Vol. VIII N.º 1

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS etc.
DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

PUBLICACIONES
DEL
INSTITUTO DE MATEMATICA
Director: BEPPO LEVI

B. LEVI - L. A. SANTALÓ - C. DE MARIA

ESTUDIOS NUMERATIVOS SOBRE LAS VARIEDADES DE CONTACTO DE LAS SUPERFICIES EN UN ESPACIO DE n DIMENSIONES

*

ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA
1946

AUTORIDADES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS, FISICO-QUIMICAS Y NATURALES APLICADAS A LA INDUSTRIA

Delegado Interventor

Ing. Domingo Maturo

Secretario

Ing. Luis Aymí

RIASSUNTO

Il problema trattato in questa Memoria consiste in determinare le caratteristiche numerative (dimensione, ordine, multiplicità di sottovarietà, ecc.) delle varietà generate dagli spazi lineari aventi determinati ordini di contatto colle curve tracciate sopra una superficie immersa in uno spazio di un numero qualunque di dimensioni, per un punto semplice ordinario di essa. I primi due e l'ultimo paragrafo si riferiscono a considerazioni generali. I paragrafi intermedi studiano dettagliatamente i casi in cui l'ordine del contatto è ≤ 6, ponendo in evidenza le difficoltà crescenti del problema. La tavola riassuntiva di alcuni risultati numerici posta al termine della Memoria può servire pure a dare un'idea di questo fatto mediante il ritmo di crescimento dei numeri. Altri risultati particolari, massime relativi alle varietà subordinate, che sarebbe lungo indicare, possono ricercarsi nel testo. L'indice finale può pure servire di orientamento.

ESTUDIOS NUMERATIVOS SOBRE LAS VARIEDADES DE CONTACTO DE LAS SUPERFICIES EN UN ESPACIO DE n DIMENSIONES

POR

B. LEVI - L. A. SANTALO - C. DE MARIA

RESUMEN. — Como está indicado en el Prólogo, el problema que nos proponemos tratar es la caracterización numerativa (dimensión, orden, multiplicidad de ciertas subvariedades, etc.) de las variedades engendradas por los espacios lineales que tienen determinado orden de contacto con las curvas trazadas sobre una superficie de un espacio de un número de dimensiones bastante elevado, pasando por un punto simple ordinario de la misma. Los dos primeros y el último párrafo se refieren a consideraciones generales. En los párrafos que median entre estos se estudian en detalle los casos que corresponden a los órdenes de contacto ≤ 6, pudiendo el lector darse cuenta de como las dificultades del problema crecen rápidamente. La tabla puesta al final de la Memoria, resumiendo una parte de los resultados numéricos, puede servir para dar una idea de este hecho sobre la base del rápido crecimiento de dichos números. Otros resultados particulares, principalmente los que se refieren a las variedades subordinadas, encontrará el lector en el texto. Para facilitar la orientación puede servir también el índice que cierra la Memoria.

PROLOGO

Dada una superficie sumergida en un espacio de un número de dimensiones tan grande como se quiera, y fijado sobre la superficie un punto, la definición de una curva trazada sobre la superficie y pasante por el punto depende de una función arbitraria; se puede por tanto decir que esas curvas constituyen un conjunto infinitas veces infinito. Sin embargo, es una noción elemental la de que las tangentes a esas curvas en el punto fijado son *una simple infinidad, y precisamente, en el caso normal en que el punto es simple para la superficie, constituyen un haz, cuyo plano se llama el plano tangente a la superficie en dicho punto. Pero, si como se ha dicho, la dimensión del espacio ambiente se deja crecer sin limitación prefijada, podrán considerarse, siempre en el punto dado, planos osculadores a las curvas, o espacios de tres dimensiones con un contacto triple (cuadripunto) o espacios de dimensiones sucesivamente crecientes y con contactos igualmente crecientes en una unidad para cada unidad que sube la dimensión. Ahora bien, la distribución de estas variedades lineales osculadoras está muy lejos de ser tan simple como lo indicaría el caso de las rectas tangentes.*

Para el caso de los planos osculadores, la bibliografía que conocemos nos da como primero en plantearse explícitamente el problema Pasquale Del Pezzo *en 1886 en una Memoria publicada en los* Rendiconti della Accademia di Napoli *con el título:* Sugli spazi tangenti a una superficie o varietà immersa in uno spazio a più dimensioni. *Demuestra Del Pezzo que los planos osculadores (∞^2) llenan un cono cuádrico de 4 dimensiones (sumergido pues en un espacio de 5 dimensiones), que tiene por vértice el plano tangente (cuádrica 3 veces degenerada). Esta conclusión es por otra parte anticipable intuitivamente por quien considere que, si la superficie, supuesta en un espacio de dimensión n, se proyecta de una recta genérica del plano tangente sobre un subespacio de dimensión $n-2$, la superficie proyección tendrá, como correspondiente al considerado, un punto doble cuyas tangentes, imágenes de los planos osculadores de la dada, forman un cono cuádrico en un espacio de 3 dimensiones.*

Ahora ocurre observar que este simple razonamiento puede bien extenderse al caso de considerar espacios osculadores de mayor dimensión, pero las conclusiones deducibles por este camino resultan en seguida más bien insignificantes en comparación de la complejidad del problema, de manera que entre éste y el estudio de la composición de la singularidad del punto múltiple en la superficie proyección, puede bien todavía esperarse una correlación y aclaración mutua, pero nada que se parezca a una casi identidad.

La investigación que aquí se presenta y el método para conducirla fueron proyectados por el más viejo de los autores de este *trabajo mientras precisamente se ocupaba de los puntos singulares de las superficies entre 1897 y los primeros años del siglo; aún fueron encontrados entonces algunos de los primeros números; pero la pretensión, acaso excesiva, de encontrar fórmulas numerativas generales y otros intereses suspendieron entonces el trabajo. Mientras tanto el problema se presentó sucesivamente por casos particulares a otros autores, generalmente en modo incidental para otras investigaciones y varios resultados particulares fueron publicados. En 1933-34 para dirigir un joven alumno, el Sr. Celestino De María, en una tesis para optar al título de doctor en matemática en la Universidad de Bologna, le propuse llevar adelante, en modo sistemático, el problema, pero por casos sucesivos en vista de la extrema dificultad de las fórmulas generales; de esta manera pudimos determinar o confirmar varios de estos números, la mayoría de los que están consignados en el presente trabajo. Mas ocurrencias vulgares vinieron a separar al profesor del joven colaborador casi en seguida después del examen que le otorgara el título; y, habiéndose sobrepuesto a aquellas otros acontecimientos de mucho mayor gravedad, nos falta en este momento toda noticia de él. Sin embargo hemos insertado su nombre en el título como debido reconocimiento y afectuoso recuerdo de esa colaboración.*

Seguimos considerando la investigación objeto del presente trabajo, digna de atraer la atención de algún joven geómetra; por esta razón, conjuntamente con el Dr. Luis A. Santaló, mi valioso y querido colaborador actual, decidimos revisar y completar en alguna parte los viejos apuntes y llevar el todo a una redacción suficientemente definitiva como para formar un conjunto que pueda leerse con cierto interés. En particular el Dr. Santaló ha cuidado la puesta al día de las citas bibliográficas, la corrección de algunos números y la introducción de algunas consideraciones generales al principio y como conclusión del trabajo. Con todo, éste resulta todavía más bien la señalación de un camino que un problema acabado.

Particularmente el estudio de los últimos dos casos (§§ 5 y 6; espacios osculadores de 5 y de 6 dimensiones) nos parece muy instructivo para señalar las dificultades del problema, crecientes muy rápidamente con la dimensión, para indicar los métodos de enumeración aconsejables para enfrentarlas y para dar una idea de la riqueza de resultados parciales que por tal camino *pueden obtenerse; de tal manera que podrían ellos quizá servir de modelo para seguir adelante algunos pasos, por dimensiones crecientes. Muestran también como ocurre que los detalles que se presentan por considerar aumentan entonces rápidamente.*

Los ejemplos análogos no son raros, principalmente en las cuestiones algebraicas, como ésta.

B. Levi

§ 1. CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE LOS [p]-OSCULADORES A LAS CURVAS DE UNA SUPERFICIE QUE PASAN POR UN PUNTO

1. Coordenadas baricéntricas homogéneas. — Dados en un espacio de un número de dimensiones tan grande como se quiera $p+1$ puntos

$$P_0 P_1 \dots P_p \tag{1.1}$$

y atribuído a cada uno de ellos un peso, respectivamente

$$a_0 a_1 \dots a_p$$

representaremos con

$$a_0 P_0 + a_1 P_1 + \dots + a_p P_p \tag{1.2}$$

el baricentro de ellos. Se sabe que, al variar los números a_i, los puntos (1.2) llenan un espacio lineal, cuya dimensión es $\leqq p$, y es precisamente p si los puntos (1.1) son linealmente independientes, es decir si ninguno de ellos se puede expresar en forma análoga a (1.2) mediante los p puntos restantes. Si esto ocurriera, podrían suprimirse en el grupo (1.1) cierto número de puntos, de manera que los que quedan sean linealmente independientes entre sí, y que todos los demás se expresen por ellos mediante una suma análoga a (1.2); todos los puntos que se expresaban antes por (1.2) se expresarán entonces de la misma forma por medio de este número reducido de puntos. Podremos luego siempre suponer que *el grupo* (1.1) *sea constituído por puntos linealmente independientes* y que *la fórmula* (1.2) *representa los puntos del espacio de p dimensiones determinado por ellos.*

Si los números a_i se multiplican todos por un mismo factor, el baricentro no cambia; pero en la hipótesis hecha de que los (1. 1) sean independientes, a sistemas de valores no proporcionales de las a_i corresponden siempre puntos distintos. Los números a_i podrán luego llamarse *coordenadas baricéntricas homogéneas* de los puntos (1. 2).

Si el espacio ambiente — de un número de dimensiones tan grande como se quiera — se imagina referido a un sistema de coordenadas cartesianas homogéneas $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y se supone

$$P_i = (x_0{}^i\, x_1{}^i \ldots x_n{}^i),$$

las coordenadas del punto (1. 2) serán expresadas por

$$x_r = a_0\, x_r{}^0 + a_1\, x_r{}^1 + \ldots + a_p\, x_r{}^p \qquad (r = 0, 1, \ldots, n)$$

y la condición de que los puntos P_i sean independientes se expresa por ser $\neq 0$ el determinante de las $x_r{}^i$. Esta interpretación de las a_i podrá tenerse presente cuando resulte cómodo; sin embargo. la concepción baricéntrica tendrá siempre la ventaja evidente de asegurar el significado intrínseco geométrico de las consideraciones que siguen.

Si una de las coordenadas baricéntricas, por ej. a_0 es nula, el punto representado por (1. 2) estará contenido en un subespacio que contiene los restantes puntos P_i, pero no el punto P_0. Cuando este caso se excluye podrá asignarse a esta coordenada un valor constante, por ej. 1 y las coordenadas baricéntricas dejan de ser homogéneas. Esto va a ocurrir frecuentemente en lo que sigue.

Siguiendo el simbolismo de Schubert, un espacio lineal de p dimensiones se indicará por un $[p]$.

2. Un punto $P(t)$, función de la variable numérica t, describe una curva al variar t. Evidentemente

$$\frac{P(t+h)-P(t)}{h}$$

es la representación baricéntrica de un cierto punto, del cual se puede determinar el límite para $h=0$; este límite es por definición la derivada del punto $P(t)$ y, si $P(t)$ está referido a un sistema de coordenadas cartesianas, sus coordenadas serán las derivadas de las coordenadas de P.

Análogamente se definen los puntos derivadas sucesivas de $P(t)$.

En lo que sigue tendremos siempre que considerar curvas no singulares, es decir tales que en el entorno de los valores de la variable que ocurre considerar existen todas las derivadas que sean necesarias, y los puntos por ellas representadas son linealmente independientes, incluso el punto $P(t)$ como derivada de orden 0. En estas condiciones el punto $P(t)$, conjuntamente con los primeros r puntos derivados sucesivos define un $[r]$ que se llamará $[r]$-osculador a la curva en el punto $P(t)$. Se ve en seguida que, para los primeros valores $r=1, 2, \ldots$ esta definición coincide con la de la tangente, plano osculador, etc.

Es importante notar que, en consecuencia de la homogeneidad de las coordenadas (sea las baricéntricas, sea las cartesianas), los sucesivos puntos derivados de un punto, función dada de una variable, sufren una indeterminación, la cual sin embargo tiene como único efecto un desplazamiento sobre el $[r]$-osculador de mínima dimensión que lo contiene. En efecto, si se pone

$$P(t)=a_0(t)P_0+a_1(t)P_1+\ldots+a_p(t)P_p$$

$$k(t)\,P(t)=k(t)\,a_0(t)P_0+k(t)\,a_1(t)P_1+\ldots+k(t)\,a_p(t)P_p,$$

de modo que $P(t)$ y $k(t)\,P(t)$ serán *geométricamente* el mismo punto, se tiene, según una conocida fórmula de Leibniz,

$$\frac{d^rk(t)P(t)}{dt^r}=k(t)\,P^{(r)}(t)+rk'(t)\,P^{(r-1)}(t)+\binom{r}{2}k''(t)\,P^{(r-2)}(t)$$
$$+\ldots+k^{(r)}(t)\,P(t) \qquad (2.1)$$

los índices superiores representando derivaciones.

3. Supongamos dadas dos curvas $P(t)$, $Q(\tau)$ que tienen un punto común; podremos suponer que corresponda a los valores de t y τ, $t=\tau=0$; esto significa que, siendo

$$P(t)=\Sigma\, a_i(t)P_i, \qquad Q(\tau)=\Sigma\, b_i(\tau)P_i,$$

se realizan las igualdades

$$\frac{a_i(0)}{\Sigma a_i(0)}=\frac{b_i(0)}{\Sigma b_i(0)} \qquad (i=0,1,\ldots,p).$$

Diremos que las dos curvas tienen un contacto de orden r si existe una sustitución $\tau=\tau(t)$ tal que

$$\frac{d^s}{dt^s}\left(\frac{P(t)}{\Sigma a_i(t)}-\frac{Q(\tau)}{\Sigma b_i(\tau)}\right)_{t=0}=0 \tag{3.1}$$

para

$$s=1,2,\ldots,r.$$

El cálculo se desarrolla fácilmente poniendo

$$k(t)=\frac{1}{\Sigma a_i(t)}, \qquad h(\tau)=\frac{1}{\Sigma b_i(\tau)}$$

y aplicando la (2.1). Cada una de las ecuaciones (3.1) impone entonces para el correspondiente $\tau^{(s)}(0)$ un sistema de ecuaciones lineales que, para admitir solución simultánea, implican un sistema de relaciones entre los $a_i(0)$, $a'_i(0),\ldots,a_i^{(s)}(0), b_i(0)$, $b'_i(0)$, $\ldots$, $b_i^{(s)}(0)$, que son las condiciones de contacto de los sucesivos órdenes.

