EINSTEIN, con sus teorías de la relatividad, iluminó la idea de geometrizar la física. Para la geometría ello significó la apertura de nuevos horizontes y la necesidad de profundizar y seguir con el estudio de capítulos ya conocidos, pero que de esta manera recibían nuevo impulso y cobraban nuevo interés. Como todos los aportes geniales, el de Einstein a la geometría y en general a la matemática hay que valorizarlo tanto por la obra propia del autor, como por las ideas que esbozó y que otros desarrollaron y completaron.

Vamos a detallar algunos aspectos de esta influencia de Einstein en el campo matemático.

LA RELATIVIDAD RESTRINGIDA

"Las ecuaciones de la física deben ser invariantes respecto el grupo de Lorentz." Tal es el principio de Einstein que se ha convertido en básico para toda la física moderna. Para el matemático, el principio plantea el problema de hallar estas ecuaciones invariantes, hallarlas si es posible todas, para que luego el físico elija las que le convengân. Muchos trabajos se han hecho en este sentido, ciertamente muy apartados de la obra personal de Einstein, pero en el fondo inspirados por su idea directriz. Citemos, para mencionar tan sólo un ejemplo, un trabajo de Harish-Chandra [1] donde se encuentra abundante bibliografía al respecto.

El afán extrapolador de la matemática lleva a considerar el mismo problema para cualquier grupo —no solamente para el de Lorentz— ligándolo con el problema de la representación lineal de grupos, profundo e interesante tema puramente matemático que desde este punto de vista recibe el aliciente de sus posibles aplicaciones físicas.

LA RELATIVIDAD GENERAL

Anteriormente a Riemann, la geometría diferencial de variedades (curvas, superficies, hipersuperficies) se estudiaba siempre suponiéndolas sumergidas en un espacio de mayor número de dimensiones. Las superficies, por ejemplo, se suponían siempre contenidas en el espacio y se estudiaban sus propiedades respecto el mismo (plano tangente, normal, direcciones principales, líneas asintóticas...). Riemann, en su famosa tesis doctoral titulada *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zugrunde liegen* (1854), plantea el caso de variedades de n dimensiones que deben estudiarse intrínsecamente en ellas mismas, sin tener en cuenta si están o no contenidas en otro espacio de mayor número de dimensiones. Se parte tan sólo de una ley o criterio que permita medir longitudes de curvas contenidas en el espacio; es decir, se parte de una "métrica" definida en el mismo. Nace así la llamada "geometría de Riemann". Para el caso general de una variedad o espacio n-dimensional, la métrica que toma Riemann para medir distancias dentro de la variedad es de la forma

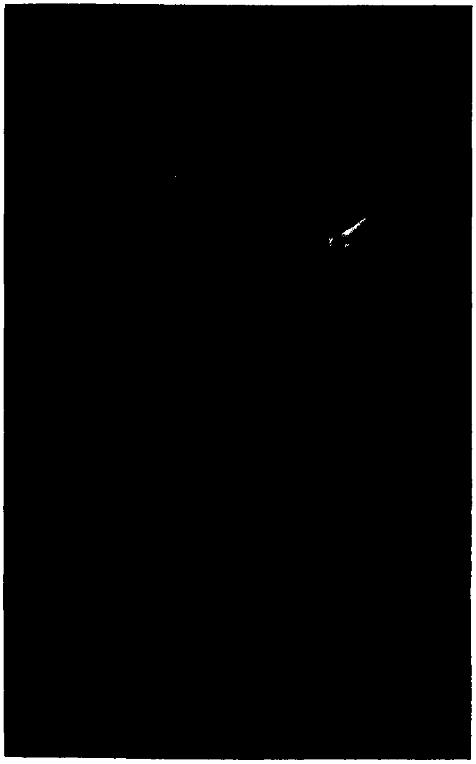
$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j \tag{1}$$

donde ds es el elemento de arco (por integración del cual se mide la longitud de cualquier curva), x^i ($i = 1, 2, \ldots, n$) son las coordenadas de los puntos y los coeficientes g_{ij}, funciones de las x^i, son los datos que caracterizan el espacio. La sumatoria en (1) va extendida de 1 a n. Estas funciones g_{ij}, puesto que las longitudes de las curvas no deben depender del sistema de coordenadas utilizado, son componentes de un tensor llamado el tensor fundamental del espacio. Sin restringir la generalidad se puede suponer siempre que es

$$g_{ij} = g_{ji} \tag{2}$$

es decir, que el tensor fundamental es simétrico, con lo cual el número de sus componentes es $\frac{1}{2}n(n+1)$ y para el espacio-tiempo ($n = 4$) su número es 10.

