

CURVAS EXTREMALES DE LA TORSION TOTAL Y CURVAS - D

POR

L. A. SANTALÓ

RESUMEN. Curvas D de una superficie son las curvas, estudiadas por Darboux, que en cada uno de sus puntos la esfera osculatriz es tangente a la superficie. En este trabajo se establece que, bajo ciertas condiciones, estas curvas coinciden con las curvas extremales de la torsión total, es decir, con las curvas de una superficie para las cuales es nula la primera variación de la integral $\int \tau ds$, siendo $\tau(s)$ la torsión en cada punto y s el arco.

Se llama *torsión total* de una línea que une dos puntos A y B, a la integral $\mathcal{T} = \int_A^B \tau ds$, siendo $\tau(s)$ la torsión en cada punto y s el arco.

El problema que queremos resolver consiste en hallar las curvas de una superficie que son extremales de esta torsión total, es decir, que anulan a la primera variación de la integral \mathcal{T} . Para ello aplicamos la fórmula de Bonnet⁽¹⁾.

$$\tau = \frac{d\sigma}{ds} + \tau_g$$

que relaciona la torsión τ con la *torsión geodésica* τ_g y la derivada respecto el arco s del ángulo σ que forman en cada punto el plano osculador a la curva y el plano tangente a la superficie. De esta manera debemos estudiar primero las curvas *extremales de la torsión geodésica total*, o sea, de $\mathcal{T}_g = \int_A^B \tau_g ds$.

Encontramos el resultado siguiente: «Las curvas extre-

(¹) Ver por ej. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale* Vol. I pág. 296-298. GOURSAT, *Cours d'Analyse* t. I, pág. 622.

males de la torsión geodésica total coinciden con las curvas-D de la superficie». Se llaman curvas-D de una superficie aquellas que en cada punto su esfera oscultriz es tangente a la superficie; ellas fueron estudiadas por primera vez por Darboux⁽²⁾.

Para adaptar las notaciones de la ecuación de las curvas-D a las convenientes en los cálculos sucesivos, en I obtenemos la ecuación diferencial de las curvas-D respecto el sistema de coordenadas curvilíneas formado por las líneas de curvatura. Este sistema tiene la ventaja de simplificar mucho los cálculos, sobre todo para el problema de cálculo de variaciones que se resuelve en II.

En II aplicando las fórmulas clásicas del cálculo de variaciones se obtiene la ecuación de las curvas extremales de la torsión geodésica total y se ve que esta ecuación coincide con la anterior de las curvas-D. Se buscan luego las restricciones que deben imponerse a las curvas variadas para que estas curvas extremales de la torsión geodésica total lo sean también de la torsión total.

En III se da otra demostración directa del resultado precedente.

En IV aplicamos los resultados anteriores al caso particular de ser la superficie un toro.

I. CURVAS-D.

Hemos dicho que se llaman curvas-D de una superficie aquellas cuya esfera oscultriz es, en cada punto, tangente a la superficie. Vamos a hallar la ecuación de las mismas.

1. Sea $X = X(u, v)$ la ecuación vectorial de la superficie. Una línea de la misma vendrá dada por dos funciones $u = u(t)$, $v = v(t)$ de un parámetro t . Si el punto $Z(t)$ es el centro de la esfera oscultriz a la curva $X = X(u(t), v(t))$ y r el radio, se cumple la condición vectorial

$$(X - Z)^2 = r^2$$

(²) C. R. Acad. Sc. Paris, 1871, pág. 733. Bibliografía sobre estas curvas ver en *Encyklopädie der Math. Wiss.* III, D 3, pág. 181-182.

y p
las
rior

don
acer
es]

deb
vect
sien
prij
V X

nar
de
dos

mi

da

(

y por definición de esfera osculatriz, se deben cumplir también las condiciones obtenidas derivando tres veces la ecuación anterior suponiendo Z y r constantes. Es decir

$$\begin{aligned}(X - Z) X' &= 0 \\ (X - Z) X'' + X'^2 &= 0 \\ 3 X' X'' + (X - Z) X''' &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

donde los productos son productos escalares de vectores y los acentos indican derivadas respecto el parámetro t ; por ejemplo, es $X' = X_u u' + X_v v'$.

Si la curva $X = X(u(t), v(t))$ es curva D , el centro Z debe estar sobre la normal a la superficie, o sea, llamando V al vector unitario normal a la misma, debe ser $Z = X - \lambda V$, siendo λ un parámetro. Sustituyendo esta expresión en (1), la primera ecuación se satisface cualquiera que sea λ por ser $V X' = 0$, y las dos últimas dan

$$\begin{aligned}X'^2 + \lambda V X'' &= 0 \\ 3 X' X'' + \lambda V X''' &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

La ecuación diferencial de las curvas D se obtendrá eliminando λ entre estas dos. Parece que la ecuación resultante es de tercer orden, sin embargo se observa que, derivando $V X' = 0$ dos veces, se obtiene

$$\begin{aligned}V' X' + V X'' &= 0 \\ V'' X' + 2 V' X'' + V X''' &= 0.\end{aligned}$$

De esta última ecuación se deduce $V X'''$ y entonces eliminando λ entre las ecuaciones (2) resulta

$$\frac{3 X' X''}{X'^2} = \frac{2 V' X'' + V'' X'}{V' X'}\tag{3}$$

Esta es la ecuación diferencial de las curvas D en la forma dada por Darboux (3).

(*) DARBOUX. C. R. Acad. Scien. Paris, 1871. Pág. 733.

Para nuestro objeto conviene desarrollar más esta ecuación expresando los elementos que en ella figuran en función de los coeficiente de las dos formas cuadráticas fundamentales de la teoría de superficies.

2. Tomemos por líneas paramétricas $u = \text{conste.}$, $v = \text{cte.}$ las líneas de curvatura de la superficie. Entonces las dos formas fundamentales de la teoría de superficies dan

$$\begin{aligned} X'^2 &= E u'^2 + G v'^2 \\ -V' X' &= L u'^2 + N v'^2 \end{aligned} \quad (4)$$

siendo, como se sabe,

$$E = X_u^2, G = X_v^2, L = -V_u X_u, N = -V_v X_v$$

donde los subíndices indican derivadas parciales.