Un caso particular que se presenta frecuentemente en el présente estudio es el de las *curvas racionales normales*

$$P(t)=P_0+\alpha_1 tP_1+\alpha_2 t^2P_2+\ldots+\alpha_p t^pP_p \tag{3.2}$$

donde las α_i representan coeficientes numéricos constantes. Poniendo

$$k(t)=\frac{1}{1+\Sigma\alpha_i t^i}, \qquad k(t)\,(1+\Sigma\,\alpha_i\,t^i)=1,$$

se obtiene en seguida, por la fórmula de Leibniz ya recordada, la relación recurrente:

$$k^{(s)}(0) = -s!\,[\alpha_s + \alpha_{s-1}\,k'(0) + \frac{1}{2}\alpha_{s-2}\,k''(0) + \frac{1}{3!}\alpha_{s-3}\,k'''(0) + \dots$$
$$+ \frac{1}{(s-1)!}\alpha_1\,k^{(s-1)}(0)]\,. \qquad (3.3)$$

Si luego consideramos, conjuntamente con (3. 2) otra curva análoga

$$Q(\tau) = P_0 + \beta_1\,\tau\,P_1 + \beta_2\,\tau^2\,P_2 + \dots \qquad (3.4)$$

las dos curvas tienen el punto P_0 común

$$P_0 = P(0) = Q(0);$$

ellas son también tangentes en P_0, pues para $s=1$, (3. 1) y (3. 3) dan lugar a la condición

$$\alpha_1\,(P_0 - P_1) = \beta_1\,(P_0 - P_1)\,\tau'(0),$$

que se realiza para

$$\tau'(0) = \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Pero, para $s=2$, (3. 1) y (3. 3) dan todavía

$$2\,\Big\{[(\alpha_2 - \alpha_1^2)\,P_0 - \alpha_1^2\,P_1 + \alpha_2\,P_2]$$
$$-[(\beta_2 - \beta_1^2)\,P_0 - \beta_1^2\,P_1 + \beta_2\,P_2]\Big(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\Big)^2\Big\}$$
$$+\beta_1\,(P_0 - P_1)\,\tau''(0) = 0; \qquad (3.5)$$

debe luego primero ser nulo el coeficiente de P_2, lo que da la condición

$$\frac{\alpha_2}{\beta_2} = \Big(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\Big)^2;$$

si ella está realizada, (3. 5) se reduce a

$$\beta_1\,(P_0 - P_1)\,\tau''(0) = 0$$

de la cual resulta

$$\tau''(0)=0.$$

Repitiendo el cálculo para los valores sucesivos de s se obtiene que la condición para que las curvas racionales normales (3, 2), (3. 4) tengan en P_0 contacto de orden r se expresa por ser las razones $\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_3}{\beta_3}, \ldots$ las potencias sucesivas de un mismo número.

4. Espacios lineales osculadores a las curvas trazadas sobre una superficie por un punto. — Supongamos ahora dada una superficie cuyo punto genérico indicaremos por x; será luego función de dos parámetros, coordenadas curvilíneas sobre la superficie:

$$x=x(u,v). \tag{4.1}$$

Se determina una curva sobre la superficie poniendo u y v funciones de una variable t. Nosotros supondremos considerar curvas por el punto

$$x_0=x(0,0)$$

y las representaremos ordinariamente tomando como variable t la misma u y poniendo luego

$$v=v(u), \qquad v(0)=0. \tag{4.2}$$

Indicaremos las derivadas sucesivas de v respecto u con subíndices

$$v_\lambda=\frac{d^\lambda v}{du^\lambda}.$$

Debemos ahora calcular expresiones convenientes para las derivadas sucesivas del punto x considerado recorriendo la curva

$$x=x(u,v(u)).$$

Para este fin pongamos

$$F_r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \frac{\partial^r x}{\partial u^{r-k} \partial v^k} v_1^k \tag{4.3}$$

y

$$F_r^i = \sum_{k=0}^{r-i} \binom{r-i}{k} \frac{\partial^r x}{\partial u^{r-k-i} \partial v^{k+i}} v_1^k. \tag{4.4}$$

Con estas notaciones observamos que se verifica

$$\frac{\partial F_r^i}{\partial v_1} = (r-i) F_r^{i+1}. \tag{4.5}$$

Además, representando por un momento por $(F_r^i)'$ a la derivada de F_r^i respecto de u, considerando a v_1 como si fuera constante, se tiene

$$\begin{aligned}
(F_r^i)' &= \sum_{k=0}^{r-i} \binom{r-i}{k} \left[\frac{\partial^{r+1} x}{\partial u^{r-k-i+1} \partial v^{k+i}} v_1^k + \frac{\partial^{r+1} x}{\partial u^{r-k-i} \partial v^{k+i+1}} v_1^{k+1} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{r-i} \binom{r-i}{k} \frac{\partial^{r+1} x}{\partial u^{r-k-i+1} \partial v^{k+i}} v_1^k + \sum_{k=1}^{r-i+1} \binom{r-i}{k-1} \frac{\partial^{r+1} x}{\partial u^{r-k-i+1} \partial v^{k+i}} v_1^k \\
&= \binom{r-i}{0} \frac{\partial^{r+1} x}{\partial u^{r-i+1} \partial v^i} + \sum_{k=1}^{r-i} \left\{ \binom{r-i}{k} + \binom{r-i}{k-1} \right\} \frac{\partial^{r+1} x}{\partial u^{r-k-i+1} \partial v^{k+i}} v_1^k \\
&\qquad + \binom{r-i}{r-i} \frac{\partial^{r+1} x}{\partial v^{r+1}} v_1^{r-i+1}
\end{aligned}$$

y como

$$\binom{r-i}{k} + \binom{r-i}{k-1} = \binom{r-i+1}{k}$$

y

$$F_{r+1}^i = \sum_{k=0}^{r+1-i} \binom{r+1-i}{k} \frac{\partial^{r+1} x}{\partial u^{r+1-k-i} \partial v^{k+i}} v_1^k$$

resulta

$$(F_r^i)' = F_{r+1}^i. \tag{4.6}$$

Por consiguiente, de (4.5) y (4.6) se deduce

$$\frac{dF_r^i}{du} = F^i_{r+1} + F_r^{i+1}(r-i)\, v_2. \qquad (4.7)$$

Con esta ley de derivación es fácil ir obteniendo sucesivamente la expresión de las derivadas sucesivas de $x(u, v(u))$ mediante las notaciones (4.3) y (4.4). Se tiene, en efecto, sucesivamente:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{du} &= F_1, \\
\frac{d^2x}{du^2} &= F_2 + F_1^1 v_2, \\
\frac{d^3x}{du^3} &= F_3 + 3F_2^1 v_2 + F_1^1 v_3, \\
\frac{d^4x}{du^4} &= F_4 + 6F_3^1 v_2 + 3F_2^2 v_2^2 + 4F_2^1 v_3 + F_1^1 v_4,
\end{aligned} \qquad (4.8)$$

etcétera.

La expresión general de estas derivadas se demuestra que se puede escribir en la forma

$$\frac{d^px}{du^p} = p!\, \Sigma \frac{1}{\rho_1!\rho_2!\ldots} \frac{F_r^k}{(r-k)!} \left(\frac{v_{\lambda_1}}{\lambda_1!}\right)^{\rho_1} \left(\frac{v_{\lambda_2}}{\lambda_2!}\right)^{\rho_2} \cdots \qquad (4.9)$$

donde la sumatoria está extendida a todos los valores positivos posibles de los índices que cumplen las condiciones

$$\begin{gathered}
\lambda_i \geqq 2, \quad \Sigma\rho_i = k, \quad \Sigma\rho_i\lambda_i = p + k - r \\
r + k \leqq p \qquad k \leqq r
\end{gathered} \qquad (4.10)$$

siendo los λ_i distintos entre sí (*).

(*) Para la demostración de la fórmula (4.9) se puede ver O. Stolz, *Ueber die singulären Punkte der algebraischen Functionen und Kurven*, Mathem. Annalen vol. 8, 1875, p. 417. En este trabajo la fórmula (4.9) aparece en

5. Espacio ambiente y dimensión de las variedades engendradas por los espacios [p] - osculadores a las curvas de una superficie en un punto. — Dada sobre la superficie una curva C, con asignar una determinada función $v(u)$, el espacio $[p]$-osculador a la curva será el determinado por los puntos

$$x, \quad \frac{dx}{du}, \quad \frac{d^2x}{du^2}, \ldots, \frac{d^px}{du^p} \tag{5.1}$$

cuyas expresiones están proporcionadas por (4.8), (4.9). Al variar la función $v(u)$ y por tanto la curva C, variarán los valores de $v_1, v_2, \ldots, v_p$; pero quedan fijos los valores de las derivadas

$$\frac{\partial^r x}{\partial u^{r-k} \partial v^k} \cdot \quad (0 \leqq r \leqq p, \quad 0 \leqq k \leqq r) \; ; \tag{5.2}$$

Los puntos F_r, F_r^i, y (5.1) (ver (4.3), (4.4), (4.8), (4.9)) recorrerán luego variedades que serán o curvas racionales normales o bien variedades de mayor dimensión definidas en modo determinado por puntos correspondientes de dichas curvas, como indican las fórmulas (4,8), (4.9).

---

forma algo distinta, pero se reduce a la anterior observando que la función de Stolz está ligada con la F_r por

$$\Phi_r = \frac{1}{r!} F_r$$

y teniendo en cuenta, además, que

$$\frac{\partial F_r}{\partial v_1} = r F_r^{\,1}, \quad \frac{\partial^2 F_r}{\partial v_1^{\,2}} = r(r-1) F_r^{\,2},$$

y de una manera general

$$\frac{\partial^k F_r}{\partial v_1^{\,k}} = r(r-1) \ldots (r-k+1) \; F_r^{\,k}.$$

La fórmula (4.9) se encuentra también, en forma más o menos modificada en F. Enriques, *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. II, libro IV, cap. 3 y en A. Mambriani, *Sulla derivazione di ordine superiore delle funzioni composte*, Bollettino della Unione Matematica Italiana, año XIV, 1935, p. 10. En este último trabajo, en el que se tratan cuestiones mucho más generales, hay extensa bibliografía.

El número de los puntos (5. 2) es

$$1+2+3+\ldots+(p+1)=\frac{(p+1)(p+2)}{2}\ ;$$

ellos determinan luego un espacio de dimensión

$$\frac{(p+1)(p+2)}{2}-1=\frac{p(p+3)}{2}$$

Por otra parte, la totalidad de los $[p]$-osculadores considerados dependiendo de p parámetros v_λ, es un sistema ∞^p de espacios de p dimensiones, luego una variedad de dimensión $2p$. Concluimos:

La variedad de puntos generada por los $[p]$-osculadores a las curvas de una superficie por un punto no-singular de ella, supuesta la superficie sumergida en un espacio de dimensión bastante elevada, es una V_{2p} sumergida en un espacio de dimensión $\frac{p(p+3)}{2}$.

Nos convendrá también considerar, con mayor generalidad las variedades parciales constituídas por los $[p]$-osculadores que pasan por el mismo $[r]$-osculador fijo. Representaremos estas variedades por el símbolo $W(p,r)$; la V_{2p} del anterior teorema es pues la $W(p,0)$; y representaremos por $S(p,r)$ su espacio ambiente (*) y por $\sigma(p,r)$ la dimensión de éste; en el párrafo anterior vimos que

$$\sigma(p,0)=\frac{p(p+3)}{2}. \tag{5.3}$$

La $W(p,r)$ está constituída por un sistema ∞^{p-r} de $[p]$; por lo tanto tiene dimensión $2p-r$.

Se calcula también fácilmente la dimensión $\sigma(p,1)$ que es el número de los coeficientes $F_r{}^k$ que aparecen en las dx/du^l para $l\leqq p$; esto es el número de los pares r, k tales que

$$r+k\leqq p, \qquad k\leqq r, \qquad r\geqq 1,$$

(*) Este símbolo usa E. Bompiani, *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero*, Atti R. Accad. Scienze Torino, vol. 48, 1913.

resultando

$$\sigma(p,1) = \text{ent}\left[\frac{p(p+4)}{4}\right].^{(*)} \tag{5.4}$$

Para determinar el número $\sigma(p,r)$ para valores de $r \geqq 2$ puede servir, en principio, una consideración análoga; pero se debe observar que, en este caso, combinaciones lineales de la forma

$$\alpha F_{r'}^{k'} c_1 + \beta F_{r''}^{k''} c_2 + \ldots \tag{5.5}$$

donde $c_1, c_2, \ldots$ representan monomios formados por las v_λ con $\lambda \leqq r$ deben contarse como un punto único aunque comprenden varias F. $S(p,r)$ es entonces el espacio determinado por $S(p-1,r)$ y por tales combinaciones lineales que aparecen en la expresión (4.9) de $d^p x/du^p$ sin haber aparecido en las expresiones análogas de las derivadas $d^l x/du^l$ para $l \leqq p-1$. La diferencia $\sigma(p,r) - \sigma(p-1,r)$ es el número de estas combinaciones lineales nuevas. Para evitar confusiones en los símbolos escribamos nuevamente la (4.9) cambiando la letra r por s, en cuanto ahora la r ha cambiado de significado; tenemos pues

$$\frac{d^p x}{du^p} = \Sigma\, C_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots sk} F_s^k v_{\lambda_1}^{\rho_1} v_{\lambda_2}^{\rho_2} \ldots \tag{5.6}$$

donde los $C_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots sk}$ son coeficientes numéricos que aquí no interesa puntualizar; los índices están sometidos a las condiciones

$$\begin{aligned} &\lambda_i \geqq 2, \qquad s+k \leqq p, \qquad k \leqq s \\ &\Sigma\, \rho_i = k, \qquad \Sigma\, \rho_i \lambda_i = p+k-s. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Los términos de (5.6) se separan en dos clases:

$$1^{\text{o}}:\ s+k=p. \qquad 2^{\text{o}}:\ s+k<p.$$

(*) En teoría de números se indica con $[n]$ la *parte entera del número* n; habiendo utilizado la notación de Schubert para representar espacios, anteponemos el signo ent para distinguir este significado aritmético.

En el caso 1º, sustituyendo $s = p - k$ en la segunda (5. 7) se obtiene

$$\Sigma \rho_i \lambda_i = 2k,$$

que, con la primera (5. 7) da $\lambda_i = 2$; siendo por hipótesis $r \geqq 2$, todos estos términos se reúnen luego en una sola combinación lineal (5. 5), ciertamente diferente de todas las que se han presentado para valores menores de p.

En el caso 2º, a cada término de (5. 6) corresponde uno con el mismo factor $F_s{}^k$ en la $d^{p-1}x/du^{p-1}$, que difiere sin embargo de él por el hecho que una de las λ_i tiene valor menor en una unidad y por un eventual cambio en el coeficiente $C_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots sk}$ del cual nos vamos a ocupar después. Nótese que, al decir que una de las λ_i disminuye en 1, debe entenderse que, si fuera el correspondiente $\rho_i > 1$, quedaría todavía el factor $v_{\lambda_i}^{\rho_i - 1}$, efectuándose el cambio de índice en uno sólo de los factores de la potencia. Debe notarse también que la correspondencia entre términos de (5. 6) y de $d^{p-1}x/du^{p-1}$ no es biunívoca, por cuanto la reducción del índice puede operarse sobre un factor cualquiera con $\lambda > 2$ y recíprocamente al pasar de la derivada menor a la mayor puede aumentarse en una unidad el índice de cualquier v_λ que sea factor de ese término. Pero este particular no va a influenciar el razonamiento que sigue.

Distingamos ahora los términos considerados según tengan en factor alguna v_λ con $\lambda \geqq r + 2$ o tengan en factor v_{r+1} y v_λ de índice $\leqq r$ o bien tengan únicamente estos últimos factores.

La última clase de términos no tiene interés porque se agrega a los términos provenientes de la hipótesis 1º por definir un punto que no varía al variar la v_λ de índice $> r$.

Cada producto de factores v_λ con $\lambda \geqq r + 1$ define por opuesto un grupo de términos que definen un punto de $S(p, r)$ distinto de ese primero. Si en tal producto existe un factor cuyo índice λ sea $\geqq r + 2$, disminuyendo en una unidad este λ se obtiene un grupo de términos análogo referente a $S(p-1, r)$; y el correspondiente desplazamiento en los exponentes ρ_i produce sólo la multiplicación de todos los coeficientes $C_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots sk}$ por un mismo factor. Por cuanto puede operarse el paso inverso de los términos referentes a $S(p-1, r)$ conteniendo un factor v_λ con $\lambda \geqq r + 1$ a términos referentes a $S(p, r)$ con un factor v_λ, $\lambda \geqq r + 2$, se sigue que los puntos así definidos como pertenecientes a $S(p,r)$ ya pertenecen a $S(p-1,r)$.