Muchas veces, siguiendo a Riemann, se exige que la forma cuadrática (1) sea siempre positiva (para dx^i, dx^j cualesquiera), pero esta condición no es esencial y prácticamente toda la geometría vale lo mismo —salvo detalles— en el caso general.



Einstein en el Instituto Carnegie.

Tras la memoria de Riemann, sus ideas evolucionan lentamente. Son clásicos los trabajos de Christoffel [2] y de Ricci, este último introduciendo la noción de derivada covariante y creando el cálculo diferencial absoluto, base del hoy llamado más comúnmente cálculo tensorial. Varios trabajos anteriores de Ricci son elaborados de nuevo y unificados en la clásica memoria de Ricci y Levi-Civita de 1901 [3].

Estas teorías estuvieron largo tiempo

reservadas a los geómetras, como disquisiciones las más apartadas de todo contacto con la realidad física. Fué Einstein quien tuvo la visión genial de observar que el problema de los geómetras era el mismo que debían plantearse los físicos. La geometría de un espacio de Riemann consiste en buscar las propiedades del espacio, siempre a partir del único dato (1), que dependan únicamente del espacio mismo, no del sistema de coordenadas utilizado. Es decir, las propiedades geométricas deben ser representadas por ecuaciones invariantes respecto a cualquier cambio de coordenadas. El instrumento de cálculo apropiado para representar estas ecuaciones es el cálculo tensorial.

Para la física, el espacio en que los fenómenos ocurren es el espacio-tiempo, espacio de 4 dimensiones. Las leyes de la física no deben depender del sistema de coordenadas. El problema de hallar estas leyes es pues el mismo que se plantea el geómetra al buscar las propiedades geométricas del espacio. Estudiar esta geometría o estudiar la física correspondiente son, en consecuencia, problemas equivalentes.

Pero esta equivalencia no es inmediata, ni tampoco, en principio, clara. Se necesitaba la mente de Einstein, física y matemática a la vez, para poner de relieve esta analogía y poner luz a esta correspondencia. Ésta fué la obra de Einstein en su relatividad general. Partiendo de la hipótesis que el espacio-tiempo era un espacio de Riemann, necesitó valerse de todo el instrumento creado por Riemann, Christoffel y Ricci, pulirlo y adoptarlo a los fines vislumbrados. El cálculo diferencial absoluto tuvo en Einstein el más hábil de los manipuladores. Por él fué simplificado, seleccionado y transformado de una maleza impenetrable de fórmulas, símbolos e índices, en un instrumento elegante, manejable y atractivo. Detalles, al parecer insignificantes como la supresión del símbolo de sumación cuando ésta puede deducirse de los índices mismos, fueron de gran significación para hacer viable el desarrollo posterior de todo el cálculo tensorial.

Con sus ecuaciones de la gravitación, Einstein valorizó el tensor de Ricci R_{ij} poniendo sobre el tapete el interés de estudiar los espacios para los cuales se anula ($R_{ij} = O$), o bien aquellos para los cuales es proporcional al tensor fundamental ($R_{ij} = \lambda\, g_{ij}$), espacios llamados desde entonces *espacios de Einstein*. Aparte de los trabajos del mismo Einstein, estos espacios han sido objeto de múltiples estudios posteriores, encontrándose muchas propiedades de los mismos que los han hecho interesantes aun desde el punto de vista puramente matemático. Bastará que citemos, como ejemplo, algunos trabajos recientes de Fialkow [4], Haantjes [5], Wrona [6], Yano [7], Kuiper [8] y Tachibana [9].

Otros resultados conocidos de la geometría de Riemann cobraron con la relatividad general nuevo impulso o nuevo aspecto, que acrecentó en mucho su interés. Tal es el caso de las llamadas identidades de Bianchi (1902) al ponerse de manifiesto que equivalían a expresar la anulación de la divergencia del tensor gravitacional R_{ij}-½Rg_{ij} y con ello al principio de conservación de la energía.

El problema cosmológico ha dado lugar al estudio global de ciertos espacios cuadridimensionales. Junto con los clásicos resultados de Einstein, De Sitter y Friedmann-Lemaitre, se deben citar las investigaciones recientes de Gödel [10] de valor matemático indudable.