Derivando la primera de las expresiones (4) se obtiene

$$\begin{aligned} 2 X' X'' &= E_u u'^3 + E_v u'^2 v' + \\ &G_u u' v'^2 + G_v v'^3 + 2 E u' u'' + 2 G v' v'' \end{aligned} \quad (5)$$

y derivando la segunda

$$\begin{aligned} -(V' X'' + V'' X') &= L_u u'^3 + L_v u'^2 v' + N_u u' v'^2 \\ &N_v v'^3 + 2 L u' u'' + 2 N v' v''. \end{aligned} \quad (6)$$

Siendo $u = \text{cte.}$ y $v = \text{cte.}$ las líneas de curvatura (lo cual exige que $X_u X_v = 0$, $V_u X_v = V_v X_u = 0$), expresando los vectores X_{uu} , X_{uv} y X_{vv} por sus componentes respecto el triedro trirectángulo formado por los tres vectores X_u , X_v , V , se obtienen las fórmulas de Gauss:

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \frac{E_u}{2E} X_u - \frac{E_v}{2G} X_v + L V \\ X_{uv} &= \frac{E_v}{2E} X_u + \frac{G_u}{2G} X_v + M V \\ X_{vv} &= -\frac{G_u}{2E} X_u + \frac{G_v}{2G} X_v + N V \end{aligned}$$

y de aqu

$$V_u X_u$$

$$V_v$$

con lo cu

$$\begin{aligned} V' X'' &= \\ + X_v v'' &= \\ - L G G_u & \end{aligned}$$

Suma
relaciones
ducen a

queda

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2EG} [(\\ + (2GN \end{aligned}$$

Con
en la ecu
D que pu
a ($u' v'' -$
siendo

$$a = 6 ($$

$$b = 2 E$$

$$c = 3 ($$

$$d = 3 ($$

$$e = 2 E$$

(*) Ver
Lezioni di

y de aquí

$$\begin{aligned} V_u X_{uu} &= -\frac{E_u}{2E} L, \quad V_u X_{uv} = -\frac{E_v}{2E} L, \quad V_u X_{vv} = \frac{G_u}{2E} L, \\ V_v X_{uu} &= \frac{E_v}{2G} N, \quad V_v X_{uv} = -\frac{G_u}{2G} N, \quad V_v X_{vv} = -\frac{G_v}{2G} N \end{aligned} \quad (7)$$

con lo cual se tiene

$$\begin{aligned} V' X'' &= (V_u u' + V_v v') (X_{uu} u'^2 + 2 X_{uv} u' v' + X_{vv} v'^2 + X_u u'' \\ &+ X_v v'') = -\frac{1}{2EG} [GLE_u u'^3 + (2GLE_v - NE E_v) u'^2 v' + (2ENG_u \\ &- LG G_u) u' v'^2 + ENG_v v'^3] - L u' u'' - N v' v''. \end{aligned}$$

Sumando esta expresión con (6) y teniendo en cuenta las relaciones de Mainardi-Codazzi (4) que en nuestro caso se reducen a

$$\begin{aligned} 2 E G L_v &= (E N + G L) E_v \\ 2 E G N_u &= (E N + G L) G_u \end{aligned} \quad (8)$$

queda

$$\begin{aligned} 2 V' X'' + V'' X' &= \\ -\frac{1}{2EG} [(2 E L_u + L E_u) G u'^3 + 3 G L E_v u'^2 v' + 3 E N G_u u' v'^2 \\ + (2 G N_v + N G_v) E v'^3] - 3 L u' u'' - 3 N v' v''. \end{aligned} \quad (9)$$

Con las expresiones (9), (5), (4) obtenidas, sustituyendo en la ecuación (3) se obtiene la ecuación buscada de las curvas D que puede escribirse en la forma

$$a (u' v'' - v' u'') u' v' + b u'^5 + c u'^3 v'^2 + d u'^2 v'^3 + e v'^5 = 0 \quad (10)$$

siendo

$$\begin{aligned} a &= 6 (G L - E N) E G \\ b &= 2 E G (L E_u - E L_u) \\ c &= 3 (E G_u - G E_u) (G L - E N) + 2 G^2 (L E_u - E L_u) \\ d &= 3 (E G_v - G E_v) (G L - E N) + 2 E^2 (N G_v - G N_v) \\ e &= 2 E G (N G_v - G N_v) \end{aligned} \quad (11)$$

(4) Ver por ej. BLASCHKE, *Differentialgeometrie I* pág. 117. BIANCHI, *Lezioni di Geom. differenziale* Vol. 1, pág. 175.

II. CURVAS EXTREMALES DE LA TORSIÓN TOTAL.

1. *Expresión de la torsión total.* 1. Sea $\tau(s)$ la torsión de una línea sobre una superficie y $\sigma(s)$ el ángulo que forma su plano osculador con el plano tangente a la superficie. Representando por R_1 y R_2 los radios principales de curvatura y por ω el ángulo que forma la tangente a la línea considerada con la primera dirección principal (aquella según la cual el radio de curvatura es R_1), se verifica la fórmula de Bonnet ⁽⁵⁾

$$\tau = \frac{d\sigma}{ds} + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \operatorname{sen} \omega \cos \omega. \quad (12)$$

El segundo sumando de esta expresión es la llamada *torsión geodésica*.

Consideremos, como en el número anterior, la superficie $X(u, v)$ referida a sus líneas de curvatura como líneas paramétricas. Entonces, es sabido ⁽⁶⁾ que los valores de los radios de curvatura principales en función de los coeficientes de las dos formas cuadráticas fundamentales (4) son

$$\frac{1}{R_1} = \frac{L}{E} \quad \frac{1}{R_2} = \frac{N}{G} \quad (13)$$

Además, la dirección de la tangente a la línea considerada es la del vector $X_u u' + X_v v'$, luego el ángulo ω que forma con las tangentes X_u y X_v a las direcciones principales está determinado por

$$\operatorname{sen} \omega = \frac{(X_u u' + X_v v') X_v}{[X_v^2 (X_u u' + X_v v')^2]^{1/2}} = \frac{G v'}{[G (E u'^2 + G v'^2)]^{1/2}}$$

$$\operatorname{cos} \omega = \frac{(X_u u' + X_v v') X_u}{[X_u^2 (X_u u' + X_v v')^2]^{1/2}} = \frac{E u'}{[E (E u'^2 + G v'^2)]^{1/2}}$$

Con estos valores y (13), el valor de la torsión τ toma la forma

⁽⁵⁾ Ver por ej. BIANCHI, *Lezioni di Geom. differenziale* Vol. I, pág. 296-8. GOURSAT, *Cours d'Analyse* tomo I, pág. 622.

⁽⁶⁾ Por ej. BLASCHKE, *Differentialgeometrie I* pág. 95.

$$\tau = \frac{ds}{ds} + \frac{GL - EN}{\sqrt{EG}} \cdot \frac{u'v'}{Eu'^2 + Gv'^2} \quad (14)$$

2. Consideremos una curva de la superficie que una dos puntos A y B de la misma. Llamando σ_A y σ_B a los ángulos que forman en ellos el plano osculador a la curva y el plano tangente a la superficie, la *torsión total* del arco de curva será (puesto que $ds^2 = Eu'^2 + Gv'^2$)

$$\mathcal{T} = \int_A^B \tau ds = \sigma_B - \sigma_A + \int_A^B \frac{GL - EN}{\sqrt{EG}} \cdot \frac{u'v'}{[Eu'^2 + Gv'^2]^{1/2}} dt \quad (15)$$

El ángulo $\sigma_B - \sigma_A$ es el incremento del ángulo σ al pasar de A a B y puede, por tanto, ser mayor que 2π .