Quedan luego por considerar sólo los términos de (5. 6) en los cuales existe algún factor v_{r+1} y además sólo factores de índice menor. Agrupamos todos los términos en los que aparece una misma potencia de v_{r+1}: sea $v^{\rho}{}_{r+1}$; tendremos de ellos un grupo de términos referentes a $S(p-1,r)$ en los cuales aparece $v_{r+1}^{\rho-1}$ multiplicado por factores dependientes de índices $\lambda \leqq r$; pero en la expresión análoga a (5. 6) para $d^{p-1}x/du^{p-1}$ aparece necesariamente entre los multiplicadores de $v_{r+1}^{\rho-1}$ un término $\dfrac{(p-1)!}{(\rho-1)!}$ $F_{p-(\rho-1)r-1}^{\rho-1}$ que no puede provenir del multiplicador de $v^{\rho}{}_{r+1}$ en (5. 6), pues los términos de esta procedencia contienen el factor v_r. Se sigue que el grupo de términos considerado define un punto de $S(p,r)$ no existente en $S(p-1,r)$.

El factor v_{r+1} se encuentra en los términos de (5. 6) con los exponentes

$$1,\ 2,\ \ldots, \operatorname{ent}\left[\frac{p}{r+1}\right] = \nu.$$

Inferimos luego que

$$\sigma(p,r) - \sigma(p-1,r) = \nu + 1. \tag{5. 8}$$

Sea

$$\mu = p - (r+1)\,\nu;$$

será

$$\operatorname{ent}\left[\frac{p-x}{r+1}\right] = \nu \qquad \text{para } 0 \leqq x \leqq \mu$$

$$\operatorname{ent}\left[\frac{p-x}{r+1}\right] = \nu - i \qquad \text{para } \mu + i\,(r+1) - r \leqq x \leqq \mu + i\,(r+1)$$
$$i = 1, 2, \ldots, \nu - 1.$$

Por tanto, utilizando (5. 8) como fórmula recurrente, se tiene

$$\begin{aligned}\sigma(p,r) - \sigma(r,r) &= (\mu+1)\,(\nu+1) \\ &\quad + (r+1)\,(\nu + (\nu-1) + (\nu-2) + \ldots + 2) \\ &= (\mu+1)\,(\nu+1) + (r+1)\,\frac{(\nu+2)(\nu-1)}{2}.\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\sigma(r, r) = r;$$

luego, finalmente

$$\sigma(p, r) = (\mu+1)(\nu+1) + (r+1)\frac{(\nu+2)(\nu-1)}{2} + r$$
$$= \frac{(\nu+1)(p+\mu+2)}{2} - 1.$$

Aunque en el razonamiento se han excluído los casos $r = 0, 1$. se nota por el cálculo directo y comparando con (5. 3) y (5. 4), que la fórmula queda válida también para estos casos.

Tenemos así el teorema general (*):

La dimensión de los espacios $S(p, r)$ se expresa por

$$\sigma(p, r) = \frac{(\nu+1)(p+\mu+2)}{2} - 1,$$

siendo

$$\nu = \text{ent}\left[\frac{p}{r+1}\right], \quad \mu = p - (r+1)\nu.$$

(*) Este resultado se encuentra sin demostración en MENDEL, *The dimensionality of a certain linear space in the Projective Differential Geometry of a variety in Hyperspace*, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 36, (1930), pág. 219. Ver también, LANE, *A Treatise of Projective Differential Geometry*, Chicago 1942, pág. 399.

§ 2. ALGUNOS TEOREMAS PRELIMINARES

6. Una fórmula general. — En un espacio de dimensión bastante elevada consideremos dos series ∞^1 de variedades $\{U_p{}^t\}$, $\{V_q{}^s\}$ de los órdenes respectivos t, s, estando cada serie en correspondencia biunívoca y algebraica (proyectiva) con un mismo parámetro u. Las dos series llenarán dos variedades respectivamente $W^\tau{}_{p+1}$, $Z^\sigma{}_{q+1}$. Supongamos que para un punto genérico de $W^\tau{}_{p+1}$ pasan precisamente μ variedades $U_p{}^t$ y para un punto de $Z^\sigma{}_{q+1}$ pasan ν variedades $V_q{}^s$. Finalmente supondremos, por simplicidad que los espacios ambientes de $W^\tau{}_{p+1}$ y $Z^\sigma{}_{q+1}$ son independientes, de manera que si π y χ son sus dimensiones respectivas el sistema total considerado está contenido en un $[\pi+\chi+1]$.

Consideremos ahora la variedad constituída por el sistema de todas las rectas que unen puntos de una $U_p{}^t$ y una $V_q{}^s$ correspondientes al mismo valor del parámetro u; será una T^ρ_{p+q+2} contenida en dicho $[\pi+\chi+1]$, de la cual nos proponemos determinar el orden ρ.

Notemos que dos generatrices de T no pueden cortarse fuera de $W^\tau{}_{p+1}$ o $Z^\sigma{}_{q+1}$; en efecto, en la hipótesis contraria se tendrían dos pares de puntos respectivamente de $W^\tau{}_{p+1}$ y $Z^\sigma{}_{q+1}$ sobre un plano el cual contendría luego un punto común a los espacios ambientes de dichas variedades, contra las hipótesis anteriores. También se nota que los puntos de apoyo de una generatriz genérica de T^ρ_{p+q+2} sobre $W^\tau{}_{p+1}$ y $Z^\sigma{}_{q+1}$ determinan unívocamente un par de $U_p{}^t, V_q{}^s$ correspondientes y por lo tanto un valor del parámetro u; en efecto, el primero de estos puntos sobre $W^\tau{}_{p+1}$ pertenece, por hipótesis, a un número finito, μ, de $U_p{}^t$, a las cuales corresponden igual número de $V_q{}^s$, de las que a lo menos una pasa por el segundo punto de apoyo. Los puntos de intersección de estas $V_q{}^s$ —que podrían también no existir— constituyen en todo caso una variedad de dimensión $\leqq q-1$, por cuya razón, si la generatriz es genérica será una sola la $V_q{}^s$ por dicho punto. Con mayor precisión, si del punto considerado de $W^{\tau}{}_{p+1}$ se proyectan esos eventuales puntos de intersección, se obtiene una variedad de dimensión $\leqq q$ (contenida en $T^{\rho}{}_{p+q+2}$); y al variar luego el punto sobre W_{p+1} se genera una variedad de dimensión $\leqq p+q+1$, que podría también no existir y que llamaremos R.

Para determinar el orden de $T^{\rho}{}_{p+q+2}$ vamos a contar el número de sus puntos de intersección con un $[\pi+\chi-p-q-1]$ genérico del $[\pi+\chi+1]$ ambiente; podrá siempre elegirse este $[\pi+\chi-p-q-1]$ de manera que no tenga puntos comunes con R, ni con $W^{\tau}{}_{p+1}$, ni con $Z^{\sigma}{}_{q+1}$; en estas condiciones cada uno de sus puntos de intersección con T determina, por la generatriz que lo contiene, un valor del parámetro u.

Observamos ahora que proyectando de ese $[\pi+\chi-p-q-1]$ la $U_p{}^t$ que corresponde a un valor arbitrario de u, sea u_1, se obtiene una variedad cónica de dimensión $\pi+\chi-q$ y orden t, que cortará $Z^{\sigma}{}_{q+1}$ en σt puntos, para los cuales pasan $\sigma t\nu$ variedades $V_q{}^s$ determinando igual número de valores u_2 de u. Uno de estos será u_1 siempre y sólo cuando u_1 corresponda, por lo dicho, a un punto de intersección del $[\pi+\chi-p-q-1]$ con T. Si se repite el razonamiento partiendo de un valor u_2 y de la $V_q{}^s$ correspondiente: se determinarán $\tau s\mu$ valores de u_1.

La correspondencia entre los u_1 y los u_2 es luego una $(\sigma t\nu; \tau s\mu)$ y tiene $\sigma t\nu+\tau s\mu$ coincidencias. Resulta

$$\rho=\sigma t\nu+\tau s\mu.$$

Podemos ahora eliminar la hipótesis de que los espacios de $W^{\tau}{}_{p+1}$ y $Z^{\sigma}{}_{q+1}$ sean independientes, observando que si, en la contraria hipótesis, los dos espacios se cortan según un $[\delta]$ y están luego contenidos en un $[\pi+\chi-\delta]$, eligiendo otro $[\delta]$ sin puntos comunes con este espacio, podrán las dos variedades W y Z considerarse como proyecciones desde este $[\delta]$ de otras W' y Z', proyectivamente idénticas a las dadas respectivamente, más contenidas en espacios $[\pi]$ y $[\chi]$ independientes. Si entonces se considera la variedad T' de las rectas que unen puntos de variedades correspondientes U' y V', proyecciones de las U y V dadas sobre W' y Z' y luego se proyecta nuevamente todo el sistema sobre el primer $[\pi+\chi-\delta]$, desde ese $[\delta]$ tomado como centro de proyección, la variedad proyección de T' será la $T^{\rho}{}_{p+q+2}$; en la proyección todos los números anteriores se conservan, con la única excepción que, si el centro de proyección contiene i puntos de T, el orden ρ disminuye en i unidades. Si este caso ocurre, igual número de puntos en la proyección son al mismo iempto proyecciones de un punto de una U_p^t y uno de la V_q^s correspondientes. Se tiene pues el teorema:

Si dos sistemas algebraicos ∞^1 *de variedades* $\{U\}$, $\{V\}$ *de órdenes respectivos* t *y* s *en correspondencia homográfica llenan dos variedades* W, Z *de órdenes respectivos* τ *y* σ, *de manera que por un punto genérico de* W *pasan* μ *variedades* U *y por un punto genérico de* Z *pasan* ν *variedades* V *(lo que puede expresarse de modo intuitivo diciendo que* W *y* Z *son múltpiles, con multiplicidades respectivas* μ *y* ν*); si además* W *y* Z *tienen puntos comunes pertenecientes a* i *pares* U, V *correspondientes (teniendo en cuénta las respectivas multiplicidades) el orden de la variedad reglada constituída por las rectas que unen los puntos de los pares* U, V *correspondientes se expresa por*

$$\rho = \sigma t \nu + \tau s \mu - i. \tag{6.1}$$

Si en particular W y Z son curvas, y por consiguiente U y V puntos, será necesariamente $t = s = \mu = \nu = 1$ y la fórmula se simplifica en

$$\rho = \sigma + \tau - i. \tag{6.2}$$

7. Algunas aplicaciones de la fórmula anterior. — Como primera aplicación, vamos a determinar el *orden de la variedad generada por los* $[p]$*-osculadores de una curva racional normal*

$$P_0 + t P_1 + t^2 P_2 + \ldots + t^n P_n. \tag{7.1}$$

Procedemos por inducción considerando primero el orden de la desarrollable de las tangentes, que puede definirse como la superficie generada por las rectas que unen puntos correspondientes al mismo valor de t de la curva (7.1) y de la derivada (*)

(*) Por comodidad expositiva esta derivada se ha calculado introduciendo en (7.1) una variable de homogeneidad, y derivando respecto de ella, la que después se puso nuevamente $= 1$; el procedimiento equivale evidentemente (por el teorema de Euler) a derivar respecto de t y tomar luego, en lugar de esta derivada inmediata, la curva (7.2) combinación lineal de ella y de la primitiva (7.1).

$$n\,P_0 + (n-1)\,t\,P_1 + (n-2)\,t^2 P_2 + \ldots + t^{n-1} P_{n-1}. \qquad (7.2)$$

Bastará aplicar la fórmula (6. 2) donde debe ponerse

$$\sigma = n, \qquad \tau = n-1;$$

las dos curvas tienen común el punto P_0 y la tangente en él (cfr. n. 2); por lo tanto tendremos $i \geqq 1$, y la tangente común deja pensar en la posibilidad de $i=2$. Para decidir es necesario aplicar el procedimiento de proyección indicado en el n. anterior.

Indicando con Q un punto fuera del espacio $P_0, P_1, \ldots, P_n$, la curva

$$(n\,P_0 + Q) + (n-1)\,t\,P_1 + (n-2)\,t^2 P_2 + \ldots \qquad (7.3)$$

es una proyección de (7. 2), y se ve fácilmente que no tiene puntos comunes con (7. 1); la reglada definida por los puntos de las curvas (7. 1), (7. 3) correspondientes al mismo valor de t contiene la recta

$$\lambda\,P_0 + (n\,P_0 + Q) = (\lambda + n)\,P_0 + Q$$

que pasa por Q y la recta infinitamente próxima

$$\lambda\,(P_0 + \tau\,P_1) + (n\,P_0 + Q + (n-1)\,\tau\,P_1) = (\lambda + n)\,P_0 + \\ (\lambda + n - 1)\,\tau\,P_1 + Q,$$

donde τ es un infinitésimo que permite despreciar las potencias >1; esta recta no pasa por Q; se sigue que, al proyectar desde Q el sistema formado por (7. 1), (7. 3) y la reglada que las une, el punto P_0 común a (7. 1), (7. 2) representa una sola generatriz. Obtenemos por tanto el orden

$$n + (n-1) - 1 = 2\,(n-1).$$

Para obtener ahora la variedad de los [2]-osculadores a (7. 1) deberán considerarse los planos que unen elementos correspondientes de la reglada

$$(\mu + n)\,P_0 + (\mu + n - 1)\,t\,P_1 + (\mu + n - 2)\,t^2 P_2 + \ldots \qquad (7.4)$$

y de la curva segunda derivada

$$n(n-1)P_0 + (n-1)(n-2)tP_1 + (n-2)(n-3)t^2P_2 + \ldots; \quad (7.5)$$

deberá ponerse en (6.1)

$$\sigma = 2(n-1), \qquad \tau = (n-2), \qquad t = \nu = s = \mu = 1;$$

para determinar i deberá repetirse el razonamiento anterior sustituyendo a (7.5) la proyección

$$(n(n-1)P_0 + Q) + (n-1)(n-2)tP_1 + \ldots$$

y se notará que pasan por Q el plano

$$\lambda(\mu+n)P_0 + (n(n-1)P_0 + Q)$$

y el infinitamente próximo

$$\lambda(\mu+n)P_0 + \lambda(\mu+n-1)\tau P_1$$
$$+ (n(n-1)P_0 + Q) + (n-1)(n-2)\tau P_1;$$

pero no el sucesivo; se tendrá luego $i = 2$

$$\rho = 2(n-1) + (n-2) - 2 = 3(n-2).$$

El razonamiento prosigue evidentemente por inducción obteniéndose para los $[p]$-osculadores la fórmula general

$$\rho = (n-p)(p+1). \quad (7.6)$$

Es decir: *el orden de la variedad generada por los* $[p]$*-osculadores de la curva racional normal de orden* n *está dado por* (7.6).

Hay que observar que si $p = n-1$, la variedad de los $[n-1]$-osculadores llena el $[n]$ ambiente de la curva; entonces el número $\rho = n$ representa el número de $[n-1]$-osculadores que pasan por un punto, o sea, la multiplicidad del $[n]$ ambiente.

