

UNA DEMOSTRACION DE LA PROPIEDAD ISOPERIMETRICA DEL CIRCULO

POR

L. A. SANTALÓ

RESUMEN: Una nueva demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo, en el plano y sobre la esfera, deducida de una fórmula de Crofton de la teoría de Probabilidades geométricas y de otra fórmula de Geometría integral.

Sea en el plano una figura convexa K de área F y perímetro L .

Llamando ω al ángulo bajo el cual se ve esta figura desde un punto exterior $P(\xi, \eta)$, o sea, el ángulo que forman las dos rectas de apoyo ⁽¹⁾ trazadas por este punto (fig. 1), tiene lugar la siguiente fórmula integral de Crofton ⁽²⁾:

$$\int (\omega - \text{sen } \omega) d\xi d\eta = \frac{1}{2} L^2 - \pi F \quad [1]$$

extendida la integración a todo punto exterior a la figura K .

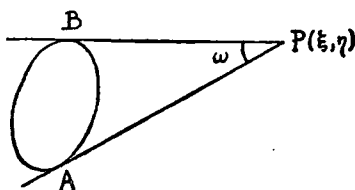


FIG. 1.

Por otra parte, sea en el mismo plano anterior otra figura K_1 congruente con K pero de posición variable. Su posición quedará

(¹) Se llama recta de apoyo a toda recta que tiene por lo menos un punto común con la figura convexa y la deja toda a un mismo lado. Coincide con la tangente cuando ésta existe.

(²) Esta fórmula se puede ver, por ej., en: *Encyclopedie des Sciences mathématiques. Edition française. Calcul des probabilités*. T. I, vol. 4, pág. 26. También en DELTHEIL: *Probabilités géométriques*, París, 1926, y en BLASCHKE: *Vorl. über Integralgeometrie*, erstes Heft, pág. 18.

determinada fijando uno de sus puntos $O_1(x, y)$ y un giro α alrededor de este punto. Entonces se verifica que la integral $\int dx dy d\alpha$ extendida a todas las posiciones en que K_1 tiene algún punto común con K , es independiente de la posición del punto O_1 (invariablemente unido a K_1) y vale ⁽³⁾:

$$M = \int dx dy d\alpha = 4 \pi F + L^2 \quad [2]$$

El objeto de esta nota es ver cómo de [1] y [2] se puede deducir la desigualdad isoperimétrica fundamental del círculo, o sea que $L^2 \geq 4 \pi F$, siendo la igualdad sólo válida para el círculo.

En 3 exponemos brevemente cómo la misma demostración sirve para establecer la desigualdad isoperimétrica para figuras esféricas.

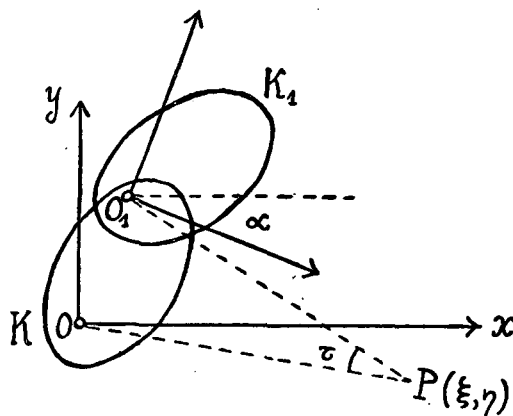


FIG. 2.

1. DESIGUALDAD ISOPERIMÉTRICA. — La posición de K_1 puede también determinarse a partir de la posición fija de K , por el centro $P(\xi, \eta)$ y el ángulo τ de la rotación que lleva una figura sobre la otra (fig. 2). Las coordenadas x, y de O_1 en función de las ξ, η del centro de rotación son

$$\begin{aligned} x &= (1 - \cos \tau) \xi + \sin \tau \cdot \eta \\ y &= -\sin \tau \cdot \xi + (1 - \cos \tau) \eta \\ \alpha &= \tau \end{aligned}$$

de donde

$$M = \int dx dy d\alpha = 4 \int \sin^2 \frac{\tau}{2} d\xi d\eta d\tau \quad [3]$$

⁽³⁾ Ver BLASCHKE: *Vorl. über Integralgeometrie I*, pág. 30.