2. *Curvas extremales de la torsión geodésica total.* — 1. Consideremos primero el último sumando de (15) o sea la torsión geodésica total entre A y B. Queremos hallar las curvas para las cuales esta torsión geodésica total

$$\mathcal{T}_g = \int_A^B \frac{GL - EN}{\sqrt{EG}} \frac{u'v'}{[Eu'^2 + Gv'^2]^{1/2}} dt \quad (16)$$

es una extremal.

Se trata de un caso de problema de cálculo de variaciones dado en forma paramétrica. En este caso si $f(u, v, u', v')$ representa abreviadamente la función subintegral, la forma dada por Weierstrass de la ecuación diferencial de las curvas extremales es (7)

$$(u'v'' - v'u'')f_1 + f_{uv'} - f_{vu'} = 0, \quad (17)$$

indicando los subíndices derivadas parciales y siendo

$$f_1 = \frac{f_{u'u'}}{v'^2} = -\frac{f_{u'v'}}{u'v'} = \frac{f_{v'v'}}{u'^2}$$

(7) Ver por ej. TONELLI, *Fondamenti di calcolo delle variazioni* Vol. II, pág. 96. GOURSAT, *Cours d'analyse* t. III, pág. 630.

En nuestro caso es

$$f_1 = -3 \sqrt{EG} (GL - EN) (Eu'^2 + Gv'^2)^{-5/2} u'v'$$

$$f_{uv} = -\frac{1}{2} (EG)^{-3/2} (Eu'^2 + Gv'^2)^{-5/2} \left\{ (Eu'^2 + Gv'^2) [(EN + GL)(GE_u - EG_u) + 2EG(EN_u - GL_u)] Eu'^3 + (EN - GL) [(2GE_u - 3EG_u) u'^3 v'^2 - EE_u u'^5] EG \right\}.$$

$$f_{vv} = \frac{1}{2} (EG)^{-3/2} (Eu'^2 + Gv'^2)^{-5/2} \left\{ (Eu'^2 + Gv'^2) [(EN + GL)(EG_v - GE_v) + 2EG(GL_v - EN_v)] Gv'^3 + (GL - EN) [(2EG_v - 3GE_v) u'^2 v'^3 - GG_v v'^5] EG \right\}$$

Sustituyendo estos valores en (17) y simplificando (teniendo además en cuenta las relaciones de Mainardi-Codazzi (8)) se obtiene la ecuación

$$a(u'v'' - v'u'')u'v' + bu'^5 + cu'^3v'^2 + du'^2v'^3 + ev'^5 = 0 \quad (10)$$

siendo los valores de los coeficientes los mismos dados en (11).

Se obtiene pues:

Las curvas extremales de la torsión geodésica total, coinciden con las curvas D de la superficie.

El estudio de las curvas extremales de la torsión geodésica total se reduce por tanto al de las curvas-D. Por ser (10) de segundo orden, dentro de una cierta región de la superficie quedará determinada la curva extremal dando los extremos o bien dando un punto y la tangente en él. En este último caso se observa que habrá seguramente curva extremal en cualquier dirección de la tangente menos, tal vez, para las direcciones principales $u' = 0$, $v' = 0$; para éstas es necesaria una discusión para cada superficie y para cada punto particular.

2. Veamos si estas curvas extremales de \mathcal{C}_g , dadas por (10), corresponden a un máximo o mínimo. Para ello formemos la función \mathcal{C} de Weierstrass. Representando por $f(u, v; u', v')$ la función subintegral de (16), esta función \mathcal{C} es⁽⁸⁾:

(8) Ver por ej. O. BOLZA *Vorlesungen über Variationsrechnung*. Leipzig und Berlin 1909. Pág. 243.

$$\mathcal{C}(u, v; u', v'; \bar{u}', \bar{v}') = \bar{u}' [f_{u'}(u, v; \bar{u}', \bar{v}') - f_{u'}(u, v; u', v')] + \bar{v}' [f_{v'}(u, v; \bar{u}', \bar{v}') - f_{v'}(u, v; u', v')]$$

En nuestro caso será

$$\mathcal{C}(u, v; u', v'; \bar{u}', \bar{v}') = \frac{GL - EN}{\sqrt{EG}} \left\{ \bar{u}' \left[\frac{G\bar{v}'^3}{W^3} - \frac{Gv'^3}{W^3} \right] + \bar{v}' \left[\frac{E\bar{u}'^3}{W^3} - \frac{Eu'^3}{W^3} \right] \right\} \quad (18)$$

siendo $W = \sqrt{Eu'^2 + Gv'^2}$ y \bar{W} la misma expresión después de sustituir u', v' por \bar{u}', \bar{v}' .

Una condición necesaria⁽⁹⁾ para un *mínimo* (máximo) *fuerte* es que $\mathcal{C} \geq 0$ ($\mathcal{C} \leq 0$) para valores de u, v, u', v' correspondientes a la extremal y para \bar{u}', \bar{v}' valores cualesquiera. Esta condición no se cumple para el valor anterior de \mathcal{C} , pues para un mismo punto u, v, u', v' tomando $\bar{u}' = 0, \bar{v}' > 0$ la función \mathcal{C} tiene el signo del producto $(GL - EN)u'$ y para $\bar{u}' = 0, \bar{v}' < 0$ el signo contrario. Luego:

«Las extremales no son mínimos ni máximos fuertes. Entre las curvas que unen dos puntos de una superficie no existen las que proporcionan un mínimo o máximo fuerte de la torsión geodésica total»⁽¹⁰⁾.

3. En cambio vamos a demostrar que para una región suficientemente limitada y en la cual la diferencia $GL - EN$ sea distinta de cero (supongamos positiva), las extremales de la torsión geodésica total corresponden a un máximo (mínimo) débil mientras se conserve $u'v' > 0$ ($u'v' < 0$).

⁽⁹⁾ O. BOLZA loc. cit. pág. 244.

⁽¹⁰⁾ Recordemos que una extremal $v_0 = v_0(u)$ referida a coordenadas no paramétricas se dice un *mínimo* (máximo) *fuerte* cuando el valor correspondiente de la integral es igual o menor (mayor) que el que toma para cualquier otra curva $v = v(u)$ tal que

$$|v(u) - v_0(u)| < \varepsilon_1$$

siendo ε_1 independiente de u .