8. Apliquemos ahora los resultados de los nos. 6 y 7 a resolver este otro problema: se tienen dos curvas racionales norma-

les C_1, C_2 de órdenes n_1 y n_2 y contenidas en espacios $[n_1], [n_2]$ independientes (o, por lo menos, suponemos que las dos curvas no tienen puntos comunes); suponemos establecida una correspondencia proyectiva entre las dos curvas y correlativamente una entre los $[p_1]$-osculadores a C_1 y los $[p_2]$-osculadores a C_2, siendo correspondientes los espacios osculadores en puntos correspondientes; se trata de determinar el orden de la variedad de los $[p_1+p_2+1]$ determinados por estos espacios correspondientes.

Bastará aplicar (6.1) con $i=0$, $t=s=\mu=\nu=1$ y dando a σ y τ los valores que corresponden por (7.6). Se obtiene

$$\rho=(n_1-p_1)(p_1+1)+(n_2-p_2)(p_2+1). \tag{8.1}$$

Supongamos ahora que el problema análogo se ponga considerando un número cualquiera de curvas racionales normales en espacios independientes, de los órdenes $n_1, n_2, \ldots, n_r$ y las variedades respectivamente de los $[p_i]$-osculadores $(i=1,2,\ldots,r)$ a los mismos puestos en correspondencia proyectiva; y supongamos que se pida el orden ρ de la variedad de los $[\Sigma p_i+r-1]$ determinados por estos $[p_i]$ correspondientes. Procediendo por inducción como en el n. 7 se obtiene

$$\rho=\sum_{i=1}^{r}(n_i-p_i)(p_i+1). \tag{8.2}$$

Se puede, por tanto, enunciar el teorema:

Sean r curvas racionales normales de órdenes respectivos $n_1, n_2, \ldots, n_r$ referidas entre sí proyectivamente. Consideremos en puntos homólogos los espacios osculadores de órdenes $p_1, p_2, \ldots, p_r$ $(p_i<n_i)$ respectivamente y supongamos que estos espacios osculadores no tengan entre sí punto común. En estas condiciones los espacios lineales de dimensión Σp_i+r-1 determinados como suma de cada grupo de espacios osculadores homólogos, describirán una variedad de dimensión Σp_i+r y de orden dado por (8.2).

Ejemplos. 1°. Supongamos una cúbica racional normal C_3 y una cónica C_2 cuyos espacios ambientes no tengan punto común y entre cuyos puntos exista una correspondencia proyectiva. Consideremos los planos determinados por cada tangente de C_3 y el punto homólogo de C_2. El lugar geométrico descrito por todos estos planos será una V_3 cuyo orden se puede calcular por la fórmula (8.2) poniendo $n_1=3$, $p_1=1$, $n_2=2$, $p_2=0$. Resulta que dicho orden es 6.

2º. Consideremos en cambio la V_3 engendrada por los planos determinados por las tangentes de C_2 y los puntos homólogos de C_3, será $n_1=2$, $p_1=1$, $n_2=3$, $p_2=0$ y el orden de dicha V_3 será igual a 5.

§ 3. VARIEDADES ENGENDRADAS POR LOS [2] Y [3]-OSCULADORES EN UN PUNTO A LAS CURVAS DE UNA SUPERFICIE QUE PASAN POR EL MISMO

Las variedades descritas por los [2] y [3]-osculadores a las curvas de una superficie que pasan por un punto han sido ya estudiadas, respectivamente, por *Del Pezzo* (*) y *C. Segre* (**).

Sin embargo vamos a obtener de nuevo los resultados de estos autores utilizando nuestras notaciones, para que sirvan de ejemplo e introducción de la marcha que vamos a seguir en los casos sucesivos. Al mismo tiempo estudiaremos algunos casos de degeneración que no fueron considerados por los autores mencionados.

9. VARIEDAD ENGENDRADA POR LOS [2] OSCULADORES A LAS CURVAS DE UNA SUPERFICIE EN UN PUNTO COMÚN. — Según lo dicho en el n.º 4 y según (4.8), la variedad engendrada por todos los planos osculadores en el punto x a las curvas de una superficie $x=x(u,v)$ que pasan por el mismo, es la variedad determinada por los tres puntos

$$\mathrm{I}:\ x, \qquad \mathrm{II}:\ x_u+x_v v_1, \qquad \mathrm{III}:\ F_2+F_1{}^1 v_2, \tag{9.1}$$

al variar v_1 y v_2 a todos los valores posibles.

Fijando primeramente v_1 y haciendo variar v_2, o sea, considerando únicamente las curvas de la superficie con una misma tangente fija, los puntos I y II se mantienen fijos y el III describe la recta que une los puntos F_2 y $F_1{}^1$. Por tanto los pla-

(*) DEL PEZZO, *Sugli spazi tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio di più dimensioni*, R. A. Napoli, XXV, 1886, pág. 176. Ver también LANE, loc. cit., pág. 392.

(**) C. SEGRE, *Su una classe di superficie degl'iperspazii legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2º ordine*, Accad. Reale Sc. Torino, vol. XLII, 1907. Ver también LANE, loc. cit. pág. 397.

nos osculadores describirán un haz cuyo eje es la recta determinada por los puntos I y II, o sea, llenarán un [3]. Este [3] será el $S(2,1)$ (n.º 5).

Como, según (4.4), es $F_1^1 = x_v$ y el punto III para $v_2 = \infty$ coincide con el F_1^1, el $S(2,1)$ anterior puede considerarse definido por los puntos

$$\mathrm{I}_a\colon\ x, \qquad \mathrm{II}_a\colon\ x_u, \qquad \mathrm{III}_a\colon\ x_v, \qquad \mathrm{IV}_a\colon\ F_2. \tag{9.2}$$

Los tres primeros determinan un plano fijo (el plano tangente a la superficie en el punto x considerado) y el último punto

$$F_2 = x_{uu} + 2x_{uv}v_1 + x_{vv}v_1^2 \tag{9.3}$$

al variar v_1 describe una cónica contenida en el plano determinado por los puntos x_{uu}, x_{uv}, x_{vv}. Por tanto (*):

La variedad engendrada por los planos osculadores en un punto a las curvas de una superficie que pasan por el mismo, es el cono de 2º. orden y dimensión 4 que desde el plano tangente proyecta los puntos de la cónica (9.3).

10. Casos de degeneración. — El cono V_4^2 anterior puede degenerar en dos casos:

a) *Cuando el plano de la cónica* (9.3) *tenga punto común con el plano tangente a la superficie.* Si estos planos unicamente tienen un punto común, ellos determinan un [4] que debe contener a la variedad de los planos osculadores, la cual, siendo de dimensión 4, degenerará en este [4]. En este caso, los puntos $x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{uv}, x_{vv}$, por estar contenidos en un [4], no son independientes y existe por tanto una relación de la forma

$$Ax + Bx_u + Cx_v + Dx_{uu} + Ex_{uv} + Fx_{vv} = 0. \tag{10.1}$$

Para todos los puntos $x(u,v)$ de la superficie para los que

(*) Esta variedad fué estudiada por primera vez por Del Pezzo, loc. cit. Ver también Lane, loc. cit., pág. 392. Mas generalmente, la variedad engendrada por los planos osculadores en un punto a las curvas de una variedad de dimensión m, es un cono de dimensión $2m$ y orden 2^{m-1} Ver Lane, loc. cit. pág. 403.

se cumpla una relación de la forma (10. 1), el cono cuádrico de los planos osculadores a las curvas que pasan por ellos, degenera en un [4] (*).

Si el plano tangente y el de la cónica (9. 3) tienen una recta común, los dos planos determinan un [3] en el cual degenera la variedad de los planos osculadores. Para que esto ocurra es necesario y suficiente que se cumplan dos relaciones de la forma (10. 1).

b) *Cuando la cónica* (9. 3) *degenera en una recta.* Entonces la variedad de los planos osculadores se reduce al [4] determinado por el plano tangente y esta recta. Para que la cónica (9. 3) se reduzca a una recta, como x_{uu}, x_{vv} son dos puntos de la cónica (correspondientes a $v_1=0$, $v_1=\infty$) y x_{uv} es el punto de intersección de las tangentes en ellos, bastará que exista una relación de la forma

$$Ax_{uu}+Bx_{uv}+Cx_{vv}=0. \tag{10.2}$$

11. Variedad de los [3] - osculadores a las curvas de una superficie en un punto. — Según el nº. 4 y (4. 8) el [3]-osculador en el punto x a una curva de la superficie $x=x(u,v)$ está determinado por los cuatro puntos

$$\mathrm{I}:\ x,\qquad \mathrm{II}:\ F_1,\qquad \mathrm{III}:\ F_2+F_1{}^1 v_2,\qquad \mathrm{IV}:\ F_3+3F_2{}^1 v_2+F_1{}^1 v_3. \tag{11.1}$$

Al variar v_1, v_2, v_3 entre todos los valores posibles, o sea, al considerar todas las curvas de la superficie que pasan por el mismo punto x, el [3] determinado por los puntos (11. 1) describirá la variedad $W(3,0)$ de dimensión 6 que es la que queremos estudiar.

Supongamos primero que v_1 y v_2 permanecen fijos y hagamos variar v_3. El punto describirá una recta, mientras el plano de los puntos I, II, III permanece fijo. Por tanto: *la variedad $W(3,2)$ descrita por los [3]-osculadores en un punto a todas las curvas de una superficie que pasan por el mismo y*

(*) C. Segre, loc. cit., ha estudiado las superficies tales que para todos sus puntos se verifica la relación (10.1).

tienen en él un plano osculador común, es un [4], *que coincide con el* $S(3,2)$ (n.º 5).

Veamos ahora la variedad descrita por estos $S(3,2)$ al variar v_2, quedando fijo todavía v_1. Como la recta descrita por el punto IV al variar v_3 pasa por el punto $F_1{}^1$ (correspondiente a $v_3 = \infty$) para cualquier valor de v_2, cada $S(3,2)$ puede venir determinado por los 5 puntos:

$$\mathrm{I}_a\colon x, \quad \mathrm{II}_a\colon F_1, \quad \mathrm{III}_a\colon F_1{}^1, \quad \mathrm{IV}_a\colon F_2, \quad \mathrm{V}_a\colon F_3 + 3F_2{}^1 v_2. \qquad (11.2)$$

Al variar v_2, manteniendo fijo v_1, los 4 primeros puntos (11.2) se conservan fijos, mientras el punto V_a describe la recta que une el punto F_3 con el $F_2{}^1$. Por tanto:

La variedad $W(3,1)$ *descrita por los* [3]-*osculadores en un punto a las curvas de una superficie que tienen en él una misma tangente, es un* [5], *que coincide, en consecuencia, con el* $S(3,1)$.

Como este [5] contiene el punto $F_2{}^1$, en lugar de los puntos (11.2) se puede también definir por

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}_b\colon x, && \mathrm{II}_b\colon F_1, && \mathrm{III}_b\colon F_1{}^1, \\ &\mathrm{IV}_b\colon F_2{}^1, && \mathrm{V}_b\colon F_2, && \mathrm{VI}_b\colon F_3. \end{aligned} \qquad (11.3)$$

Veamos ahora la variedad descrita por estos [5] al variar v_1. Como $F_1{}^1 = x_v$, $F_1 = x_u + x_v v_1$, en lugar de los puntos (11.3) pueden tomarse también

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}_c\colon x, && \mathrm{II}_c\colon x_u, && \mathrm{III}_c\colon x_v, \\ &\mathrm{IV}_c\colon F_2{}^1, && \mathrm{V}_c\colon F_2, && \mathrm{VI}_c\colon F_3. \end{aligned} \qquad (11.4)$$

Al variar v_1, los 3 primeros permanecen fijos y determinan el plano tangente a la superficie en el punto x considerado. El punto F_2 describe la cónica (*)

$$F_2(v_1) = x_{uu} + 2x_{uv} v_1 + x_{vv} v_1{}^2 \qquad (11.5)$$

(*) Obsérvese, de una manera general, que por ser, según (4.5), $F_r{}^i$ igual salvo un factor constante a la derivada $\dfrac{\partial^i F_r}{\partial v_1{}^i}$, el punto F_{r_i} está sobre el espacio $[i]$ osculador a la curva descrita por el punto F_r al variar v_1.

y $F_2{}^1$ es un punto situado sobre la tangente a la misma en el punto correspondiente a cada valor v_1 (*).

El punto F_3 describe la cúbica

$$F_3(v_1) = x_{uuu} + 3x_{uuv}\,v_1 + 3x_{uvv}\,v_1{}^2 + x_{vvv}\,v_1{}^3. \qquad (11.6)$$

Por tanto, para cada valor de v_1, los 3 últimos puntos de (11.4) determinan el plano que contiene la tangente a la cónica (11.5) y el punto correspondiente al mismo valor de v_1 de la cúbica (11.6). Al variar v_1, según el teorema del nº. 8 (ejemplo 2º.), este plano describirá una $V_3{}^5$.

Teniendo en cuenta los resultados generales del nº. 5 se puede por tanto enunciar:

La variedad $W(3,0)$ *descrita por los* [3]-*osculadores en un punto a las curvas de una superficie que pasan por el mismo es una* $V_6{}^5$ *contenida en un* [9]. *Esta variedad coincide con la descrita por los espacios* $S(3,1)$ *al variar la tangente* (**).

Según lo dicho, esta $V_6{}^5$ es el cono obtenido proyectando desde el plano tangente como vértice, la $V_3{}^5$ engendrada por los planos determinados por las tangentes a la cónica (11.5) y los puntos homólogos de la cúbica (11.6).

Puede ser interesante observar que la $V_3{}^5$ mencionada tiene como puntos dobles todos los puntos del plano de la cónica $F_2(v_1)$ (11.5). En efecto, proyectemos la $V_3{}^5$ desde un punto cualquiera de dicho plano sobre un hiperplano; $F_3(v_1)$ se proyectará según otra cúbica $F_3{}^*(v_1)$ y el plano de $F_2(v_1)$ según una recta; la $V_3{}^5$ se proyecta por tanto según la variedad obtenida proyectando desde esta recta los puntos de $F_3{}^*(v_1)$, o sea es una

(*) En lo sucesivo indicaremos simplemente con $F_i{}^h$ el punto genérico definido por esta expresión, y por F (v_1) la curva descrita por este punto al variar v_1.

(**) Como ya dijimos este resultado se encuentra en C. SEGRE, loc. cit. Ver también, LANE, loc. cit. pág. 397. Si en lugar de una superficie se considera una variedad de dimensión m, la variedad engendrada por los [3]— osculadores a las curvas de la misma que pasan por un punto es de dimensión $3m$ y de orden

$$\sum_{k-1}^{m} 3^{k-1} \binom{2m-k-1}{m-1}$$

Ver E. BOMPIANI, *loc. cit.* pág. 7.

V_3^3. Puesto que el orden ha disminuido en dos unidades, el centro de proyección es doble para V_3^5.

En consecuencia la $W(3,0)$ tendrá como doble el [5] que desde el plano tangente proyecta el plano de la cónica $F_2(v_1)$; este [5] es el espacio ambiente del cono $W(2,0)$. Por un cambio de parámetros u, v, cambia el plano de la cónica $F_2(v_1)$, quedando empero, siempre dentro de ese [5]; se realiza así la necesaria invariancia respecto un cambio de parámetros, de las conclusiones geométricas.

12. Casos de degeneración de la variedad de los [3] - osculadores a las curvas de una superficie por un punto. — Haremos todavía una rápida reseña de los posibles casos de degeneración, sobre la cual podrá amoldarse el problema análogo para las variedades osculadoras de mayor dimensión sin que tengamos que detenernos mayormente al tratar de estas variedades superiores.