El problema de la unificación de los campos

La relatividad general, cuyo éxito para el campo gravitatorio fué rotundo, planteó a Einstein el problema de hallar una geometría del espacio-tiempo en la cual tuviera cabida también el campo electromagnético.

El solo hecho de plantear un problema abordable y poner de manifiesto su interés, es ya de importancia fundamental en matemáticas. Pronto aparecieron nuevas geometrías, que originadas por la idea de Einstein de buscar la unificación de los campos, se desarrollaron luego frondosamente como ramas de la matemática pura.

La geometría de Riemann de la relatividad general no era suficiente por la simple razón de que las 10 componentes g_{ij} del tensor fundamental eran todas necesarias para definir el campo gravitatorio. Había que buscar otra geometría en cuya determinación interviniesen más funciones.

La primera idea (Kaluza-Klein) fué la de considerar el espacio-tiempo como un espacio de 4 dimensiones, sumergido en otro espacio también riemanniano de 5 dimensiones. Con ello el número de componentes del tensor fundamental se aumenta a 15 y por tanto se dispone de 5 más para interpretar el campo electromagnético. En esta dirección, desde el punto de vista matemático, no se introduce nada nuevo, puesto que no se sale de la geometría de Riemann.

Sin embargo, también la geometría de sub-espacios de un espacio de Riemann se vió impulsada y alcanzó nuevos progresos por este afán de conseguir una teoría unificada satisfactoria. Cuando más tarde se quiso incluir en la unificación el campo mesónico, se aumentó el número de dimensiones a 6 o más. Muchos autores, entre ellos el mismo Einstein [11, 12] trabajaron en este sentido. Citaremos, como contribuciones importantes, las de Hoffmann [13], Yano-Ohgane [14], Podolanski [15] y Thiry [16].

Una variante de estas teorías multidimensionales se obtuvo al querer dar una interpretación a las dimensiones superiores a la cuarta. Con Veblen [17] se originaron las teorías proyectivas, de gran interés matemático, que interpretan la quinta variable no como coordenada de una dimensión más, sino como la coordenada homogénea del espacio-tiempo original de 4 dimensiones. Estas teorías proyectivas obligaron a crear el concepto de tensor proyectivo (o "proyector") y el cálculo tensorial correspondiente. Como contribuciones más recientes en esta dirección, en la cual la literatura es abundantísima, citaremos un libro magnífico de Jordan [18], del mayor interés matemático, y una monografía de Ludwig [19].

También se ensayó sustituir la métrica de Riemann por una métrica de Finsler (Schaffhauser-Graf [20], Horvath [21]) o una geometría conforme (Ingraham [22]) o, más particularmente, una geometría invariante por transformaciones semejantes (Hoffmann [23]). Todos estos ensayos redundaron en contribuciones a las geometrías respectivas.

Pero la idea más importante y fructífera desde el punto de vista matemático, fué la de considerar que como dato inicial del espacio, en vez de dar una métrica como en el caso de Riemann o de Finsler, se puede dar una "conexión afin" o conjunto especial de funciones que permitan definir un "paralelismo" entre vectores del espacio. Entonces no se podrán medir distancias ni longitudes de curvas, pero se podrán definir ciertas trayectorias o caminos, como aquellas curvas cuyas tangentes son paralelas entre sí según la ley de paralelismo definido en el espacio.

De esta manera nacieron los espacios de conexión afin y posteriormente los de conexión proyectiva y aun otros más generales, todos los cuales han pasado a ser fundamentales en la moderna geometría diferencial. En esta dirección, tras los trabajos iniciales de Weyl [24], Eddington [25] y E. Cartan [26] la bibliografía es abundantísima. Pero lo que nos interesa señalar es que, a pesar de que luego han evolucionado en direcciones muy diversas, en su origen y en muchos de sus progresos el motivo perseguido era el problema de la unificación de los campos. Una exposición excelente la constituye el libro *Space-time structure* (Cambridge University Press, 1950) de Schroedinger.

La idea de conseguir una geometría que respondiera al problema de la unificación de los campos, idea que preocupó constantemente a Einstein desde la época misma de su relatividad general, le hizo ensayar caminos muy diversos. Aparte de los ya mencionados, que tuvieron intenso desarrollo, otros quedaron abandonados desde el principio. Por ejemplo, en 1944, en colaboración con Bargmann [32], publicó los comienzos de una interesante teoría de "bivectores" o tensores dependientes de dos puntos del espacio, teoría abandonada pero que desde el punto de vista matemático posiblemente merecería todavía ser considerada con más detenimiento y atención.