En cambio se dice que $v_0 = v_0(u)$ es un *mínimo* (máximo) *débil* cuando se impone a las curvas variadas la segunda condición

$$|v'(u) - v'_0(u)| < \varepsilon_2$$

siendo ε_2 también independiente de u . Ver por ej. BOLZA, loc. cit. pág. 91.

Para la demostración es mejor emplear la forma no paramétrica de la integral (16). Tomando u como variable independiente, queda

$$\mathcal{T}_g = \int_A^B \frac{GL - EN}{\sqrt{EG}} \frac{v'}{\sqrt{E + Gv'^2}} du.$$

La condición necesaria de Legendre para el máximo es ⁽¹¹⁾ $f_{v'v'} < 0$ a lo largo de la extremal (siendo f la función subintegral). En nuestro caso es

$$f_{v'v'} = -3\sqrt{EG}(GL - EN) \frac{v'}{(E + Gv'^2)^{3/2}}$$

Por tanto, suponiendo $GL - EN > 0$, la condición $f_{v'v'} < 0$ se cumplirá mientras sea $v' = \frac{dv}{du} > 0$.

Fijo el origen A de las extremales (10), hay una región suficientemente limitada en un entorno de cualquier extremal que pase por este punto tal que para cada uno de sus puntos pasará una extremal y una sola de origen A . Para esta región la condición anterior de Legendre $f_{v'v'} < 0$ es suficiente ⁽¹²⁾ para asegurar que la curva extremal corresponde a un máximo débil.

3. *Extremos de la torsión total.* Veamos ahora la manera de pasar de las extremales de la torsión geodésica total a las curvas que hacen máxima o mínima la torsión total (15).

1. Supongámonos primero la superficie con solo puntos elípticos, es decir, con curvatura positiva en todos sus puntos. Sean A y B dos puntos de la superficie. La torsión total y la torsión geodésica total de una línea que une A con B están relacionadas por (15)

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_g + \sigma_B - \sigma_A.$$

Considerando solamente curvas con radio de curvatura ρ distinto de cero incluso en los puntos terminales A y B , su plano

⁽¹¹⁾ Ver por ej. HADAMARD, *Leçons sur le Calcul des Variations*. Paris, Hermann 1910. Pág. 325.

⁽¹²⁾ HADAMARD, loc. cit. pág. 397.

osculador no puede coincidir en ningún punto con el tangente a la superficie (pues en tal caso por el teorema de Meusnier el radio de curvatura sería cero) y por tanto el máximo de $\sigma_B - \sigma_A$ es π . Este valor máximo no puede ser alcanzado, puesto que únicamente lo sería para $\sigma_A = 0$, $\sigma_B = \pi$ en cuyo caso el radio de curvatura en los extremos es cero y la curva cae fuera de las consideradas. Con esta observación es fácil demostrar que, dentro de las curvas con $\rho \neq 0$, no hay ninguna que corresponda a un máximo o mínimo de la torsión total ⁽¹³⁾.

En efecto. Supongamos por ejemplo $GL - EN > 0$. En este caso hemos visto que las curvas extremales de \mathcal{T}_g eran máximos débiles (suponiendo que a lo largo de la extremal sea $\frac{dv}{du} > 0$; en caso contrario sería mínimo y el razonamiento sería parecido, observando que el valor mínimo de la torsión total sería $\mathcal{T}_g^0 - \pi$). Sea C_0 la curva extremal de \mathcal{T}_g que une A con B y \mathcal{T}_g^0 el valor correspondiente de \mathcal{T}_g . El valor máximo de \mathcal{T} será $\mathcal{T}_g^0 + \pi$. Este valor no puede ser alcanzado, puesto que \mathcal{T}_g no puede superar a \mathcal{T}_g^0 y para curvas con $\rho \neq 0$ es $\sigma_B - \sigma_A < \pi$.

Sin embargo es posible encontrar curvas cuya torsión total difiera de $\mathcal{T}_g^0 + \pi$ tan poco como se quiera. En efecto, dado ϵ_1 , tomemos sobre la curva C_0 extremal de \mathcal{T}_g dos puntos A_1 y B_1 suficientemente próximos a A y B para que el valor \mathcal{T}_g^1 de la integral (16) de A_1 a B_1 a lo largo de la misma C_0 cumpla la condición

$$\mathcal{T}_g^1 > \mathcal{T}_g^0 - \frac{\epsilon_1}{3}. \quad (19)$$

En A y B tomemos dos planos cuyos ángulos con los tangentes a la superficie cumplan la condición $\sigma_B - \sigma_A = \pi - \frac{\epsilon_1}{3}$. Unamos A con A_1 y B con B_1 mediante dos arcos que tengan en A y B dichos planos como planos osculadores y que en A_1 y B_1 enlacen con la curva C_0 con los mismos planos osculadores. Los puntos A_1 y B_1 se pueden tomar suficientemente próximos a A y B para que, además de cumplirse (19), la suma de las dos integrales (16) de la torsión geodésica de A a A_1 , y de B a B_1 sea, en valor absoluto, menor que $\frac{\epsilon_1}{3}$. La torsión total \mathcal{T} de la curva AA_1B_1B así construida será

$$\mathcal{T} > -\frac{\varepsilon_1}{3} + \mathcal{T}_g^0 - \frac{\varepsilon_1}{3} + \pi - \frac{\varepsilon_1}{3} = \mathcal{T}_g^0 + \pi - \varepsilon_1$$

Tomando una sucesión $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$, que tienda a cero tendremos una sucesión de curvas cuya torsión total tenderá al valor máximo $\mathcal{T}_g^0 + \pi$. Sin embargo este valor no es alcanzado, pues la curva límite tiene en los extremos planos osculadores tangentes a la superficie y por tanto radios de curvatura iguales a cero.

2. Si los puntos A y B que se quieren unir por una extremal de la torsión total son puntos hiperbólicos o parabólicos de la superficie, entonces es posible que el plano osculador en ellos sea tangente a la superficie sin que el radio de curvatura ρ de la curva sea cero. Esto puede ocurrir solamente cuando las tangentes en A y B corresponden a direcciones asintóticas. En este caso las extremales (10) pueden corresponder a un máximo de la torsión total. En cambio, si aun teniendo la superficie puntos hiperbólicos, los A y B son elípticos o en ellos la tangente no tiene una dirección asintótica, se puede repetir el razonamiento del número anterior y se ve que la curva no puede corresponder a un máximo ni mínimo. Es decir: para que una curva C_0 , con $\rho \neq 0$, que une A con B pueda corresponder a un máximo⁽¹³⁾ de la torsión total es necesario que en estos puntos C_0 tenga por tangentes direcciones asintóticas y por planos osculadores los tangentes a la superficie.