Veamos de integrar esta segunda integral a todas las posiciones en que K_1 tiene algún punto común con K . Cuando $P(\xi, \eta)$ sea interior a K , el ángulo τ puede variar de 0 a 2π , luego una primera parte de esta integral es

$$\int_{P < K} d\xi d\eta \cdot 4 \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{\tau}{2} d\tau = 4\pi F \quad [4]$$

puesto que

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{\tau}{2} d\tau = \pi$$

Para P exterior a K , llamando β_1 y β_2 a los ángulos que puede

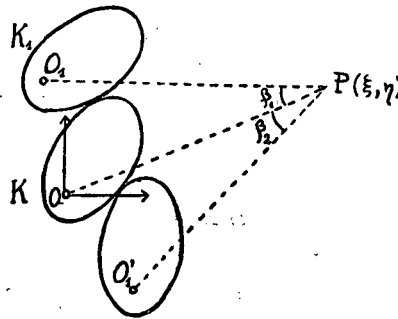


FIG. 3.

girar PO hasta que K_1 deja de cortar a K (fig. 3), es

$$\int_0^{\beta_1} \sin^2 \frac{\tau}{2} d\tau = \frac{\beta_1}{2} - \sin \frac{\beta_1}{2} \cos \frac{\beta_1}{2}$$

$$\int_0^{\beta_2} \sin^2 \frac{\tau}{2} d\tau = \frac{\beta_2}{2} - \sin \frac{\beta_2}{2} \cos \frac{\beta_2}{2}$$

cuya suma vale:

$$\frac{\beta_1 + \beta_2}{2} - \sin \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \cos \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \quad [5]$$

Se observa que si se hace girar, con centro P , el conjunto de las dos figuras K y K_1 tal como están en la fig. 3 hasta que K_1 se superponga con K , PO_1 se superpondrá con PO y PO con PO'_1 , es decir $\beta_1 = \beta_2$.

Con esto, llamando $\beta_1 + \beta_2 = \varphi$, la integral M quedará, sumando el valor [4] correspondiente a las posiciones en que P es interior, con [5] correspondiente a P exterior:

$$M = 4 \pi F + 4 \int \left(\frac{\varphi}{2} - \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \right) d\xi d\eta$$

Comparando con [2], queda:

$$\int_{P \notin K} \left(\frac{\varphi}{2} - \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \right) d\xi d\eta = \frac{L^2}{4} \quad [6]$$

Esto, por sí solo, representa una fórmula integral curiosa. Repetamos: φ representa el ángulo que puede girar con centro $P(\xi, \eta)$ la figura K conservando punto común con su posición primitiva; la integración extendida a todos los puntos exteriores a K .

Siendo el ángulo ω que figura en la fórmula de Crofton [1] el formado por las dos rectas de apoyo que pasan por P , es

$$\omega \geq \frac{\varphi}{2} \quad [7]$$

donde la igualdad vale solamente cuando las longitudes PA y PB de las dos rectas de apoyo son iguales. De aquí

$$\omega - \operatorname{sen} \omega \geq \frac{\varphi}{2} - \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \quad [8]$$

y por tanto, integrando a todo punto exterior a K , y teniendo en cuenta los valores [1] y [6] de estas integrales, se deduce

$$\frac{1}{2} L^2 - \pi F \geq \frac{1}{4} L^2$$

de donde

$$L^2 \geq 4 \pi F \quad [9]$$

2. UNICIDAD ⁽⁴⁾. — Hay que ver en qué casos valdrá en [9] el signo igual.

⁽⁴⁾ Debo agradecer al señor B. Levi por simplificaciones en esta demostración de la unicidad.

Se observa que en [7] la igualdad vale solamente cuando las rectas de apoyo que pasan por P son iguales, en el caso de tener punto de contacto único, o bien, si son rectas de apoyo que contienen un segmento del contorno de K , éstos son tales que al girar una recta de apoyo alrededor de P hasta superponerse con la otra, dichos segmentos tienen punto común.