Debe notarse que en todos los casos las variedades que estudiamos quedan definidas por asignar cierta correspondencia entre puntos de curvas racionales normales. Observando que tales curvas definen automáticamente la dimensión del espacio que las contiene y que por una transformación proyectiva de ese espacio dos curvas racionales normales de igual grado se cambian una en la otra llevándose a coincidir los puntos correspondientes en una relación proyectiva cualquiera previamente establecida entre ellas, resulta que la degeneración puede ocurrir solamente por efecto de una reducción de la dimensión de los espacios considerados, por efecto de dependencias lineales entre los puntos definidos por las derivadas parciales sucesivas del punto x respecto de los parámetros u, v. Es evidente que tales eventuales dependencias lineales se conservan por un cambio de parámetros.

En seguida se deben distinguir dos casos según que la degeración ya se manifieste en la $W(2,0)$, o bien sea esta normal.

1º. Se sabe que la $W(2,0)$ degenera en un [4] por el plano tangente cuando la $F_2(v_1)$ se reduce a una recta. Si la $F_3(v_1)$ no presenta degeneración, la $W(3,0)$ se reduce a la proyección de esta $F_3(v_1)$ desde dicho [4]; es por lo tanto una V_6^3 contenida en un [8].

2º. Si la $W(2,0)$ no es degenerada, una distinción es todavía necesaria, según que: a) $F_3(v_1)$ no tiene puntos comunes con la $F_2(v_1)$; b) $F_3(v_1)$ tiene puntos comunes con $F_2(v_1)$; c) $F_3(v_1)$ es degenerada en una curva plana.

a) En este caso no se presenta otra novedad que una reducción de la dimensión del espacio ambiente de la $W(3,0)$ en una, dos o tres unidades.

b) Si puntos comunes a $F_3(v_1)$ y $F_2(v_1)$ corresponden al mismo valor de v_1, en la aplicación de la fórmula (6.2) aparece un valor de $i>0$, implicando una reducción del orden de $W(3,0)$. Tal reducción no producen al contrario eventuales puntos comunes que corresponden, para las dos curvas, a valores distintos de v_1, presentándose entonces solamente la formación de puntos múltiples de $W(3,0)$. En el primer caso el valor de v_1 que caracteriza el punto común define una dirección tal que las curvas de la superficie tangentes a ellas tienen plano osculador con contacto más elevado (cuadripunto).

c) La degeneración de la $F_3(v_1)$ puede ocurrir simplemente porque ésta se cambie en una cúbica plana o porque la curva reduzca el orden. En el primer caso se produce en general sólo una singularidad en la $W(3,0)$ debida al punto doble de la cúbica. El segundo caso se produce porque, al expresar las x_{u^3}, x_{u^2v}, x_{uv^2}, — como combinaciones lineales de tres puntos del plano de la curva, se separa en los coeficientes un factor común función lineal de v_1 (en caso de ser 0 todas las coordenadas de x_{v^3} debería considerarse tal el factor $v_1 - \infty$). El orden deducido de la aplicación de (6.1) se reduce en una unidad (salvo mayor particularización), pero se presenta una particularidad análoga a la última observada en b) para todas las curvas tangentes a la dirección que corresponde al valor de v_1 que anula el factor aludido.

No consideramos interesante entrar en mayores detalles.

§ 4. VARIEDAD ENGENDRADA POR LOS [4] - OSCULADORES EN UN PUNTO A LAS CURVAS DE UNA SUPERFICIE QUE PASAN POR EL MISMO

13. VARIEDAD DE LOS [4] - OSCULADORES. — El [4]-osculador en el punto x a la curva definida por la función $v=v(u)$, contenida en la superficie $x=x(u,v)$, vimos en el nº. 2 que es el determinado por los puntos

$$\begin{aligned}
&\text{I}: \ x,\\
&\text{II}: \ F_1,\\
&\text{III}: \ F_2+F_1{}^1 v_2,\\
&\text{IV}: \ F_3+3F_2{}^1 v_2+F_1{}^1 v_3,\\
&\text{V}: \ F_4+6F_3{}^1 v_2+3F_2{}^2 v_2{}^2+4F_2{}^1 v_3+F_1{}^1 v_4.
\end{aligned} \tag{13.1}$$

Queremos estudiar las variedades $W(4,i)$ (n. 4) descritas por estos [4]-osculadores al considerar todas las curvas de la superficie que pasan por el punto x.

Si v_1, v_2, v_3 permanecen fijos y se hace variar v_4, los espacios (13.1) describen el [5] determinado por los 4 primeros puntos de (13.1) y la recta que describe el punto V al variar v_4. Este [5] es el $S(4,3)$ que coincide con la variedad $W(4,3)$.

Este $S(4,3)$, puesto que contiene el punto $F_1{}^1$ (correspondiente a $v_4=\infty$), puede también determinarse por los puntos

$$\begin{aligned}
&\text{I}_a: \ x,\\
&\text{II}_a: \ F_1, \quad \text{III}_a: \ F_1{}^1,\\
&\text{IV}_a: \ F_2, \quad \text{V}_a: \ F_3+3F_2{}^1,\\
&\text{VI}_a: \ F_4+6F_3{}^1 v_2+3F_2{}^2 v_2{}^2+4F_2{}^1 v_3.
\end{aligned} \tag{13.2}$$

Manteniendo fijos v_1, v_2 y haciendo variar v_3, los puntos I_a, II_a, ... V_a permanecen fijos y el VI_a describe una recta. Por tanto los $S(4,3)$ anteriores, al variar v_3, describen un [6]. Este [6] es el $S(4,2)$ o $W(4,2)$.

Como el espacio lineal $S(4,2)$ contiene el punto $F_2{}^1$ (correspondiente a $v_3 = \infty$), puede considerarse determinado por los puntos

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{I}_b\colon\ x, & & \\
\mathrm{II}_b\colon\ F_1, & \mathrm{III}_b\colon\ F_1{}^1, & \\
\mathrm{IV}_b\colon\ F_2, & \mathrm{V}_b\colon\ F_2{}^1, & \qquad (13.3)\\
\mathrm{VI}_b\colon\ F_3, & \mathrm{VII}_b\colon\ F_4 + 6F_3{}^1 v_2 + 3F_2{}^2 v_2{}^2. &
\end{array}
$$

Manteniendo fijo v_1 y haciendo variar v_2, los 6 primeros puntos de (13.3) permanecen fijos y el VII_b describe una cónica. Por tanto:

La variedad $W(4,1)$, lugar de los [4]-osculadores en el punto x a las curvas de una superficie que tienen una tangente común, es el cono de 2o. orden obtenido proyectando desde el [5] determinado por los 6 primeros puntos de (13.3), la cónica descrita por VII_b (*).

El plano de la cónica VII_b, más el vértice [5], determinan un [8] en el cual está contenida la $W(4,1)$. Este [8] es el $S(4,1)$.

Queda por estudiar la variedad $W(4,0)$ descrita por los [6] determinados por los puntos (13.3), al variar v_1 y v_2.

Siendo $F_1 = x_u + x_v v_1$, $F_1{}^1 = x_v$, en lugar de los puntos (13.3) se pueden tomar los siguientes

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{I}_c\colon\ x, & \mathrm{II}_c\colon\ x_u, & \mathrm{III}_c\colon\ x_v,\\
\mathrm{IV}_c\colon\ F_2, & \mathrm{V}_c\colon\ F_2{}^1, & \mathrm{VI}_c\colon\ F_3, \qquad (13.4)\\
\mathrm{VII}_c\colon\ F_4 + 6F_3{}^1 v_2 + 3F_2{}^2 v_2{}^2. & &
\end{array}
$$

Al variar v_1 y v_2 los puntos I_c, II_c, III_c permanecen fijos: sus combinaciones lineales llenan el plano tangente en x. Los puntos F_2, $F_2{}^1$, F_3 determinan el plano π_1 que pasa por la tangente a la cónica $F_2(v_1)$ en el punto correspondiente al valor v_1 del parámetro y por el punto homólogo de la cúbica $F_3(v_1)$. Este plano π_1, al variar v_1 describe una variedad Σ_1 de 3 dimensiones que ya vimos en no. 8, ejemplo 2o., que es de orden 5. El

(*) Ver Lane, loc. cit. pág. 399.

punto VII_c, al variar v_2 describe una cónica C_1 que pasa por el punto F_4 de la cuártica

$$F_4(v_1)=\sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}\frac{\partial^4 x}{\partial u^{4-i}\,\partial v^i}\,v_1{}^i \tag{13.5}$$

y por el punto fijo $F_2{}^2=x_{vv}$, de manera que las tangentes en estos dos puntos se cortan en el punto $F_3{}^1$ perteneciente a la tangente a la cúbica $F_3(v_1)$ en el punto correspondiente al mismo valor de v_1. Al variar v_1 esta cónica C_1 describirá una superficie Σ_2 cuyo orden es fácil de hallar. Cortemos, en efecto, por un hiperplano que contenga el punto x_{vv} y el [3] de la cúbica $F_3(v_1)$. Este hiperplano cortará a $F_4(v_1)$ en 4 puntos, por cada uno de los cuales pasa una cónica C_1 totalmente contenida en el hiperplano, puesto que en él están los puntos $x_{vv}=F_2{}^2$ y $F_3{}^1$. Fuera de estas 4 cónicas el hiperplano y Σ_2 no pueden tener otro punto común, pues si fuera A uno de ellos, el plano de la cónica C_1 que pasa por A tendría con el hiperplano los puntos comunes A, $F_2{}^2$, $F_3{}^1$ y por tanto toda la C_1 estaría contenida en el hiperplano. Por tanto la sección de Σ_2 con un hiperplano de los considerados se compone de 4 cónicas, luego Σ_2 es de orden 8, o sea, es una $V_2{}^8$.

Para cada valor de v_1 consideremos al cono cuádrico $V_4{}^2$ que desde el plano π_1 proyecta la C_1 correspondiente. Al variar v_1, este cono $V_4{}^2$ describirá una variedad V_5 que, proyectada desde el plano tangente nos dará la $W(4,0)$ buscada. Para hallar el orden de esta V_5 aplicaremos el teorema del n.º 6. En el caso actual la W^{τ}_{p+1} es la Σ_2 y la Z^{σ}_{q+1} es la Σ_1. Por tanto es $\tau=8$, $\sigma=5$, $t=2$, $s=1$, $\mu=\nu=1$. Hay que observar que Σ_1 y Σ_2 tienen común el punto $F_2{}^2=x_{vv}$, que, como todo punto del plano de la cónica F_2, vimos en el nº. 11, que es punto doble para Σ_1; además el plano π_1 que pasa por x_{vv} y la cónica C_1 correspondiente son tangentes en el punto x_{vv}, puesto que la tangente a C_1 es la recta que une x_{vv} con el punto de F_3 correspondiente a $v_1=\infty$ o sea con x_{vvv}, recta contenida en π_1.

Por tanto, el punto x_{vv} hace que en el teorema del nº. 6 se deba tomar $i=4$ (dos unidades por ser x_{vv} doble y dos unidades por la tangencia). Luego el orden de la V_5 mencionada, aplicando (6.1), será igual a 14.

Proyectando esta $V_5{}^{14}$ desde el plano tangente se tiene la

$W(4,0)$. Por tanto, juntando con lo dicho en general en el nº. 5, se tiene:

La variedad $W(4,0)$, *engendrada por todos los* [4]*-osculadores a las curvas de una superficie en un punto, es una variedad de dimensión 8 y orden 14 contenida en un* [14].

El orden de la V_5 anterior puede determinarse por otro método. En efecto, si se corta por un hiperplano de $S(4,0)$, bastará hallar el orden de la V_4 que resulta como sección. Cortemos por un hiperplano H que contenga el [3] en el cual está contenida $F_3(v_1)$ y el plano de $F_2(v_1)$ y corte al [4] que contiene a $F_4(v_1)$ según un [3]. Este hiperplano H cortará a $F_4(v_1)$ en 4 puntos y a Σ_2 según 4 cónicas. A estas cónicas corresponden 4 planos π_1. contenidos en H, desde los cuales proyectando las cónicas respectivas se obtienen 4 conos cuádricos, de dimensión 4, que forman parte de la intersección. Resulta así, como primera parte de la intersección de H con V_5, una variedad de orden 8. Falta ver la parte de la intersección que está contenida en el [6] determinado por el [3] de $F_3(v_1)$ y el plano de $F_2(v_1)$, que hemos dicho pertenece a H.

La V_5 cuyo orden buscamos es el lugar de los [3] determinados por los puntos

$$\begin{aligned} &\mathrm{IV}_c\colon F_2, \quad \mathrm{V}_c\colon F_2{}^1, \quad \mathrm{VI}_c\colon F_3, \\ &\mathrm{VII}_c\colon F_4+6F_3{}^1 v_2+3F_2{}^2 v_2{}^2 \end{aligned} \tag{13.6}$$

al variar v_1 y v_2, y se trata de determinar la parte de esta variedad contenida en el [6] determinado por el [3] de $F_3(v_1)$ y el plano de F_2.

Suponiendo fijado en la (13.6) el valor de v_1, se determina una $V_4{}^2$ componente de la V_5 considerada, cono cuádrico que proyecta del plano-vértice $F_2 F_2{}^1 F_3$ la cónica VII_c; el [6] dicho corta el plano de VII_c según la recta $F_3{}^1 F_2{}^2$, tangente a la cónica en el punto $F_2{}^2$. Se sigue que este [6] tiene en común con la $V_4{}^2$ el [3] $F_2 F_2{}^1 F_2{}^2 F_3$ contado dos veces. Para obtener la intersección buscada bastará ahora hacer variar v_1; $F_2 F_2{}^1 F_2{}^2$ es el plano de la cónica $F_2(v_1)$ y queda fijo. El [3] $F_2 F_2{}^1 F_2{}^2 F_3$ recorre luego la $V_4{}^3$, cono cúbico que del plano-vértice $F_2 F_2{}^1 F_2{}^2$ proyecta la cúbica F_3. Evidentemente este cono debe contarse dos veces en la intersección por ser tal cada [3] generador, y queda en definitiva que H corta a V_5 según una variedad compuesta de 4 conos cuádricos y uno cúbico doble, o sea de orden 8+6=14.

14. Algunas propiedades de la variedad $W(4,0)$. — Vamos a obtener algunas propiedades de la $W(4,0)$ relacionadas con las variedades que hemos visto servían para su determinación. Estas variedades, tales como las Σ_1 y Σ_2, o el plano de la cónica $F_2(v_1)$, no son evidentemente intrínsecas de la $W(4,0)$, sino que dependen de los parámetros elegidos. Sin embargo, debe recordarse que un cambio de parámetros induce en las derivadas parciales de cada orden, una transformación proyectiva, más una combinación lineal con derivadas de orden inferior que puede interpretarse como proyección de los espacios lineales determinados por éstas. Puesto que la generación de las $W(p,q)$ incluye siempre tales proyecciones, como ya tuvimos oportunidad de observar al estudiar la $W(3,0)$ al final del nº. 11 y como lo van a demostrar las consideraciones que siguen para la $W(4,0)$, se reestablece por este camino la necesaria independencia geométrica de la elección de los parámetros.

1º. *Los puntos del plano de la cónica $F_2(v_1)$ son múltiples de orden 6 para la variedad V_5.*

Para ver el orden de multiplicidad de los puntos del plano que contiene la cónica $F_2(v_1)$, proyectemos la variedad V_5 desde uno cualquiera de ellos, sea el punto z, sobre un hiperplano. La cúbica $F_3(v_1)$ se proyecta en otra cúbica $F_3{}^*(v_1)$ y la cuártica $F_4(v_1)$ en otra cuártica $F_4{}^*(v_1)$; el plano que contiene $F_2(v_1)$ se proyecta en una recta R. La variedad Σ_1 (ver nº. 13) se proyecta en la variedad $\Sigma_1{}^*$ engendrada por los planos que desde R proyectan los puntos de $F_3{}^*(v_1)$. La superficie Σ_2 (nº. 13) se proyecta en la superficie engendrada por cónicas $C_1{}^*$ (proyección de las cónicas C_1 del nº. 13) que se apoyan en $F_4{}^*(v_1)$ y que pasan por un punto fijo P de la recta R (punto proyección del x_{vv}) y cuyas tangentes en el punto P y en el punto común con $F_4{}^*(v_1)$ se cortan en los puntos de la cónica $F_3{}^{1*}(v_1)$ proyección de la $F_3{}^1(v_1)$.