4. *Variaciones con planos osculadores fijos en los extremos y curvas extremales cerradas.* 1. Sea, como en el n.º. 3, C_0 la curva extremal de la torsión geodésica total que une dos puntos A y B de una superficie con curvatura continua y positiva. Si se consideran sólo curvas variadas que tengan en A y B los mismos planos osculadores que C_0 , la diferencia $\sigma_B - \sigma_A$ (puesto que no puede ser mayor que π) será la misma para todas estas curvas y por tanto C_0 será también curva extremal de la torsión total. Es decir, para superficies con curvatura positiva en todos sus puntos, vale «*Las curvas-D son extremales de la torsión total entre todas las curvas que unen dos puntos A y B y tienen en ellos los mismos planos osculadores que la curva D considerada*».

⁽¹³⁾ Nos referimos a máximo o mínimo débil. Con mayor razón no es posible que correspondan a un máximo o mínimo fuerte.

Además, según (2, 3): «Para dos puntos A y B suficientemente próximos, la torsión total de la curva D ($v_0 = v_0(u)$) que los une es máxima (suponemos $(GL - EN) \cdot v'_0 > 0$ entre A y B; en caso contrario sería mínima) comparada con las demás curvas $v = v(u)$ que unen los mismos puntos, tienen en ellos los mismos planos osculadores y cumplen las condiciones

$$|v(u) - v_0(u)| < \varepsilon_1, \quad |v'(u) - v'_0(u)| < \varepsilon_2 \quad (20)$$

para todos los puntos del arco AB y para $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ suficientemente pequeños».

2. Si sobre una superficie de curvatura continua y positiva hay una curva D cerrada con torsión continua es $\sigma_B - \sigma_A = 0$ (pues $A \equiv B$) y como para otra curva cerrada cualquiera con torsión continua es también $\sigma_B - \sigma_A = 0$, resulta: «Las curvas D cerradas son extremales de la torsión total».

Observando que todas las curvas de una superficie esférica son curvas D, resulta que la torsión total de las curvas cerradas de una superficie esférica debe tener un valor estacionario. Y en efecto es conocido⁽¹⁴⁾ que la torsión total de las curvas esféricas cerradas es nula. Es fácil, por otra parte, demostrar directamente esta propiedad. En efecto, representando por ρ el radio de curvatura de la curva, el radio de la esfera oscultriz vale⁽¹⁵⁾

$$r^2 = \rho^2 + \left(\frac{\rho'}{\tau}\right)^2$$

siendo $\rho' = \frac{d\rho}{ds}$. De aquí

$$\int_c \tau ds = \int_c \frac{d\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} = \left[\text{arc sen } \frac{\rho}{r} \right]_c$$

y si la curva es cerrada y en todos sus puntos es $\rho \neq 0$, el valor de esta expresión es cero.

⁽¹⁴⁾ W. FENCHEL, *Ueber einen Jacobischen Satz der Kurventheorie*. Tohoku Math Journal, vol. 30 (1934). Esta propiedad caracteriza, además, a la superficie esférica, en el sentido que: «Toda superficie con curvatura de Gauss continua en todos sus puntos y tal que la torsión total de todas las líneas cerradas de la misma sea igual a cero, es una esfera o una parte de superficie esférica». Ver, L. A. SANTALÓ, *Algunas propiedades de las curvas esféricas y una característica de la esfera*. Rev. Mat. Hispano-Americana, Vol. X, 1935.

⁽¹⁵⁾ Ver por ej. BLASCHKE, *Differentialgeometrie I* pág. 33.

3. Si la superficie tiene regiones con curvatura negativa no puede asegurarse que las curvas extremales de la torsión geodésica total lo sean también de la torsión total, aun suponiendo sólo como posibles curvas variadas con los mismos planos osculadores en los extremos. En efecto, en este caso podría ocurrir que para curvas «próximas» que cumplan las condiciones (20), la diferencia $\sigma_B - \sigma_A$ difiera de $\sigma_B^0 - \sigma_A^0$ en un múltiplo de 2π . Se debe en este caso restringir las curvas variadas posibles a aquellas que además de (20) cumplan la nueva condición

$$|v''(u) - v_0''(u)| < \varepsilon_3 \quad (21)$$

Entonces, como las direcciones de los planos osculadores diferirán poco entre sí, no es posible que uno de ellos dé un número de vueltas mayor que el otro y si en A y B los planos osculadores son los mismos será $\sigma_B - \sigma_A = \sigma_B^0 - \sigma_A^0$. Luego, para superficies con puntos hiperbólicos, se tiene: «Dentro del campo de las curvas variadas que cumplen (20) y (21) y tienen los mismos planos osculadores en los extremos o bien son curvas cerradas con torsión continua, las curvas D son extremales de la torsión total. Para arcos suficientemente limitados, ellas corresponden a un máximo⁽¹³⁾ si $(GL - EN) \cdot v_0' > 0$ y a un mínimo en caso contrario».

III. DEMOSTRACIÓN DIRECTA DEL RESULTADO ANTERIOR.

Vamos a demostrar directamente la propiedad fundamental anterior de que la condición para que una curva de una superficie sea extremal de la torsión total es que en todos sus puntos, la esfera osculatriz sea tangente a la superficie.

1. Prescindiendo por un momento de la superficie, consideremos en el espacio una curva $X = X(s)$ que une dos puntos A, B. Sean $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ los vectores de módulo 1 tangente, normal principal y binormal. Una curva variada de la anterior, con los mismos extremos, será de la forma

$$X_1 = X(s) + \varepsilon Y(s) \quad (22)$$

siendo $Y(s)$ un vector que es nulo para los valores extremos del arco s.

La torsión $\tau_1(s)$ de la curva variada $X_1(s)$ será ⁽¹⁶⁾

$$\tau_1 = \frac{(X_1' X_1'' X_1''')}{X_1'' X_1''' - (X_1' X_1'')^2} \quad (23)$$

donde los acentos indican derivadas respecto el parámetro s , y el numerador indica el producto mixto de los tres vectores.

Según (22) es

$$(X_1' X_1'' X_1''') = (X' X'' X''') + \varepsilon [(Y' X' X'') + (X' Y'' X''') + (X' X'' Y''')] + \varepsilon h_1. \quad (24)$$

$$X_1''^2 X_1'''^2 - (X_1' X_1'')^2 = X''^2 + 2\varepsilon [X'' Y'' + (X' Y') X''^2] + \varepsilon h_2$$

donde $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_i = 0$ ($i = 1, 2$) para $\varepsilon \rightarrow 0$.

Para obtener la última expresión basta observar que, por ser la variable de derivación el arco de $X(s)$, es $X'^2 = 1$ y por tanto $X' X'' = 0$.

Aplicando las fórmulas de Frenet se deduce

$$X' = T, \quad X'' = \kappa N, \quad X''' = -\kappa^2 T + \kappa' N + \kappa \tau B$$

siendo κ la curvatura y τ la torsión de la curva $X(s)$.