La última teoría del campo unificado

En 1950 publicó Einstein su última teoría del campo unificado como apéndice a la tercera edición de su libro "El significado de la Relatividad", teoría que en ediciones posteriores modificó ligeramente.

Desde el punto de vista matemático, la nueva teoría inicia el estudio de un nuevo tipo de espacios, para los cuales el tensor fundamental g_{ij} deja de ser simétrico y además está íntimamente ligado con ciertos coeficientes de conexión afín que vienen a jugar el papel de los símbolos de Christoffel de los espacios de Riemann. El hecho de suponer los g_{ij} no simétricos no influye en cuanto a la métrica del espacio, que sigue siendo la (1), pero en cambio permite una mayor variedad en las operaciones de ascenso y descenso de índices del cálculo tensorial y da origen a tipos diferentes de derivación covariante, y por tanto a nuevos tensores análogos al de curvatura del caso simétrico.

Ya en otro número de *Ciencia e Investigación* (1953, *9*, 300-307) dimos una idea de esta nueva teoría y de los problemas matemáticos que ella planteó y que en parte han sido ya resueltos posteriormente. Para la geometría abre nuevos horizontes y el mismo Einstein ha dado los pasos iniciales al estudiar con detalle las diferentes clases de derivación covariante e interesantes nuevas relaciones tensoriales que aparecen, como la generalización a estos espacios de las clásicas identidades de Bianchi [27].

Eisenhart [28] ha bautizado estos espacios con el nombre de espacios de Riemann generalizados y varios autores han trabajado sobre ellos, siempre desde el punto de vista matemático, puesto que hoy por hoy la última teoría de Einstein no pasa de ser una teoría puramente matemática. Los resultados más profundos son los debidos a Tonnelat [29] y sobre todo a Hlavaty [30] y Lichnerowicz [31].

Resumiendo este rápido recorrido, podríamos decir que la influencia de Einstein en el campo matemático ha quedado patente en dos aspectos: a) Como perfeccionador del cálculo tensorial, que si bien no inventó, fué el primero en utilizarlo con soltura y elegancia, y quien puso en evidencia la importancia del mismo en los fundamentos de la física; b) Como impulsor de los estudios geométricos, al señalar el interés de los mismos para crear esquemas que pudieran utilizarse para el problema de la unificación de los campos. Sus ensayos de teorías unitarias son modelos de geometrías diversas que prueban cómo su fino espíritu de físico iba acompañado de la más brillante imaginación geométrica.

Bibliografía

[1] Harish-Chandra: On relativistic wave equations. *Phys. Rev.*, 1947, *71*.

[2] Christoffel, E. B.: Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grade, *Crelle's J.*, 1869, *70*.

[3] Ricci, G., Levi-Civita, T.: Méthodes de Calcul differentiel absolu et leurs applications. *Math. Ann.*, 1901, *54*.

[4] Fialkow, A.: Einstein spaces in a space of constant curvature, *Proc. Nat. Acad.*, 1938; Totally geodesic Einstein spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1939, *45*.

[5] Haantjes, J., Wrona, W.: Ueber Konformeuklidische und Einsteinsche Raume gerader dimensionen. *Proc. Kon. Akad. Amsterdam*, 1939, *42*.

[6] Wrona, W.: Conditions nécessaires et suffisantes qui determinent les espaces einsteiniens conformement euclidiens et de courbure constante. *Ann. Soc. Polonaise Math.*, 1947, *20*.

[7] Yano, K.: Conformal and concircular geometries in Einstein spaces. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 1943, *19*.

[8] Kuiper, N. H.: Einstein spaces and connections I, II. *Proc. Kon. Akad. Amsterdam*, 1950, *53*.

[9] Tachibana, S.: On pseudo-parallelism in Einstein spaces. *Tonoku Math. J.*, 1951.

[10] Gödel, K.: Rotating universes in general relativity theory. *Proc. of the International Congress of Math.*, 1950, *1*, Cambridge, 1952.

[11] Einstein-Mayer: Einheitliche Theorie von Gravitation und Elektrizität. *Sitz. Preuss. Akad. Berlin*, 1931.

[12] Einstein-Bergmann, P.: On a generalization of Kaluza's theory of electricity. *Ann. of Math.*, 1938, *39*.

[13] Hoffmann, B.: A generalization of the Kaluza-Klein field theory. *The Quart. J. of. Math.*, 1936, *7*.