Al proyectar desde un plano generador de $\Sigma_1{}^*$ la cónica $C_1{}^*$ correspondiente, como la recta R y $C_1{}^*$ tienen el punto P común, la proyección es el [4] determinado por R, el punto $F_3{}^*$ de la cúbica $F_3{}^*(v_1)$, el punto $F_3{}^{1*}$ de la cónica $F_3{}^{1*}(v_1)$ y el punto $F_4{}^*$ de la cuártica $F_4{}^*(v_1)$.

Puesto que los puntos F_3^* y F_3^{1*}, análogamente a los correspondientes F_3 y F_3^1 de antes de la proyección, determinan la tangente a la cúbica $F_3^*(v_1)$, el plano de los puntos F_3^*, F_3^{1*} y F_4^* es el determinado por una tangente a la cúbica $F_3^*(v_1)$ y el punto correspondiente de la cuártica $F_4^*(v_1)$. Según el teorema del nº. 8, al variar v_1 estos planos engendran una variedad de orden 8. El cono de vértice la recta R y directriz esta última variedad es la proyección de V_5, cuyo orden es, por tanto, igual a 8. Como V_5 es de orden 14, esto quiere decir que el centro de proyección z es punto múltiple de orden 6.

Una confirmación de este resultado se tiene en las observaciones finales del nº. 13, que nos han mostrado a la $W(4,0)$ como proyección, desde el plano tangente, de una V_5 formada por una serie de conos cuádricos, cuyos espacios recorren a su vez un cono cúbico, cortándose los vértices de los dos conos en rectas del plano de $F_2(v_1)$.

Conviene notar que por un cambio de los parámetros u, v la cónica $F_2(v_1)$ puede hacerse pasar por un punto cualquiera de su propio plano; resulta así evidente que los propios puntos de la cónica no tendrán para la $W(4,0)$ multiplicidad particular, aunque en el razonamiento precedente —referido a parámetros determinados— estos puntos, y particularmente el x_{vv} aparezca bajo una posición distinguida.

2º. *Los planos π_1 generadores de Σ_1 son dobles para V_5.* En efecto, proyectando la V_5 sobre un hiperplano desde un punto cualquiera de un plano π_1, se obtiene una V_5^* que únicamente difiere de la V_5 en esto que la variedad Σ_1^* correspondiente a Σ_1 en la proyección es ahora de orden 4 (por ser proyección de Σ_1 que es de orden 5 desde uno de sus puntos). Todo lo demás sigue igual como en el nº. 13 para hallar el orden de V_5, únicamente que ahora será $\tau=8$, $t=2$, $\sigma=4$ y por tanto el orden de V_5^* resulta $8+8-4=12$. Habiendo disminuído el orden en dos unidades, el centro de proyección es punto doble.

Como la $W(4,0)$ es la proyección de V_5 desde el plano tangente, se llega a la conclusión:

La $W(4,0)$ contiene una variedad semicónica doble de orden 5, engendrada por [5], cuyo vértice es un [5] de multiplicidad 6, el cual es cortado según un [4] por cada [5] generador.

15. Las variedades descritas por los $S(4, i)$. — Hemos visto en el n°. 13 que el espacio lineal $S(4,3)$, al variar v_3 describe el nuevo espacio lineal $S(4,2)$. También se vió que, al variar v_2, los espacios lineales $S(4,2)$ describen un cono cuádrico $V_7{}^2$, contenido en un [8] que es el $S(4,1)$.

Falta ver la variedad que describe este $S(4,1)$ al variar v_1, o sea, al variar la tangente a las curvas de la superficie. Como $S(4,1)$ es el espacio de dimensión mínima que contiene todos los puntos de (13. 3) para cualquier valor de v_2, resulta que estará determinado por los puntos

$$\begin{array}{l} x \\ F_1,\ F_1{}^1 \\ F_2,\ F_2{}^1,\ F_2{}^2 \\ F_3,\ F_3{}^1 \\ F_4; \end{array} \qquad (15.1)$$

en lugar de los cuales se pueden tomar

$$\begin{array}{l} x \\ x_u,\ x_v \\ x_{uu},\ x_{uv},\ x_{vv} \\ F_3,\ F_3{}^1 \\ F_4. \end{array} \qquad (15.2)$$

Al variar v_1, los 6 primeros de estos puntos quedan fijos. Los otros 3 definen los planos determinados por las tangentes a la cúbica F_3 y los puntos homólogos de la cuártica F_4; según el n°. 8 estos planos, al variar v_1, engendrarán una variedad de orden 8. Por tanto (*):

Los espacios lineales $S(4,1)$, al variar v_1, describen una $V_9{}^8$ que es el cono que desde el [5] determinado por los 6 primeros puntos de (15. 2) proyecta la $V_3{}^8$ engendrada por los planos determinados por las tangentes de la cúbica $F_3(v_1)$ y los puntos homólogos de la cuártica $F_4(v_1)$.

(*) Ver Lane, loc. cit. pág. 339.

§ 5. VARIEDAD ENGENDRADA POR LOS [5]-OSCULADORES EN UN PUNTO A LAS CURVAS DE UNA SUPERFICIE QUE PASAN POR EL MISMO

16. Estudio de las variedades $W(5,i)$. — Vamos a estudiar las variedades $W(5,i)$ engendradas por los [5]-osculadores en un punto a las curvas de una superficie que pasan por el mismo y tienen en él un $[i]$-osculador común ($i=4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0$).

Según el nº. 4, cada [5]-osculador en el punto x a las curvas de la superficie $x=x(u,v)$ que pasan por él, está determinado por los puntos

$$\begin{aligned}
&\mathrm{I}:\ x, \quad \mathrm{II}:\ F_1, \quad \mathrm{III}:\ F_2+F_1^1 v_2,\\
&\mathrm{IV}:\ F_3+3F_2^1 v_2+F_1^1 v_3,\\
&\mathrm{V}:\ F_4+6F_3^1 v_2+3F_2^2 v_2^2+4F_2^1 v_3+F_1^1 v_4,\\
&\mathrm{VI}:\ F_5+10F_4^1 v_2+15F_3^2 v_2^2+10(F_3^1+F_2^2 v_2)\, v_3\\
&\qquad\qquad +5F_2^1 v_4+F_1^1 v_5.
\end{aligned} \tag{16.1}$$

Si se mantienen fijos v_1, v_2. v_3, v_4 y se hace variar v_5, o sea, si se consideran las curvas de la superficie que pasan por x y tienen en este punto un [4]-osculador fijo común, los primeros 5 puntos de (16.1) permanecen fijos y el VI describe una recta. Por tanto: *La variedad* $W(5,4)$ *es un* [6]. *Ella coincide con* $S(5,4)$.

El punto F_1^1 pertenece a $W(5,4)$ (para el valor $v_5=\infty$) para v_4 arbitrario y por tanto, en lugar de considerar los puntos (16.1), las variedades que llenan una $W(5,3)$ pueden también definirse por los puntos siguientes:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{I}_a:\ x, \quad \mathrm{II}_a:\ F_1, \quad \mathrm{III}_a:\ F_1^1, \quad \mathrm{IV}_a:\ F_2,\\
&\mathrm{V}_a:\ F_3+3F_2^1 v_2,\\
&\mathrm{VI}_a\ F_4+6F_3^1 v_2+3F_2^2 v_2^2+4F_2^1 v_3,\\
&\mathrm{VII}_a:\ F_5+10F_4^1 v_2+15F_3^2 v_2^2+10(F_3^1+F_2^2 v_2)\, v_3+5F_2^1 v_4.
\end{aligned} \tag{16.2}$$

Al variar v_4, manteniendo fijos v_1, v_2, v_3, los 6 primeros puntos (16.2) permanecen fijos y el VII_a describe una recta. Por tanto: *La variedad* $W(5,3)$ *es un* [7]; *ella coincide con* $S(5,3)$.

Como el espacio lineal $W(5,3)$ contiene el punto F_2^1 (correspondiente a $v_4=\infty$) para valores arbitrarios de v_1, v_2, v_3 en lugar de los puntos (16.2), para definir $W(5,3)$ se pueden tomar los siguientes:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{I}_b\colon x, \quad \mathrm{II}_b\colon F_1, \quad \mathrm{III}_b\colon F_1^1,\\
&\mathrm{IV}_b\colon F_2, \quad \mathrm{V}_b\colon F_2^1, \quad \mathrm{VI}_b\colon F_3,\\
&\mathrm{VII}_b\colon F_4+6F_3^1 v_2+3F_2^2 v_2^2,\\
&\mathrm{VIII}_b\colon F_5+10F_4^1 v_2+15F_3^2 v_2^2+10(F_3^1+F_2^2 v_2)\, v_3.
\end{aligned} \tag{16.3}$$

Manteniendo fijos v_1, v_2 y haciendo variar v_3, el espacio lineal $W(5,3)$ definido por los puntos (16.3) describe un [8], puesto que los 7 primeros puntos de (16.3) permanecen fijos y el último describe una recta. Por tanto: *La variedad* $W(5,2)$ *es un* [8]; *ella concide con* $S(5,2)$.

El espacio lineal $W(5,2)$ contiene el punto $F_3^1+F_2^2 v_2$ (correspondiente a $v_3=\infty$) y por tanto, en lugar de los puntos (16.3), para definir $W(5,2)$ se pueden tomar los siguientes:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{I}_c\colon x, \quad \mathrm{II}_c\colon F_1, \quad \mathrm{III}_c\colon F_1^1,\\
&\mathrm{IV}_c\colon F_2, \quad \mathrm{V}_c\colon F_2^1,\\
&\mathrm{VI}_c\colon F_3, \quad \mathrm{VII}_c\colon F_3^1+F_2^2 v_2,\\
&\mathrm{VIII}_c\colon F_4+3F_3^1 v_2,\\
&\mathrm{IX}_c\colon F_5+10F_4^1 v_2+15F_3^2 v_2^2.
\end{aligned} \tag{16.4}$$

Manteniendo fijo v_1, hagamos variar v_2. Los puntos I_c, II_c, ... VI_c permanecen fijos. Los VII_c y VIII_c determinan una recta que, al variar v_2, envuelve una cónica C_1, puesto que las series descritas por los puntos VII_c y VIII_c son proyectivas y coplanares. por tener el punto F_3^1 común. El punto IX_c describe una cónica C_2. Cada tangente de C_1 y el punto correspondiente al mismo valor de v_2 en C_2 determinan un plano, el cual, al variar v_2, por el teorema del nº. 8, describirá una V_3^4. Por tanto, *la variedad descrita por los espacios lineales* $W(5,2)\equiv S(5,2)$ *al variar* v_2, *o sea, la variedad* $W(5,1)$ *es una* $V_9{}^4$ *obtenida proyectando la* $V_3{}^4$ *mencionada desde el* [5] *determinado por los 6 primeros puntos de* (16.4).

Hagamos ahora variar también v_1. La variedad descrita por los [8] definidos por los puntos (16.4) al variar v_1 y v_2 será la $W(5,0)$ cuyo orden queremos buscar.

Como los 3 primeros puntos (16.4) son fijos y definen el plano tangente, nos limitaremos a considerar la V_7 descrita por los [5] determinados por los puntos IV_c, V_c, VI_c, VII_c, VIII_c, IX_c al variar v_1 y v_2. Podemos proceder como sigue:

Llamando H un hiperplano genérico que contenga los espacios lineales ambientes de las curvas $F_2(v_1)$, $F_3(v_1)$, $F_4(v_1)$, H cortará la V_7 según una V_6 del mismo orden que podrá componerse de una parte (de igual dimensión) contenida en el [11] que contiene dichas curvas y de una parte, externa a ese [11] cortándolo, a lo sumo, según una V_5. Esta segunda parte, por contener necesariamente algún punto de la forma IX, y por estar $F_4{}^1$ y $F_3{}^2$ contenidas en dicho [11] debe contener puntos de F_5. Efectivamente H corta F_5 en 5 puntos que determinan 5 valores de v_1; a cada uno de ellos corresponde una determinación de los puntos F_2, $F_2{}^1$, F_3, de las rectas $F_3{}^1+F_2{}^2 v_2$, $F_4+3F_3{}^1 v_2$ y de la cónica $F_5+10F_4{}^1 v_2+15F_3{}^2 v_2{}^2$. Repitiendo cálculos que preceden, se tiene que los [5] que unen puntos correspondientes de estas variedades forman una $V_6{}^4$. Se tienen así 5 variedades $V_6{}^4$ que dan lugar a una intersección de orden

$$5 \,.\, 4 = 20.$$

La parte de la intersección contenida en el [11] ambiente de F_2, F_3, F_4 se descompone todavía en dos:

1°. Para v_1 fijo, VII_c y VIII_c definen, al variar v_2, una cónica envolvente, esto es, en cuanto nos interesa, un plano doble $F_2{}^2 F_3{}^1 F_4$; este plano doble, proyectado de $F_2 F_2{}^1 F_3$ da lugar a un [5] doble y se trata de determinar la V_6 llenada por estos [5] al variar v_1. Siendo $F_2{}^2$ independiente de v_1, podemos despreciarlo momentáneamente y considerar la V_5 lugar de los [4] que unen puntos correspondientes de $F_2(v_1)$, $F_2{}^1(v_1)$, $F_3(v_1)$, $F_3{}^1(v_1)$, $F_4(v_1)$; aplicando las fórmulas de los nos. 6 y 7 resulta que esta V_5 tiene orden

$$2+4+4=10.$$

Esta V_5 tiene el plano de $F_2(v_1)$ como doble; luego, proyectada de F_2^2, da lugar a una V_6^8 que, por ser doble, contribuye en la intersección por el orden

$$8 . 2 = 16.$$

2º. Todos los V_6^4 definidos por IV_c, V_c, VI_c, VII_c, VIII_c, IX_c por v_1 fijo tienen común con el [11] considerado el [5] $F_2 F_2^1 F_3 F_2^2 F_3^1 F_3^2$; se tienen así todavía ∞^1 [5] que constituyen una V_6 cuya contribución se debe todavía determinar. Si, como antes, se desprecia momentáneamente el punto F_2^2 que no varía con v_1, la variedad de los [4] $F_2 F_2^1 F_3 F_3^1 F_3^2$ tiene orden 5 por obtenerse como proyección de los planos osculadores de una cúbica desde las tangentes a una cónica; y los puntos del plano de la cónica son dobles para ella. Por una observación anterior el punto F_2^2 es equivalente a cualquier punto de este plano; por lo tanto la proyección desde él tiene orden 3. Debe observarse además que las V_6^4 definidas por IV_c, V_c, ..., IX_c son tangentes a lo largo del [5] de las curvas $F_2(v_1)$, $F_3(v_1)$ al [11] considerado, porque en este [11] están la tangente $F_3^2 F_4^1$ de la cónica IX_c, como también todos los demás elementos IV_c, V_c, ..., VIII_c; debe por lo tanto la variedad de esos [5] contarse doble en la intersección buscada, obteniéndose así una contribución de

$$3 . 2 = 6$$

en el orden de $W(5,0)$. Este orden resulta por fin

$$20 + 16 + 6 = 42.$$

Resumiendo concluimos:

La variedad $W(5,0)$ engendrada por los [5]-osculadores a las curvas de una superficie en un punto, es una variedad de dimensión 10 y orden 42, contenida en un [20].