Como además $T \wedge N = B$, $N \wedge B = T$, $B \wedge T = N$, se tiene

$$(Y' X'' X''') = (\kappa B + \tau T) \kappa^2 Y'$$

$$(X' Y'' X''') = (-\kappa B + \kappa \tau N) Y''$$

$$(X' X'' Y''') = \kappa B Y'''$$

$$X'' Y'' + (X' Y') X''^2 = \kappa N Y'' + \kappa^2 T Y'$$

Sustituyendo estos valores en (24) y haciendo después la división en (23), resulta

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \tau + \varepsilon [(\kappa B - \tau T) Y' + \frac{1}{\kappa} (B Y'' - \tau N Y''') - \\ &\quad \frac{\kappa'}{\kappa^2} B Y''] + \varepsilon h_3 \\ &= \tau + \varepsilon \left[(\kappa B - \tau T) Y' + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa} B Y'' \right) \right] + \varepsilon h_3. \end{aligned}$$

con $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_3 = 0$.

⁽¹⁶⁾ BLASCHKE, *Differentialgeometrie I* pág. 27.

El límite del cociente entre $\tau_1 - \tau$ y ε para $\varepsilon \rightarrow 0$, multiplicado por ε , es la *primera variación de la torsión*; representándolo por $\delta \tau$ será (17)

$$\delta \tau = \varepsilon \left[(\kappa B - \tau T) Y' + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa} B Y'' \right) \right]. \quad (25)$$

2. Consideremos ahora la torsión total $\mathcal{C} = \int_A^B \tau ds$ de la curva que une A con B. Para hallar la torsión total de la curva variada $X_1(s)$ (22) hay que hallar primero el elemento de arco de esta nueva curva. Siendo $X' = T$, se tiene

$$ds_1 = \sqrt{X_1'^2} ds = \sqrt{1 + 2\varepsilon T Y' + \varepsilon^2 Y'^2} ds = [1 + \varepsilon T Y' + \varepsilon h_4] ds.$$

La torsión total de $X_1(s)$ será pues

$$\mathcal{C}_1 = \int_A^B \tau_1 ds_1 = \int_A^B (\tau + \delta \tau + \varepsilon h_3) (1 + \varepsilon T Y' + \varepsilon h_4) ds.$$

Como h_3 y h_4 tienden a cero con ε , el producto de ε por el límite del cociente entre la diferencia $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}$ y ε , para ε tendiendo a cero, o sea, la *primera variación de la torsión total*, valdrá

$$\delta \mathcal{C} = \varepsilon \int_A^B \left(\kappa B Y' + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa} B Y'' \right) \right) ds.$$

Imponiendo la condición de que las curvas variadas deban pasar por A y B y tener en estos puntos las mismas tangentes y los mismos planos osculadores, debe ser

$$Y_A = Y_B = Y'_A = Y'_B = Y''_A = Y''_B = 0$$

(17) Ver BLASCHKE, *Differentialgeometrie I* pág. 64. Aquí se cita un trabajo de HAMEL, en *Sitzungsber. Akad. Berlin 1925*, pág. 5 que no hemos podido consultar; ignoramos si en él, además de la fórmula (25) se encuentran también algunas otras de las propiedades de las curvas extremales de la torsión total que estudiamos en este trabajo.

con lo cual la integral del segundo sumando de la expresión subintegral es nula. Además, integrando por partes (siendo $B' = -\tau N$),

$$\int_A^B \kappa B Y' ds = [\kappa B Y]_A^B - \int_A^B (\kappa' B - \kappa \tau N) Y ds .$$

Luego, con las condiciones dichas en los extremos, es

$$\delta \mathcal{C} = -\varepsilon \int_A^B (\kappa' B - \kappa \tau N) Y ds .$$

Para que esta primera variación sea nula para *cualquier valor del módulo del vector Y* es preciso que éste sea en cada punto perpendicular al vector $\kappa' B - \kappa \tau N$.

Pero el ángulo que forma el radio de la esfera oscultriz a una curva con la normal principal, cumple la condición ⁽¹⁵⁾

$$\text{tang } \alpha = \frac{\rho'}{\rho \tau} = -\frac{\kappa'}{\kappa \tau}$$

o sea, tiene la misma dirección de $\kappa' B - \kappa \tau N$. Por lo tanto: *el vector Y debe ser en cada punto tangente a la esfera oscultriz a la curva.*

Si la curva pertenece a una superficie, al considerar variaciones sobre la misma (o sea el vector Y siempre tangente a ella), para que la torsión total sea extremal es preciso por tanto que la esfera oscultriz en cada punto de la curva sea tangente a la superficie. Obtenemos así de nuevo el resultado de II.

IV. EJEMPLO. CURVAS EXTREMALES DE LA TORSIÓN TOTAL SOBRE EL TORO.

1. Como aplicación de los resultados anteriores vamos a buscar las curvas extremales de la torsión total sobre la superficie del toro o sea sobre la superficie engendrada por una circunferencia que gira alrededor de una recta que no pasa por su centro.

Llamando θ a la latitud de la sección meridiana y φ al ángulo que fija esta sección (Fig. 1) las ecuaciones paramétricas del toro, o sea las componentes del vector $X(\theta, \varphi)$ que define la superficie (I, r) son

$$\begin{aligned} x &= (a + r \cos \theta) \sin \varphi, \\ y &= (a + r \cos \theta) \cos \varphi, \\ z &= r \sin \theta \end{aligned}$$

siendo r el radio de la circunferencia meridiana y a la distancia del centro de la misma al eje de rotación. Las componentes del vector unitario normal son

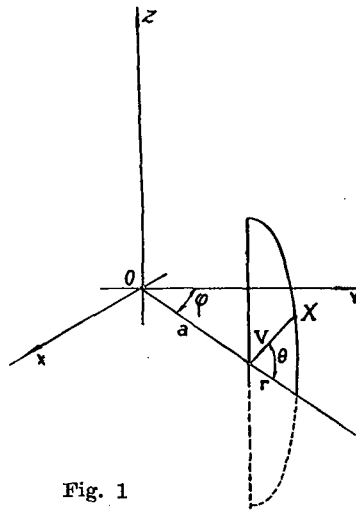


Fig. 1

$$V(-\cos \theta \sin \varphi, -\cos \theta \cos \varphi, -\sin \theta).$$

Los coeficientes de las dos formas cuadráticas fundamentales serán

$$\begin{aligned} E &= X_\theta^2 = r^2 & G &= X_\varphi^2 = (a + r \cos \theta)^2 \\ L &= -X_\theta V_\theta = r & N &= -X_\varphi V_\varphi = (a + r \cos \theta) \cos \theta \end{aligned} \quad (26)$$