La igualdad en [9] tendrá lugar, por tanto, solamente cuando esta misma condición se cumpla para todo punto exterior salvo, a lo sumo, para un conjunto de puntos de área nula.

Se observa en primer lugar que el contorno de la figura K no puede contener ningún segmento. En efecto, es sabido que en toda figura convexa, a cada dirección θ considerada con sentido de 0 a 2π ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) corresponde una recta de apoyo única, y supongamos que para una cierta dirección θ_1 esta recta contuviera un segmento $A B$. Habrá un torno de θ_1 para el cual las rectas de apoyo tengan el punto de contacto tan próximo como se quiera de A . Sobre estas rectas y a partir de A habrá, pues, unos segmentos de puntos desde los cuales la recta de apoyo que va hacia A tendrá una longitud que puede ser tan pequeña como se quiera, mientras que la segunda recta de apoyo, tendrá el punto de contacto más allá de B , o sea será de longitud mayor que la distancia de B a la proyección del punto sobre $B A$. Habrá, pues, un área de puntos con rectas de apoyo distintas y por tanto no podría tener lugar la igualdad en [9].

Eliminado el caso de segmentos en el contorno, sólo queda considerar el caso en que todas las rectas de apoyo tienen un punto de contacto único. En este caso si hubiera un solo punto exterior desde el cual las rectas de apoyo tuvieran longitudes distintas, por continuidad de la longitud de las mismas, habría un entorno de este punto con la misma propiedad, luego basta considerar el caso en que las rectas de apoyo de todos los puntos exteriores son iguales. Sea P un punto exterior y $P A$ y $P B$ las rectas de apoyo que pasan por él, siendo $P A = P B$. Toda otra recta de apoyo determinará sobre estas dos rectas dos puntos M y N , y su punto de contacto C debe ser tal que $M C = M A$, $N C = N B$. Es decir $M N = M A + N B$. Pero la envolvente de las rectas que cumplen esta condición es una circunferencia.

3. DESIGUALDAD ISOPERIMÉTRICA SOBRE LA ESFERA. — 1. La misma demostración anterior subsiste para establecer la desigualdad isoperimétrica sobre la superficie de la esfera. Para ello basta observar que las fórmulas de partida son ahora:

a) *Fórmula de Crofton sobre la esfera.* — La fórmula [1] se conserva casi sin modificación cuando se trata de una figura convexa ^(*) sobre la superficie de una esfera. Se puede suponer la esfera de radio unidad. En este caso el ángulo ω será el que forman dos círculos máximos de apoyo de la figura convexa que se cortan en un punto exterior P , y en lugar del elemento de área plana $d\xi d\eta$ figurará ahora el elemento de área sobre la esfera unidad, que representaremos por $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$, siendo θ, φ las coordenadas esféricas del punto P . Para que desaparezca toda ambigüedad, los puntos diametralmente opuestos se considerarán equivalentes y deberán venir contados uno solo de ellos en la integración de [1]. La demostración de esta fórmula [1] para la esfera, es idéntica a la seguida por Blaschke ^(*) para el caso del plano, con sólo tener presente que si $d\Omega_1$ y $d\Omega_2$ son los elementos de área correspondientes a los polos de dos círculos máximos que se cortan bajo un ángulo ω , y $d\Omega$ representa el elemento de área de un extremo del diámetro de intersección de estos círculos máximos, vale (véase la demostración en la NOTA al final)

$$d\Omega_1 d\Omega_2 = \sin \omega d\Omega d\alpha_1 d\alpha_2 \quad [10]$$

siendo α_1 y α_2 los ángulos que forman estos círculos máximos alrededor de su diámetro de intersección y a partir de otro círculo máximo de referencia. Con esto, y teniendo en cuenta que la *medida* de los círculos máximos que cortan a una figura convexa de la esfera es igual a su longitud, vale, análogamente al plano

$$\int (\omega - \sin \omega) d\Omega = \frac{1}{2} L^2 - \pi F \quad [11]$$

extendida la integración a todos los puntos exteriores a K , contando una sola vez los diametralmente opuestos.

b) *Fórmula [2] para la esfera.* — Para el caso de la esfera de radio unidad, sustituyendo en la fórmula [2] en lugar del elemento de área plana $dx dy$, el elemento de área esférica $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ de un punto invariablemente unido a la figura K_1 congruente con K

^(*) Sobre la esfera, una línea cerrada se dice convexa, cuando no puede ser cortada por un círculo máximo en más de dos puntos.