[14] Yano-Ohgane: On unified field theories. *Ann. of Math.*, 1952, *55*, On six dimensional unified field theories. *Rendiconti di Mat.*, 1954, *13*.

[15] Podolanski, J.: Unified field theory in six dimensions. *Proc. Roy. Soc. London*, 1950, *201*.

[16] Thiry, Y.: Etude mathématique des équations

d'une théorie unitaire à 15 variables de champ. *J. Liouville*, 1951, *30*.

[17] VEBLEN, O.: *Projektive Relativitätstheorie*, Berlin, 1933.

[18] JORDAN, P.: *Schwerkraft und Weltall*, Braunschweig, 1952.

[19] LUDWIG, G.: *Fortschritte der projektiven Relativitätstheorie*. Braunschweig, 1951.

[20] SCHAFFHAUSER-GRAF, E.: Versuch einer 4-dimensionalen einheitliches Feldtheorie. *J. Rat. Mech. and Analysis*, 1953, *2*.

[21] HORVATH, J.: A geometrical model for the unified theory of physical fields. *Phys. Rev*. 1950, *80*.

[22] INGRAHAM, R. L.: Conformal relativity. *Proc. Nat. Acad. U. S. A.*, 1952, *38*. Conformal relativity. *Nuovo Cimento*, 1952, *9*.

[23] HOFFMANN, B.: The gravitational, electromagnetic and vector meson fields and the similarity geometry. *Phys. Rev.*, 1948, *73*.

[24] WEYL, H.: *Raum, Zeit, Materie*, Berlin, 1921.

[25] EDDINGTON, A.: *The mathematical theory of relativity*, Cambridge Univ. Press, 1923.

[26] CARTAN, E.: Sur les varietés à connexion affine et la théorie de la relativité generalisé. *Ann. Ecole Normale*, 1925, *42*.

[27] EINSTEIN, A.: The Bianchi identities in the generalized theory of gravitation. *Canadian J. of Math*. 1950, *2*.

[28] EISENHART, L. P.: Generalized riemann spaces I, II. *Proc. Nat. Acad*. 1951-52, *37*, *38*.

[29] TONNELAT, M. A.: La solution génerale des équations d'Einstein. *J. de Physiques*, 1955, *16*.

[30] HLAVATY, V.: The elementary basic principles of the unified theory of relativity A, B, C. *J. Rational Mech. and Analysis*, 1952-54, *1*, *2*, *3*.

[31] LICHNEROWICZ, A.: *Théories relativistes de la gravitation et de l'electromagnetisme*, Masson, Paris, 1955.

[32] EINSTEIN, A., BARGMANN, V.: Bivector fields *I y II*. *Ann. of Math.*, 1944, *45*, 1-23.

CIENCIA Y POLITICA

Carta de Einstein al señor ministro Rocco, en Roma

Distinguido señor y honorable colega:

Dos de los hombres más importantes y más conocidos de la ciencia italiana se han dirigido a mí con su problema de conciencia, pidiéndome que le escriba a fin de evitar, en lo posible, una cruel amenaza que pesa sobre los sabios italianos. Se trata de una fórmula de juramento de fidelidad al régimen fascista. Le ruego quiera dar al señor Mussolini el consejo de liberar de esta humillación a la flor de la inteligencia italiana.

Por diferentes que puedan ser nuestras convicciones políticas, yo sé que hay un punto fundamental que me une a usted: ambos vemos y estimamos como bienes más preciosos los florecimientos del desarrollo intelectual europeo. Éstos reposan sobre la libertad de opinión y de enseñanza, sobre el principio de que el esfuerzo por la verdad debe tener prioridad sobre todo otro esfuerzo. Es sobre esta única base que nuestra civilización ha podido nacer en Grecia y reaparecer en Italia en la época del Renacimiento. Estos grandes bienes han sido pagados con sangre de mártires, de hombres grandes y puros: gracias a ellos la Italia contemporánea es todavía amada y honrada. Está lejos de mi pensamiento discutir con usted sobre las justificaciones que las razones de estado puedan aportar a los atentados a la libertad humana.

Pero el esfuerzo hacia la verdad científica, separado de los intereses prácticos de todos los días, debiera ser sagrado para toda autoridad pública y es, para todos, del más alto interés que a los servidores leales de la verdad se los deje en paz. Éste es también el interés del Estado Italiano, y de su prestigio en el mundo.

Esperando que mi pedido encuentre favorable acogida, me repito su servidor.

Albert Einstein.