Con estos valores los coeficientes de la ecuación (10) de las curvas D o curvas extremales de la torsión geodésica total son

$$\begin{aligned} a &= 6ar^3(a + r \cos \theta)^3, & b &= 0, & c &= -6ar^4(a + r \cos \theta)^2 \sin \theta, \\ d &= e = 0 \end{aligned}$$

con lo cual la ecuación (10), después de simplificar, se reduce a

$$(a + r \cos \theta)(\theta' \varphi'' - \theta'' \varphi') - r \sin \theta \cdot \theta'^2 \varphi' = 0.$$

Tomando φ como variable independiente, esta ecuación equivale a

$$(a + r \cos \theta) \frac{d\theta'}{d\varphi} + r \operatorname{sen} \theta \cdot \theta'^2 = 0.$$

Poniendo $\frac{d\theta'}{d\varphi} = \frac{d\theta'}{d\theta} \theta'$ queda

$$(a + r \cos \theta) \frac{d\theta'}{d\theta} + r \operatorname{sen} \theta \cdot \theta' = 0$$

y una primera integración da

$$\theta' = c_1 (a + r \cos \theta) \tag{27}$$

De aquí, por una integración clásica,

$$\varphi = c_2 + \frac{2}{c_1 \sqrt{a^2 - r^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\sqrt{\frac{a-r}{a+r}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right]$$

que puede escribirse en la forma

$$\theta = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\sqrt{\frac{a+r}{a-r}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} c_1 \sqrt{a^2 - r^2} (\varphi - c_2) \right] \tag{28}$$

Esta es la ecuación de las curvas extremales de la torsión geodésica total o, lo que es lo mismo, de las curvas D de la superficie del toro. La constante c_2 se determina dando el origen A de la curva extremal y la c_1 por la tangente en este punto.

2. Supongamos $a > r$ para que se trate de una superficie sin líneas dobles.

La condición $\frac{dv}{du} > 0$ que según vimos en (II, 2, 3) debía cumplirse a lo largo de la curva extremal para que ella pudiera ser un máximo débil⁽¹⁸⁾ equivale en este caso a $\theta' > 0$ y según (27) y por ser $a > r$ esta condición se cumple para todo punto de la extremal si se cumple en uno de sus puntos (es decir, si $c_1 > 0$).

Considerando todas las extremales que pasan por un punto fijo θ_0, φ_0 sus puntos de contacto con la envolvente de todas

⁽¹⁸⁾ En (II, 2, 3) se supuso $GL - EN > 0$. Esto ocurre efectivamente en el caso actual, pues según (26) es $GL - EN = (a + r \cos \theta) \cdot ar > 0$.

ellas se determinan como es sabido por las raíces de la ecuación de Jacobi⁽¹⁹⁾

$$\frac{\partial (\theta, \theta_0)}{\partial (c_1, c_2)} = 0 \quad (29)$$

donde el primer miembro indica el determinante funcional respecto c_1, c_2 de la función (28) y la que resulta al sustituir en ella θ y φ por θ_0 y φ_0 . Haciendo las operaciones se encuentra que esta ecuación (29) se reduce a $\varphi - \varphi_0 = 0$, es decir, no tiene más solución que $\varphi = \varphi_0$. Por tanto: «Las extremales carecen de focos conjugados, ellas corresponden pues, para cualquier arco, a un máximo débil de la torsión geodésica total».

Tomemos, para mayor simplicidad, el punto $\theta = 0$, $\varphi = 0$ como origen de las extremales. La ecuación (28) se reduce en este caso a

$$\theta = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\sqrt{\frac{a+r}{a-r}} \operatorname{tg} \frac{r}{2} c_1 \sqrt{a^2 - r^2} \varphi \right] \quad (30)$$

c_1 se determina por (27) que en este caso es $\theta'_0 = c_1 (a+r)$.

Se observa, estudiando (30), que: Condición necesaria y suficiente para que la curva extremal sea cerrada es que $\frac{r}{2} c_1 \sqrt{a^2 - r^2}$ sea racional. En efecto, en este caso siempre habrá un entero k tal que $\frac{r}{2} c_1 \sqrt{a^2 - r^2} 2\pi k$ sea un múltiplo de π y por tanto θ tomará el mismo valor θ_0 que para $\varphi = 0$. Si $c_1 \sqrt{a^2 - r^2} = \frac{p}{q}$ siendo p y q enteros primos entre sí, la curva cerrará después de haber descrito p vueltas al toro en el sentido de sus meridianos (o sea según θ) y q vueltas según sus paralelos (o sea, según φ). Se observa también que por ser θ' de signo constante, no existen curvas extremales cerradas que no den alguna vuelta al toro.

Como ejemplos, en la Fig. 2 (a) está representado el caso $a=5, r=3, c_1 = \frac{1}{2}, \theta'_0 = 4$; en este caso es $p=2, q=1$.

En la Fig. 2 (b) con los mismos valores de a y r es $c_1 = \frac{1}{8}, \theta'_0 = 1$ y $p=1, q=2$.

⁽¹⁹⁾ HADAMARD, loc. cit. pág. 108.

3. Si en lugar de la torsión geodésica total se considera la torsión total, las conclusiones anteriores subsisten con tal de considerar únicamente como curvas variadas posibles aquellas en que, no sólo θ y θ' tienen valores próximos a los correspondientes de la extremal, sino también θ'' (condición (21)).

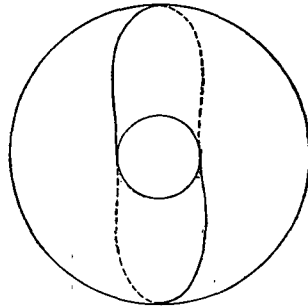


Fig. 2 (a)

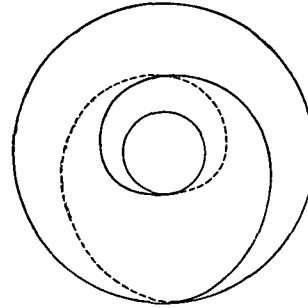


Fig. 2 (b)

Con ello se evita que la variación del ángulo σ que forman el plano osculador a la curva y el normal a la superficie difiera en un múltiplo de π entre una curva y su variada.

4. Puede interesar hallar el incremento del ángulo σ a lo largo de una extremal cerrada, de las que hemos visto existían en 2.