^(*) BLASCHKE: *Vorlesungen über Integralgeometrie I*, pág. 18.

y móvil sobre la esfera, la integral M extendida a todas las posiciones en que estas dos figuras tienen un punto común, vale (*)

$$M = \int d\Omega d\alpha = L^2 - F^2 + 4\pi F \quad [12]$$

2. *Isoperimetría.* — Hay que expresar ahora la fórmula diferencial que figura bajo el signo integral en M en función del elemento de área $d\Omega_0$ del extremo del eje de la rotación que lleva K_1 a coincidir con K y del elemento $d\tau$ de esta rotación. Se encuentra que es (véase la demostración en la NOTA al final)

$$d\Omega d\alpha = 4 \sin^2 \frac{\tau}{2} d\Omega_0 d\tau \quad [13]$$

Con esto se puede repetir exactamente lo mismo que en el caso del plano, llegándose a la integral correlativa a la [6] que será ahora

$$\int_{P \leftarrow K} \left(\frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right) d\Omega_0 = \frac{1}{4} (L^2 - F^2) \quad [14]$$

También se tiene

$$\omega - \sin \omega \geq \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2}$$

e integrando a todos los puntos exteriores a K (contando una sola vez los situados en los extremos de un diámetro) y teniendo en cuenta [11] y [14] queda

$$\frac{1}{2} L^2 - \pi F \geq \frac{1}{4} (L^2 - F^2)$$

que se puede poner en la forma

$$L^2 + (2\pi - F)^2 \geq 4\pi^2 \quad [15]$$

que es como suele escribirse la desigualdad isoperimétrica para el caso de figuras sobre la esfera unidad (*).

(*) BLASCHKE: *Vorl. Integralgeometrie II*, pág. 82.

(*) Ver, por ej., F. BERNSTEIN: *Ueber die isoperimetrische Eigenschaft des Kreise auf der Kugeloberfläche und in der Ebene*. Math. Ann. 60, 1905.

Si se trata en general de una esfera de radio R será, evidentemente

$$\left(\frac{L}{R}\right)^2 + \left(2\pi - \frac{F}{R^2}\right)^2 \geq 4\pi^2 \quad [16]$$

La unicidad, o sea, la demostración de que el círculo es la única figura para la cual vale la igualdad en la expresión anterior, es la misma que para el plano.

NOTA

1. DEMOSTRACIÓN DE LA FÓRMULA [10]. — Sean P_1 y P_2 los polos de dos círculos máximos, cuyas coordenadas esféricas sean θ_i, φ_i ($i = 1, 2$) (fig. 4). Estos dos círculos máximos pueden determinarse también por un extremo P (θ, φ) de su diámetro de intersección y los ángulos α_1 y α_2 que forman los círculos máximos PP_1 y PP_2 con otro círculo máximo de referencia PZ . Siendo $d\Omega = \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$, nuestro objeto es expresar la forma diferencial $d\Omega_1 \cdot d\Omega_2$ en función de las cuatro nuevas variables $\theta, \varphi, \alpha_1, \alpha_2$.

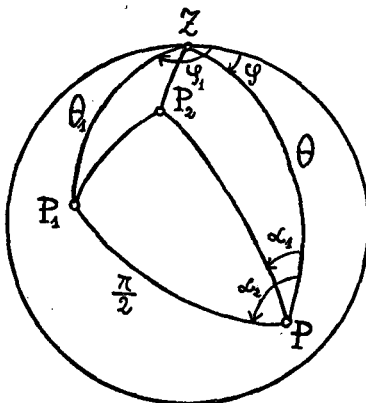


FIG. 4.

