosímil de horas de clase.

No parece fácil una solución completa y rápida. En muchos países se ha empezado por reformar los planes de los Institutos donde se forman los profesores, idea excelente y necesaria, pero de efecto lento. Se ha recomendado también la realización de Cursos de Perfeccionamiento para profesores, con el fin de que en ellos se les pueda informar sobre las nuevas tendencias y modalidades. Así se ha hecho, por ejemplo, en la Argentina durante 1962 y 1963, con cursos organizados por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas con ayuda financiera de la fundación Ford. El método es también lento por la pequeña proporción de profesores que a ellos pueden asistir.

El método tal vez más eficaz y que no excluye los anteriores, es el de publicar libros de texto, guías o apuntes para repartir ampliamente entre el profesorado, cómo se inició, según dijimos, en Norteamérica. La dificultad estriba en escribir estos textos. Bien seguro que a los primeros que salgan se les encontrarán defectos y serán objeto de acervas críticas, tanto de parte de quienes no entienden el problema o no comparten la necesidad del mismo, como de aquellos que presumen de tener la exclusividad de su dominio, pero que, con sospechosa prudencia, no se lanzan a la palestra ni puntualizan en textos escritos sus pontificales opiniones. Pero ello no debe detener la marcha. A fuerza de ensayos, corregir errores y limar exageraciones, estos textos piloto irán tomando la forma definitiva, base de la reforma. Con ellos, el profesor aislado, sin tiempo ni posibilidad de mayores estudios, tendrá por lo menos una guía para sus enseñanzas.

Para poner en marcha la reforma no hay que esperar una unanimidad imposible, ni una perfección indiscutible. La opinión favorable de los primeros matemáticos de la hora presente constituye un aval suficiente para que se emprenda el camino, con todos los recaudos, pero con la firmeza que da la convicción de un éxito asegurado.

APÉNDICE

Vamos a dar, a título de información, algunos libros destinados a la enseñanza de la matemática moderna en la Escuela Media. Todos ellos constituyen ensayos discutibles, pero que son excelentes referencias como base de discusión.

1. Publicaciones del *School Mathematics Study Group*:
   a) En inglés: *Euclidean Geometry based on ruler and protactor axioms; Structure of Elementary Algebra; Geometry; Concepts of Informal Geometry; Number Systems; Intuitive Geometry; Concepts of Algebra.*
   b) Traducciones al castellano: *Matemáticas para el primer ciclo secundario* (2 partes); *Matemáticas para la escuela Secundaria: Primer Curso de Algebra* (2 partes); *Geometría* (2 partes).

   Dirección del Editor: A. C. Vroman, Inc., 367-South Pasadena Ave. Pasadena, California, P.S.A.
2. *New Mathematics*, Parte 1 y 2. Preparado por la Ontario Mathematical Comission, 1960, Service & Smiles, 9 Mayfair News, Toronto 5 (Ontario), Canadá.
3. *Mathematics for High School Geometry* (Parts I y II), Yale University Press, 1961.
4. *High School Mathematics (Unit 6), Geometry.* University of Illinois Committee on School Mathematics. University of Illinois Press, Urbana, U.S.A., 1960.
5. *Mathematics for the Junior High School* (Libros I y II), University of Maryland, U.S.A.
6. *Mathematiques Modernes, Enseignement Elementaire*, par Lucienne Felix, A. Blanchard, París, 1960.
7. Ocse, *L'insegnamento Matematico* (traducido al italiano del francés), Armando Editore, Roma, 1963.