Una manera de calcular el ángulo σ consiste en observar que el radio de curvatura ρ de la curva es igual por una parte

a $R \sin \sigma$ (teorema de Meusnier) y por definición de radio de curvatura geodésica es también igual a $\rho_g \cos \sigma$ (Fig. 3). De aquí

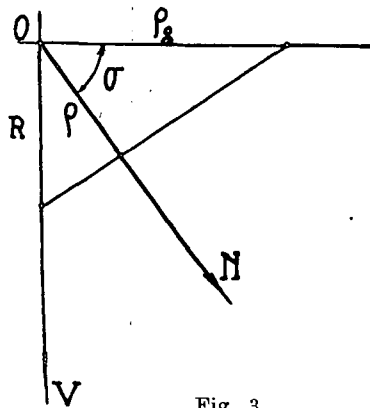


Fig. 3

$$\cot \sigma = \frac{R}{\rho_g}$$

Cuando las líneas coordenadas son las de curvatura, R y ρ_g valen⁽²⁰⁾

⁽²⁰⁾ BLASCHKE, *Differentialgeometrie I* págs. 91 y 175.

$$R = \frac{E u'^2 + G v'^2}{L u'^2 + N v'^2}$$

$$\frac{I}{P_8} = \frac{I}{\sqrt{EG} (E u'^2 + G v'^2)^{3/2}}$$

$$\left[EG (u' v'' - u'' v') - \frac{I}{2} E E_v u'^3 + (E G_u - \frac{I}{2} G E_u) u'^2 v' \right. \\ \left. + (\frac{I}{2} E G_v - G E_v) u' v'^2 + \frac{I}{2} G G_u v'^3 \right]$$

y por tanto

$$\cot \sigma = \frac{I}{\sqrt{EG} (L u'^2 + N v'^2) \sqrt{E u'^2 + G v'^2}}$$

$$\left[EG (u' v'' - u'' v') - \frac{I}{2} E E_v u'^3 + (E G_u - \frac{I}{2} G E_u) u'^2 v' \right. \\ \left. + (\frac{I}{2} E G_v - G E_v) u' v'^2 + \frac{I}{2} G G_u v'^3 \right]$$

En el caso del toro que estamos estudiando, teniendo en cuenta que tomamos θ en lugar de u y que φ (correspondiente a v) es la variable independiente, sustituyendo en la expresión anterior los valores encontrados en IV, 1 y además los valores de θ' y θ'' en función de θ , resulta

$$\cot \sigma = \frac{(3 r^2 c_1^2 - 1) r \operatorname{sen} \theta}{a \sqrt{1 + r^2 c_1^2} (a r c_1^2 + (1 + r^2 c_1^2) \cos \theta)} \quad (31)$$

Esta fórmula encierra algunas consecuencias interesantes:

a) Si $c_1 = \frac{1}{\sqrt{3}r}$, será constantemente $\sigma = \frac{\pi}{2}$ y la curva es geodésica. Si además $c_1 \sqrt{a^2 - r^2} = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{\sqrt{3}r}$ es racional, se tendrá una línea geodésica cerrada que al mismo tiempo es curva D, o sea, extremal de la torsión geodésica total.

b) Si $a r c_1^2 - 1 - r^2 c_1^2 > 0$, o sea $c_1 > \frac{1}{\sqrt{r(a-r)}}$, $\cot \sigma$ es siempre finito y por tanto el incremento de σ a lo largo de una curva extremal cerrada es cero.

c) Si $a r c_1^2 - 1 - r^2 c_1^2 < 0$, o sea

$$c_1 < \frac{1}{\sqrt{r(a-r)}} \quad (32)$$

la expresión (31) de $\cot \sigma$ se hace infinito para algunos valores de θ . Observando como va variando σ con θ se encuentra que: después de describir una línea cerrada el incremento de σ es igual al incremento del ángulo θ .

d) Derivando la expresión (31) se encuentra que $\frac{d\sigma}{d\theta}$ tiene signo constante si $\arcc_1^2 - 1 - r^2 c_1^2 < 0$. En este caso la diferencia $\sigma_B - \sigma_A$ irá siempre creciendo.

5. Observemos por último que la torsión geodésica total de las curvas del toro extremales de la misma, vale (aplicando (16), (26) y (27))

$$\mathcal{T}_g = \int_0^\varphi \frac{a c_1}{\sqrt{1 + r^2 c_1^2}} d\varphi = \frac{a c_1}{\sqrt{1 + r^2 c_1^2}} \varphi.$$

Eligiendo c_1 de manera que satisfaga a la condición (32) y además de manera que $c_1 \sqrt{a^2 - r^2}$ sea racional, o sea

$$c_1 \sqrt{a^2 - r^2} = \frac{p}{q} \quad (33)$$

siendo p, q enteros primos entre sí, se tendrá una curva cerrada cuya torsión total valdrá (según (15) y la consecuencia c) del número anterior)

$$\mathcal{T} = \frac{a c_1}{\sqrt{1 + r^2 c_1^2}} 2 \pi q + 2 \pi p. \quad (34)$$

Como es posible elegir p y q de manera que se cumpla (33) y además que (34) tome valores tan grandes como se quiera, resulta: «Sobre el toro hay infinitas curvas cerradas con torsión continua y siempre de signo constante y cuya torsión total toma valores tan grandes como se quiera».

Por ejemplo, sobre el toro engendrado por un círculo de radio $r=3$ que gira alrededor de un eje distante del centro una distancia $a=5$, la curva

$$\theta = 2 \arcc_1 \left[2 \operatorname{tg} \frac{2}{5} \varphi \right]$$

correspondiente a la ecuación (30) para $c_1 \sqrt{a^2 - r^2} = \frac{4}{5}$ tiene la torsión siempre positiva y al cerrar después de dar 4 vueltas

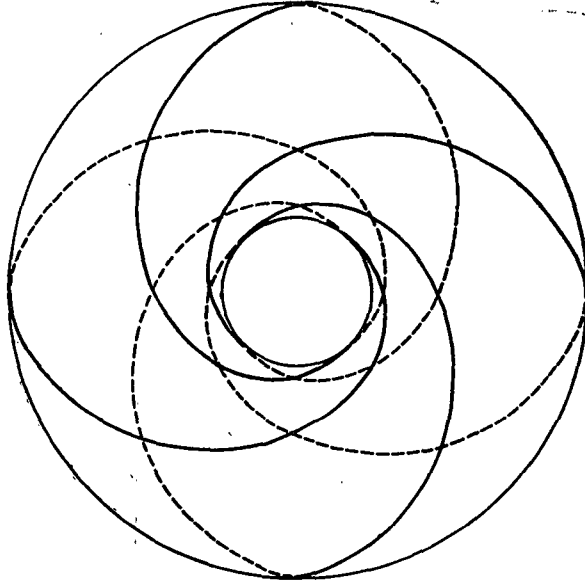


Fig. 4

según θ y 5 según φ tiene una torsión total igual (según (34)) a $2\pi \left(\frac{25}{\sqrt{34}} + 4 \right)$. Esta curva está representada en la Fig. 4.

Rosario, Instituto de Matemática, enero 1941.