Para ello se observa en la fig. 4 que en el triángulo rectilátero ZP_1P , en el cual es $ZP_1 = \theta_1$, $PP_1 = \frac{\pi}{2}$, $ZP = \theta$, $P_1ZP = \varphi_1 - \varphi$, $P_1PZ = \alpha_1$, se tiene:

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \sin \theta \cos \alpha_1 \\ \sin \theta_1 \sin (\varphi_1 - \varphi) &= \sin \alpha_1 \end{aligned} \quad [17]$$

y análogamente en el triángulo rectilátero P_2ZP :

$$\begin{aligned} \cos \theta_2 &= \sin \theta \cos \alpha_2 \\ \sin \theta_2 \sin (\varphi_2 - \varphi) &= \sin \alpha_2 \end{aligned} \quad [18]$$

Estas fórmulas [17] y [18] son las fórmulas de transformación que ligan las cuatro variables $\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2$ con las nuevas $\theta, \varphi, \alpha_1, \alpha_2$.

Diferenciando las igualdades [17] y [18] se obtiene

$$\begin{aligned} -\operatorname{sen} \theta_1 d\theta_1 &= \cos \theta \cos \alpha_1 d\theta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha_1 d\alpha_1 \\ \cos \theta_1 \operatorname{sen} (\varphi_1 - \varphi) d\theta_1 + \operatorname{sen} \theta_1 \cos (\varphi_1 - \varphi) d\varphi_1 &= \operatorname{sen} \theta \cos (\varphi_1 - \varphi) d\varphi + \cos \alpha_1 d\alpha_1 \\ -\operatorname{sen} \theta_2 d\theta_2 &= \cos \theta \cos \alpha_2 d\theta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha_2 d\alpha_2 \\ \cos \theta_2 \operatorname{sen} (\varphi_2 - \varphi) d\theta_2 + \operatorname{sen} \theta_2 \cos (\varphi_2 - \varphi) d\varphi_2 &= \operatorname{sen} \theta \cos (\varphi_2 - \varphi) d\varphi + \cos \alpha_2 d\alpha_2 \end{aligned}$$

Multipliquemos miembro a miembro estas cuatro igualdades según las reglas de la *multiplicación exterior* (*) de formas diferenciales, es decir, con el convenio de que: 1° El producto de dos diferenciales iguales es cero; 2° Al permutar el orden de dos diferenciales cambia el signo. Con esto se obtiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \theta_1 \operatorname{sen}^2 \theta_2 \cos (\varphi_1 - \varphi) \cos (\varphi_2 - \varphi) d\theta_1 d\varphi_1 d\theta_2 d\varphi_2 = \\ [-\cos \theta \operatorname{sen} \theta \cos \alpha_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos (\varphi_2 - \varphi) \operatorname{sen} \alpha_2 \cos \alpha_1 + \\ + \cos \theta \operatorname{sen} \theta \cos \alpha_2 \operatorname{sen} \theta_1 \cos (\varphi_1 - \varphi) \operatorname{sen} \alpha_1 \cos \alpha_2] d\theta d\varphi d\alpha_1 d\alpha_2 \end{aligned} \quad [19]$$

En los mismos triángulos rectiláteros de antes, se tiene también:

$$\cos \theta \cos \theta_1 + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta_1 \cos (\varphi_1 - \varphi) = 0 \quad [20]$$

y la fórmula análoga al sustituir el índice 1 por 2.

Con esta [20] y recordando el valor del elemento de área esférica $d\Omega$, la expresión [19] se puede escribir

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta \cos^2 \theta_1 \cos \theta_2 d\Omega_1 d\Omega_2 = \cos^2 \theta [-\operatorname{sen} \theta \cos \theta_1 \cos \alpha_2 \operatorname{sen} \alpha_2 \cos \alpha_1 + \\ + \operatorname{sen} \theta \cos \theta_2 \cos \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_1 \cos \alpha_2] d\Omega d\alpha_1 d\alpha_2 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las primeras igualdades de [17] y [18], esta expresión nos da finalmente:

$$d\Omega_1 \cdot d\Omega_2 = \operatorname{sen} (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot d\Omega d\alpha_1 d\alpha_2$$

que es la expresión [10] buscada.