17. Algunas propiedades de la variedad $W(5,0)$. — Vamos a demostrar que: *los puntos del plano de la cónica $F_2(v_1)$ son múltiples de orden 12.*

Prescindiendo del plano tangente, bastará demostrar que los puntos del plano que contiene la cónica $F_2(v_1)$ son múltiples de orden 12 para la V_7 engendrada por los [5] determinados por los puntos $IV_c, V_c, \ldots, IX_c$ de (16.4), al variar v_1 y v_2.

Proyectemos desde un punto cualquiera de dicho plano sobre un hiperplano. La cónica $F_2(v_1)$ pasa a una recta $F_2^*(v_1)$. El [4] determinado por IV_c, V_c, VI_c, VII_c y $VIII_c$ pasa al [4] determinado por la recta $F_2^*(v_1)$ y la proyección de los puntos F_3, F_3^1 y F_4, que es independiente de v_2. Desde él hay que proyectar la proyección de la cónica IX_c y ver luego el orden del lugar descrito por esta V_6^2 al variar v_1.

La proyección de la cónica IX_c, al variar v_1 describe una superficie de orden 14. En efecto, cortando por un hiperplano que contenga el espacio ambiente de la proyección de $F_4^1(v_1)$ y la recta proyección de $F_3^2(v_1)$, este hiperplano cortará a la proyección de $F_5(v_1)$ en 5 puntos, a cada uno de los cuales corresponde una cónica (proyección de las IX_c) contenida en el hiperplano; como además este hiperplano contiene la proyección de la cúbica $F_4^1(v_1)$ y la proyección de la recta $F_3^2(v_1)$, resulta que su curva de intersección con la superficie descrita por las cónicas proyección de las IX_c es de orden $5 . 2+3+1=14$.

El [4] determinado por la recta $F_2^*(v_1)$ y las proyecciones de F_3, F_3^1 y F_4 describe la variedad obtenida proyectando desde $F_2^*(v_1)$ la variedad engendrada por los planos determinados por las tangentes a una cúbica y los puntos de una cuártica, que por el teorema del nº. 8 sabemos que es de orden 8.

Por tanto, para aplicar (6.1), tenemos $\tau=14$, $t=2$, $\sigma=8$, $s=1$, $\mu=\nu=1$, $i=0$ y por consiguiente el orden de la proyección de la variedad V_7 es igual a 30. Como se han perdido 12 unidades en el orden, resulta que el centro de proyección es múltiple de orden 12, de acuerdo con el enunciado.

En consecuencia, la variedad $W(5,0)$ contiene el [5] determinado por el plano tangente y el plano de la cónica $F_2(v_1)$, como múltiple de orden 12.

18. Las variedades descritas por los $S(5,i)$. — En el nº. 16 hemos visto que el espacio lineal $S(5,4)$, al variar v_4 describe el nuevo espacio lineal $S(5,3)$. Análogamente vimos que, al variar v_3 el espacio $S(5,3)$ describe el nuevo espacio lineal $S(5,2)$. Al variar v_2, este $S(5,2)$ se vió también que describía una variedad V_9^4.

El espacio lineal $S(5,1)$ debe contener todos los puntos (16.4) para cualquier valor de v_2; es, por tanto, el [11] determinado por los puntos

$$\begin{array}{l} x, \\ F_1,\ F_1^1, \\ F_2,\ F_2^1,\ F_2^2, \\ F_3,\ F_3^1,\ F_3^2, \\ F_4,\ F_4^1, \\ F_5. \end{array} \tag{18.1}$$

En lugar de estos puntos se pueden tomar los siguientes

$$\begin{array}{l} x, \\ x_u,\ x_v, \\ x_{uu},\ x_{uv},\ x_{vv}, \\ F_3,\ F_3^1,\ F_3^2, \\ F_4,\ F_4^1, \\ F_5. \end{array} \tag{18.2}$$

Al variar v_1 estos [11] describirán una V_{12}, cuyo orden queremos hallar. Como los 6 primeros puntos de (18.2) son fijos, bastará determinar el orden de la V_6 descrita por los [5] determinados por los restantes puntos, al variar v_1. Los planos determinados por F_3, F_3^1; F_3^2 son los planos osculadores a la cúbica $F_3(v_1)$ y por tanto engendran un [3] contado 3 veces. Los planos de los puntos F_4, F_4^1, F_5 son los determinados por las tangentes a la cuártica $F_4(v_1)$ y los puntos correspondientes al mismo valor de v_1 de la quíntica $F_5(v_1)$; según el teorema del nº. 8, estos planos describirán una variedad de orden 11. Aplicando (6.1), es ahora, $\tau=3$, $t=1$, $\sigma=11$, $s=1$, $\mu=\nu=1$, $i=0$ y por consiguiente el orden de la V_6 es 14. Por tanto:

La variedad engendrada por los espacios lineales $S(5,1)$ correspondientes a un punto x de una superficie, al considerar todas las tangentes en el mismo punto, es la V_{12}^{14} obtenida proyectando desde el [5] determinado por los 6 primeros puntos de (18.2), la V_6^{14} descrita de la manera especificada.

§ 6. VARIEDAD ENGENDRADA POR LOS [6]-OSCULADORES EN UN PUNTO A LAS CURVAS DE UNA SUPERFICIE QUE PASAN POR EL MISMO

19. Estudio de las variedades $W(6, i)$. — Según el nº. 4, cada [6]-osculador en el punto x a las curvas de la superficie $x = x(u, v)$ que pasan por él, está determinado por los puntos:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{I}:\ x, \quad \mathrm{II}:\ F_1, \quad \mathrm{III}:\ F_2 + F_1{}^1 v_2,\\
&\mathrm{IV}:\ F_3 + 3F_2{}^1 v_2 + F_1{}^1 v_3,\\
&\mathrm{V}:\ F_4 + 6F_3{}^1 v_2 + 3F_2{}^2 v_2{}^2 + 4F_2{}^1 v_3 + F_1{}^1 v_4,\\
&\mathrm{VI}:\ F_5 + 10F_4{}^1 v_2 + 15F_3{}^2 v_2{}^2 + 10(F_3{}^1 + F_2{}^2 v_2)\, v_3\\
&\qquad\qquad + 5F_2{}^1 v_4 + F_1{}^1 v_5,\\
&\mathrm{VII}:\ F_6 + 15F_5{}^1 v_2 + 45F_4{}^2 v_2{}^2 + 15F_3{}^3 v_2{}^3\\
&\qquad + 10(2F_4{}^1 + 6F_3{}^2 v_2 + F_2{}^2 v_3)\, v_3\\
&\qquad\qquad + 15(F_3{}^1 + F_2{}^2 v_2)\, v_4 + 6F_2{}^1 v_5 + F_1{}^1 v_6.
\end{aligned}
\tag{19.1}
$$

Si se mantienen constantes v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y se hace variar v_6, o sea, se consideran todas las curvas de la superficie que pasan por x y tienen en este punto un [5]-osculador fijo común, los 6 primeros puntos de (19.1) no cambian y el VII describe una recta. Por tanto: *La variedad $W(6,5)$ es un [7]; ella coincide con el $S(6,5)$.*

Como $W(6,5)$ contiene el punto $F_1{}^1$ (correspondiente a $v_6 = \infty$), se puede determinar por los puntos:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{I}_a:\ x, \quad \mathrm{II}_a:\ F_1, \quad \mathrm{III}_a:\ F_1{}^1,\\
&\mathrm{IV}_a:\ F_2, \quad \mathrm{V}_a:\ F_3 + 3F_2{}^1 v_2,\\
&\mathrm{VI}_a:\ F_4 + 6F_3{}^1 v_2 + 3F_2{}^2 v_2{}^2 + 4F_2{}^1 v_3,\\
&\mathrm{VII}_a:\ F_5 + 10F_4{}^1 v_2 + 15F_3{}^2 v_2{}^2 + 10(F_3{}^1 + F_2{}^2 v_2)\, v_3 + 5F_2{}^1 v_4,\\
&\mathrm{VIII}_a:\ F_6 + 15F_5{}^1 v_2 + 45F_4{}^2 v_2{}^2 + 15F_3{}^3 v_2{}^3\\
&\qquad + 10(2F_4{}^1 + 6F_3{}^2 v_2 + F_2{}^2 v_3)\, v_3\\
&\qquad\qquad + 15(F_3{}^1 + F_2{}^2 v_2)\, v_4 + 6F_2{}^1 v_5.
\end{aligned}
\tag{19.2}
$$

Al variar v_5, manteniendo fijos v_1, v_2, v_3, v_4, los 7 primeros puntos de (19.2) permanecen fijos, mientras el VIII_a describe una recta. Por tanto: *La variedad* $W(6,4)$ *es un* $[8]$; *ella coincide con el espacio* $S(6,4)$.

Como el punto $F_2{}^1$ pertenece a $W(6,4)$ (para $v_5=\infty$), este espacio lineal puede considerarse determinado por los puntos

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{I}_b\colon x, \quad \mathrm{II}_b\colon F_1, \ \mathrm{III}_b\colon F_1{}^1,\\
&\mathrm{IV}_b\colon F_2, \ \mathrm{V}_b\colon F_2{}^1,\\
&\mathrm{VI}_b\colon F_3, \quad \mathrm{VII}_b\colon F_4+6F_3{}^1v_2+3F_2{}^2v_2{}^2,\\
&\mathrm{VIII}_b\colon F_5+10F_4{}^1v_2+15F_3{}^2v_2{}^2+10(F_3{}^1+F_2{}^2v_2)v_3,\\
&\mathrm{IX}_b\colon F_6+15F_5{}^1v_2+45F_4{}^2v_2{}^2+15F_3{}^3v_2{}^3\\
&\qquad +10(2F_4{}^1+6F_3{}^2v_2+F_2{}^2v_3)v_3+15(F_3{}^1+F_2{}^2v_2)v_4.
\end{aligned}
\tag{19.3}
$$

Al variar v_4, permaneciendo fijos v_1, v_2, v_3, los ocho primeros puntos (19.3) se mantienen fijos y el IX_b describe una recta. Por tanto los espacios $W(6,4)$ describirán un $[9]$. Es decir: *La variedad* $W(6,3)$ *es un* $[9]$; *ella coincide con el espacio lineal* $S(6,3)$.

Al espacio lineal $W(6,3)$ pertenece el punto $F_3{}^1+F_2{}^2v_2$ (correspondiente a $v_4=\infty$). Por tanto se puede definir por los puntos

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{I}_c\colon x, \quad \mathrm{II}_c\colon F_1, \quad \mathrm{III}_c\colon F_1{}^1, \quad \mathrm{IV}_c\colon F_2, \quad \mathrm{V}_c\colon F_2{}^1, \quad \mathrm{VI}_c\colon F_3,\\
&\mathrm{VII}_c\colon F_3{}^1+F_2{}^2v_2, \quad \mathrm{VIII}_c\colon F_4+3F_3{}^1v_2,\\
&\mathrm{IX}_c\colon F_5+10F_4{}^1v_2+15F_3{}^2v_2{}^2,\\
&\mathrm{X}_c\colon F_6+15F_5{}^1v_2+45F_4{}^2v_2{}^2+15F_3{}^3v_2{}^3\\
&\qquad\qquad +20(F_4{}^1+3F_3{}^2v_2)v_3+10F_2{}^2v_3{}^2.
\end{aligned}
\tag{19.4}
$$

Al variar v_3, manteniendo fijos v_1, v_2, los nueve primeros puntos de (19.4) permanecen fijos y el X_c describe una cónica. Por tanto: *la variedad* $W(6,2)$ *es el cono cuádrico que desde el* $[8]$ *determinado por los nueve primeros puntos* (19.4) *proyecta la cónica descrita por el punto* X_c *al variar* v_3. Es una $\mathrm{V}_{10}{}^2$ que es también la misma variedad descrita por los espacios $S(6,3)$ al variar v_3 sin modificar v_1, v_2.

Hagamos ahora variar también v_2 manteniendo fijo v_1. Los puntos I_c, II_c, ..., VI_c permanecen fijos. El plano determinado por VII_c, VIII_c, IX_c, al variar v_2 engendra una $V_3{}^4$, encontrada ya repetidamente en los párrafos anteriores, lugar geométrico de planos determinados por las tangentes a una cónica y los puntos de otra en una correspondencia proyectiva definida por los valores del parámetro v_2. A cada valor de v_2 corresponde por otra parte, sobre la superficie representada por X_c para v_2 y v_3 variables, una cónica. Debemos determinar el orden de la variedad lugar de los conos que proyectan de los planos generadores de la $V_3{}^4$ las correspondientes cónicas de X_c; para aplicar la fórmula (6. 1) necesitamos conocer el orden de la superficie X_c.

Cortemos esta superficie por un hiperplano que contenga los puntos $F_4{}^1$, $F_3{}^2$, $F_2{}^2$; si P es un punto de la intersección existen valores $v_2{}^0$, $v_3{}^0$ tales que

$$P = F_6 + 15F_5{}^1 v_2{}^0 + 45F_4{}^2 v_2{}^{02} + 15F_3{}^3 v_2{}^{03} \\ + 20F_4{}^1 v_3{}^0 + 60F_3{}^2 v_2{}^0 v_3{}^0 + 10F_2{}^2 v_3{}^{02};$$

el punto

$$P - 20F_4{}^1 v_3{}^0 - 60F_3{}^2 v_2{}^0 v_3{}^0 - 10F_2{}^2 v_3{}^{02}$$

pertenecerá al hiperplano y a la cúbica

$$F_6 + 15F_5{}^1 v_2 + 45F_4{}^2 v_2{}^2 + 15F_3{}^3 v_2{}^3,$$

para el mismo valor $v_2 = v_2{}^0$; recíprocamente si

$$P_1 = F_6 + 15F_5{}^1 v_2{}^0 + 45F_4{}^2 v_2{}^{02} + 15F_3{}^3 v_2{}^{03}$$

es un punto común al hiperplano y a la cúbica, serán comunes al hiperplano y a la superficie todos los puntos de la cónica

$$P_1 + 20(F_4{}^1 + 3F_3{}^2 v_2{}^0)\, v_3 + 10F_2{}^2 v_3{}^2.$$

Por cuanto el hiperplano corta a la cúbica en 3 puntos, a los que corresponden 3 valores determinados de v_2, se sigue que el hiperplano corta a la superficie según una curva compuesta de 3 cónicas; la superficie tiene luego orden 6.

Aún más rápidamente, consideremos un hiperplano por el [5] $F_6 F_5{}^1 F_4{}^2 F_3{}^3 F_4{}^1 F_3{}^2$ (será únicamente este [5] mismo si la superficie se considera dentro de su espacio ambiente mínimo); la intersección de este hiperplano (en particular de este [5]) con la superficie corresponderá a $v_3 = 0$ y será la cúbica

$$F_6 + 15F_5^1 v_2 + 45F_4^2 v_2^2 + 15F_3^3 v_2^3;$$

pero se nota que, por cualquier valor de v_2, nuestro [5] contiene la recta que une el punto de la cúbica con el punto $F_4^1 + 3F_3^2 v_2$, que es la tangente en el primer punto a la correspondiente cónica X_c. Se sigue que nuestro [5], o generalmente hiperplano, es tangente a la superficie en todos los puntos de la cúbica, que será doble para la intersección. Se reencuentra el orden de la superficie $3 . 2 = 6$.

Para determinar el orden de la variedad $W(6, 1)$ formada por los conos que proyectan las cónicas de nuestra superficie de los planos generadores de la anterior V_3^4 podemos ahora aplicar la fórmula (6. 1) con $\rho=6$, $\sigma=4$, $t=2$, $s=1$ y obtenemos

$$4 . 2 + 6 - i = 14 - i.$$

Como la V_3^4 y la superficie X_c tienen en común el punto F_2^2 que es doble para V_3^4, debe ponerse $i=2$ y se obtiene para el orden buscado el valor 12.