2. DEMOSTRACIÓN DE LA FÓRMULA [13]. — Sean sobre la superficie esférica unos ejes coordenados curvilíneos (dos arcos de círculo máximo perpendiculares) primitivamente en Z (fig. 5), y que, por una rotación alrededor del centro P , pasan a Z_1 . Sean θ_1 y φ_1 las coordenadas de Z_1 y θ, φ las de P . Es decir, fijada una dirección ZE por Z , es:

$$ZZ_1 = \theta_1, \quad EZZ_1 = \varphi_1, \quad ZP = Z_1P = \theta, \quad EZP = \varphi$$

Llamando τ al ángulo girado alrededor de P ($\tau = Z_1PZ$) se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta \cos \tau \\ \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} (\varphi - \varphi_1) &= \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \tau \end{aligned} \quad [21]$$

(*) Ver, por ej., E. CARTAN: *Le principe de la dualité...*, Bull. Soc. Math. de France, 24 (1896). También E. KAHLER: *Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen*, Hamburger Math. Einzelschriften, n° 16; Teubner, Leipzig, 1934.

Si A es el polo del círculo máximo determinado por Z y Z_1 , el ángulo α que habrán girado los ejes coordenados dichos al pasar de Z a Z_1 será el ángulo que forman PZ y ZA , más el análogo e igual que forman PZ_1 y Z_1A , es decir

$$PZA = \frac{\alpha}{2}$$

y como $ZPA = \pi - \frac{\tau}{2}$, el triángulo rectilátero PZA da:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \cos \theta \operatorname{tg} \frac{\tau}{2} \quad [22]$$

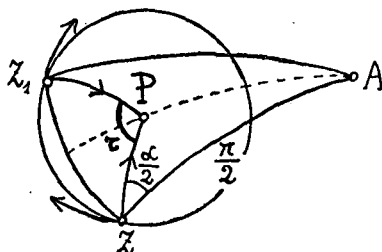


FIG. 5.

Estas expresiones [22] y [21] son las fórmulas de transformación que permiten pasar de las variables $\theta_1, \varphi_1, \alpha$ que fijan los ejes coordenados cuyo centro es Z_1 , a las nuevas variables θ, φ, τ que son las coordenadas del centro de la rotación que lleva a coincidir la posición primitiva de estos ejes (cuando tenían el centro en Z) con la actual, mas el valor de esta misma rotación.

Diferenciando [22] y [21] y multiplicándolas entre sí según las reglas de la multiplicación exterior tal como se ha hecho anteriormente, se obtiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \theta_1 \cos (\varphi - \varphi_1) \left[1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right] d\theta_1 d\varphi_1 d\alpha = \\ = \left\{ 4 \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta_1 \cos (\varphi - \varphi_1) \operatorname{sen}^2 \frac{\tau}{2} \left[1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\tau}{2} \right] \right. \\ \left. + 2 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen} \tau \operatorname{sen} \theta_1 \cos (\varphi - \varphi_1) \operatorname{sen} \theta \operatorname{tg} \frac{\tau}{2} \right\} d\theta d\varphi d\tau \end{aligned}$$

Llamando, como en el texto

$$d\Omega = \operatorname{sen} \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1, \quad d\Omega_0 = \operatorname{sen} \theta d\theta d\varphi$$

esta expresión se puede escribir

$$\left[1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right] d\Omega d\alpha = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\tau}{2} \left[1 + \cos^2 \theta \operatorname{tg}^2 \frac{\tau}{2} \right] d\Omega_0 d\tau$$

y teniendo en cuenta [21], queda finalmente

$$d\Omega d\alpha = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\tau}{2} d\Omega_0 d\tau$$

que es la expresión [13] buscada.

Rosario, Instituto de Matemáticas, Marzo de 1940.