La variedad $W(6, 1)$ es una V_{11}^{12} obtenida proyectando desde el [5] *determinado por los* 6 *primeros puntos de* (19. 4) *la V_5^{12} que acabamos de estudiar.*

Vamos ahora a ocuparnos de la $W(6, 0)$, la variedad descrita por los [9] determinados por los puntos (19. 4) al variar v_1, v_2, v_3. Ella es por lo tanto una V_{12}; para determinar su orden vamos a cortarla por un hiperplano que elegiremos en modo conveniente; se tratará de determinar el orden de la V_{11} sección.

Elegimos nuestro hiperplano de manera que contenga los espacios ambientes de la cónica $F_2(v_1)$, la cúbica $F_3(v_1)$, la cuártica $F_4(v_1)$ y la quíntica $F_5(v_1)$. Este hiperplano cortará a la séxtica $F_6(v_1)$ en 6 puntos, a cada uno de los cuales corresponde una V_{11}^{12} del tipo estudiado anteriormente y que constituyen una primera parte de la intersección con $W(6, 0)$ y contribuyen por tanto en el orden en

$$12 . 6 = 72. \qquad (19. 5)$$

Falta ver ahora las variedades V_{11} que son parte de la $W(6, 0)$ y están contenidas en el espacio lineal suma de los espacios lineales que contienen $F_2(v_1)$, $F_3(v_1)$, $F_4(v_1)$ y $F_5(v_1)$.

Se nota en seguida que los puntos I_c, II_c, III_c, ..., IX_c de (19. 4), siendo funciones de dos variables v_1, v_2 determinan una doble infinidad de [8], o sea una V_{10} que de por sí no constituye una parte de la intersección buscada; tal parte se obtendrá, al contrario, observando que cualesquiera que sean v_1 y v_2, la variedad descrita por X_c tiene común con dicho espacio el punto $F_2{}^2$ correspondiente a $v_3=\infty$, de manera que pertenece a la V_{11} intersección el cono que proyecta desde el punto $F_2{}^2$ la V_{10} mencionada.

Este cono, que indicaremos por V_{11}, se obtiene proyectando desde el [5] determinado por los puntos

$$x,\ x_u,\ x_v,\ x_{uu},\ x_{uv},\ x_{vv} \tag{19.6}$$

la variedad V_5 engendrada por los [3] determinados por los puntos

$$\begin{aligned}&\mathrm{I}_d\colon\ F_3, \quad \mathrm{II}_d\colon\ F_3{}^1, \quad \mathrm{III}_d\colon\ F_4,\\ &\mathrm{IV}_d\colon\ F_5+10F_4{}^1v_2+15F_3{}^2v_2{}^2\end{aligned} \tag{19.7}$$

de los cuales sólo el último depende de dos parámetros v_1, v_2. Para v_1 constante IV_d representa una cónica; variando v_1 esta cónica describe una superficie cuyo orden se determina fácilmente siguiendo un procedimiento acostumbrado; cortamos la superficie con un hiperplano que contenga el [5] suma de los espacios de $F_4{}^1$ y $F_3{}^2$; este [5] tiene en común con la superficie IV_d la recta $F_3{}^2$ (correspondiente a $v_2=\infty$, v_1 variable) y, para todos los valores de v_1, contiene la tangente $F_3{}^2F_4{}^1$ a la cónica correspondiente; es pues tangente a la superficie en todos los puntos de la recta, que valdrá como intersección doble. Además de esto el hiperplano considerado corta la curva F_5 en 5 puntos a cada uno de los cuales corresponde una cónica IV_d, contenida en el hiperplano. El orden de la superficie IV_d es pues

$$2.5+2=12.$$

Para determinar ahora el orden de la V_{11} definida por (19. 7) aplicaremos el teorema del nº. 8. Al variar v_1, I_d, II_d, III_d definen una serie infinita de planos determinados por las tangentes a una cúbica y los puntos de una cuártica en correspondencia proyectiva; por la fórmula (8. 2) ellos llenan luego una $V_3{}^8$. Proyectando de estos planos las cónicas de la V_2^{12} antes considerada se obtiene una variedad cuyo orden se determina todavía por la (6. 1) cuando se haya determinado el número de puntos eventualmente comunes. El espacio de la V_2^{12} y el de la V_3^8 tienen en común el [5] de $F_4^1(v)\ F_3^2(v)$ cuya recta F_3^2 es común a las dos variedades y precisamente pertenece a la V_2^{12} para $v_2=\infty$, v_1 variable y a la V_3^8 para $v_1=\infty$; se sigue que de ella sólo el punto F_3^3, que corresponde en ambos casos a $v_1=\infty$ debe considerarse como punto común en el sentido del nº. 6. A la V_3^8 pertenece también, para $v_1=\infty$, la recta $F_3^3\ F_4^4$, tangente en F_3^3 a la cónica IV_d correspondiente al mismo valor de v_1; esto implica que el punto F_3^3 deba considerarse como una coincidencia doble; tendremos pues $i=2$ y obtenemos finalmente como orden de la V_5 definida por (19. 7),

$$12+8\,.\,2-2=26.$$

Para confirmar este resultado vamos a repetir el cálculo modificando el procedimiento en modo que la aplicación de la fórmula (6. 1) y el cálculo consiguiente del número i toma aspecto un poco distinto. Cortemos la V_5 (19. 7) por un hiperplano conteniendo el [8] ambiente común de $F_3(v_1)$ y $F_4(v_1)$. Este hiperplano corta $F_5(v_1)$ en 5 puntos cada uno de los cuales determina un valor de v_1 y por consiguiente un plano $F_3\,F_3^1\,F_4$ y una cónica IV_d, que proyectada de dicho plano da lugar a una V_4^2, que es parte de la intersección buscada; obtenemos así una contribución en el orden de

$$5\,.\,2=10.$$

Queda por considerar la eventual parte de la intersección contenida en el [8] ambiente de $F_3(v_1)$, $F_4(v_1)$; ya sabemos que en este [8] está la variedad V_3^8 estudiada antes, la que sin embargo es, para nuestro fin, de dimensión deficiente. Se completa esta parte de la intersección observando que para cada valor de v_1 la cónica IV_d tiene un punto sobre la recta F_3^2 (correspondiente a $v_2=\infty$) desde el cual se debe proyectar el plano correspondiente de la V_3^8; se forma así una V_4 cuyo orden determinamos todavía por aplicación de la (6. 1). Para determinar el valor correspondiente de i, repetimos la observación anterior, que la F_3^2, aun perteneciendo a la $V_3{}^8$, corresponde en ella a un valor determinado de v_1 ($v_1=\infty$), mientras que, como centros de proyección, sus puntos corresponden a v_1 variable y a $v_1=\infty$ corresponde únicamente $F_3{}^3$; tendremos pues $i=1$ y resulta, para el orden de la intersección de nuestro [8] con la variedad (19. 7)

$$8+1-1=8.$$

Pero debe repetirse aquí la observación hecha en otras oportunidades de que a lo largo de esta intersección el [8] y la variedad son tangentes, por contener el [8] las tangentes, para $v_2=\infty$, a todas las cónicas IV_d; obtenemos luego para el orden buscado

$$10+8.2=26$$

idéntico al anterior.

Para formar la V_{11} intersección de la $W(6,0)$ con un hiperplano, que era nuestro problema principal, debemos juntar la variedad de orden 72 indicada por la (19. 5) con la ahora estudiada. Pero nuevamente aquí observaremos que el [17] que contiene $F_2(v_1)$, $F_3(v_1)$, $F_4(v_1)$, $F_5(v_1)$, es tangente a lo largo de toda esta variedad a las cónicas definidas por X_c por v_1 y v_2 constantes: debe por lo tanto esta variedad considerarse doble en la intersección, obteniéndose como orden de la $W(6.0)$

$$72+26.2=124.$$

La $W(6,0)$ engendrada por los [6]-osculadores a las curvas de una superficie en un punto es una $V_{12}{}^{124}$ de dimensión 12, orden 124 y contenida en un [27].

20. Variedades descritas por los $S(6,i)$. — En el nº. 19 se ha visto que los $S(6,5)$, al variar el [5]-osculador fijo, o sea, al variar v_5, describen un [8] que es el $S(6,4)$. Este $S(6,4)$, al variar v_4 describe un [9] que es el $S(6,3)$. Al variar v_3, estos $S(6,3)$ describen una $V_{10}{}^2$ que es la $W(6,2)$ ya estudiada.

Quedan por ver ahora las variedades descritas por los espacios $S(6,2)$ al variar v_2 y por los espacios $S(6,1)$ al variar v_1.

De (19. 4) se deduce que el espacio lineal $S(6,2)$ es el determinado por los puntos I_c, II_c, ..., IX_c de (19.4), más los tres puntos

$$\begin{aligned} &XI_c\colon\ F_6+15F_5^1 v_2+45F_4^2 v_2^2+15F_3^3 v_2^3,\\ &XII_c\colon\ F_4^1+3F_3^2 v_2,\\ &XIII_c\colon\ F_2^2. \end{aligned} \tag{20.1}$$

Por tanto $S(6,2)$ es un [11]. Queremos estudiar la variedad descrita por estos [11] al variar v_2.

Por pertenecer, según (20.1), a $S(6,2)$ los puntos F_2^2 y $F_4^1+3F_3^2 v_2$, dicho espacio lineal se puede considerar determinado por los puntos I_c, II_c, ..., VI_c de (19.4) más los puntos

$$\begin{aligned} &F_2^2,\ F_3^1,\ F_4,\ F_5+5F_4^1 v_2,\ F_4^1+3F_3^2 v_2,\\ &F_6+15F_5^1+45F_4^2 v_2^2+15F_3^3 v_2^3. \end{aligned} \tag{20.2}$$

Al variar v_2, los tres primeros de estos puntos y los I_c, II_c, ..., VI_c de (20,4) son fijos, y los últimos determinan los planos que unen los puntos de una cúbica con las tangentes homólogas de una cónica referida proyectivamente con ella. Según el teorema del nº. 8, estos planos engendran una V_3^5. Por tanto:

Los espacios lineales $S(6,2)$, al variar el plano osculador fijo, manteniendo inmóvil la tangente común, engendran uña V_{12}^5 que es un cono obtenido proyectando desde un [8] fijo como vértice, la variedad de orden 5 engendrada por los planos determinados por las tangentes a una cónica y los puntos de una cúbica referida a ella proyectivamente.

De (19.4) se deduce también que el espacio $S(6.1)$ es el [15] determinado por los puntos

$$\begin{aligned} &x,\\ &F_1,\ F_1^1,\\ &F_2,\ F_2^1,\ F_2^2,\\ &F_3,\ F_3^1,\ F_3^2,\ F_3^3,\\ &F_4,\ F_4^1,\ F_4^2,\\ &F_5,\ F_5^1,\\ &F_6. \end{aligned} \tag{20.3}$$

o, lo que es lo mismo, por los puntos

$$\begin{array}{l} x, \\ x_u,\ x_v, \\ x_{uu},\ x_{uv},\ x_{vv}, \\ x_{uuu},\ x_{uuv},\ x_{uvv},\ x_{vvv}, \\ F_4,\ F_4^1,\ F_4^2, \\ F_5,\ F_5^1, \\ F_6. \end{array} \qquad (20.4)$$

Al variar v_1, los diez primeros puntos de (20.4) permanecen fijos y los [5] determinados por los seis restantes describen la variedad engendrada por los [5] que unen los planos osculadores a una cuártica, las tangentes a una quíntica y los puntos de una séxtica, en puntos homólogos de una correspondencia proyectiva entre las tres curvas. Según la fórmula (8.2) el orden de esta última variedad es 20. Por tanto:

Los espacios lineales $S(6,1)$, de dimensión 15, al variar v_1 describen una V_{16}^{20} la cual es el cono que desde el [9] *determinado por los diez primeros puntos de* (20.4) *proyecta la variedad de orden 20 engendrada por los* [5] *determinados por los seis últimos puntos de* (20.4).

§ 7. ALGUNAS CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE LAS VARIEDADES $W(p, q)$

21. RESULTADOS GENERALES SOBRE LAS $W(p, q)$ PARA $q \geq \operatorname{ent}[p/2]$— Examinando los casos particulares estudiados en los párrafos precedentes se nota fácilmente una manifiesta regularidad en los primeros pasos del razonamiento que cede luego el paso a complicaciones crecientes al crecer el orden del contacto cuando nos acercamos a la meta final de la estricta caracterización de la variedad $W(p, 0)$. En este párrafo nos proponemos indicar los primeros fundamentos de la aludida regularidad, y del modo como ella se pierde al ir avanzando.

Partimos de la fórmula (4. 9) que escribimos en la forma

$$\frac{d^p x}{du^p} = p! \sum \frac{1}{\rho_1! \rho_2! \ldots} \frac{F_r^k}{(r-k)!} \left(\frac{v_{\lambda_1}}{\lambda_1!}\right)^{\rho_1} \left(\frac{v_{\lambda_2}}{\lambda_2!}\right)^{\rho_2} \ldots, \quad (21.1)$$

donde la sumatoria se entiende extendida a todos los valores positivos de los índices ρ_i, λ_i, k, r que cumplen las condiciones siguientes:

$$\begin{gathered} \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \ldots \geqq 2 \\ \sum \rho_i = k \\ 2k \leqq \sum \rho_i \lambda_i = p + k - r \leqq p. \end{gathered} \quad (21.2)$$

De la última condición siguen en seguida las limitaciones:

$$k + r \leqq p, \qquad k \leqq r$$

$$\lambda_1 \leqq p, \qquad \rho_1 \leqq \operatorname{ent}\left[\frac{p}{\lambda_1}\right]; \quad (21.3)$$

por lo tanto, para

$$p \geqq \lambda_1 \geqq \operatorname{ent}\left[\frac{p+2}{2}\right]$$

será siempre

$$\rho_1 = 1, \quad \lambda_{1+h} < \text{ent}\left[\frac{p+1}{2}\right], \qquad \Sigma \rho_{1+h} = k - 1. \qquad (21.4)$$

Se sigue que *si en la expresión* (21. 1) *de $d^p x/du^p$ se supone dar valores fijos a las variables v_λ para los valores del índice $\lambda \leqq \text{ent}\left[\frac{p}{2}\right]$, las expresiones resultantes serán lineales en las variables v_λ restantes* $\left(\lambda \geqq \text{ent}\left[\frac{p+2}{2}\right]\right)$

Debemos añadir una observación importante respecto de los coeficientes. El coeficiente de v_{λ_1} en (21. 1) será

$$C_{p_1\lambda_1} = \frac{p!}{\lambda_1!} \Sigma \frac{1}{\rho_2! \ldots} \frac{F_r^k}{(r-k)!} \left(\frac{v_{\lambda_2}}{\lambda_2!}\right)^{\rho_2} \ldots \qquad (21.5)$$

y, por (21. 2), (21. 4) deberá ser

$$2(k-1) \leqq \Sigma \rho_{1+h} \lambda_{1+h} = p - \lambda_1 + k - r$$

es decir

$$k + r \leqq p - \lambda_1 + 2. \qquad (21.6)$$

Se sigue que el dominio de variabilidad de los índices ρ_i, λ_i k, r en la expresión (21. 5) depende únicamente de la diferencia $p - \lambda_1$ y no de los índices p, λ_1 por separado. Poniendo

$$C_{p,\lambda} = c_{p-\lambda} \left(\lambda \geqq \text{ ent}\left[\frac{p+2}{2}\right]\right),$$

concluimos que para cada valor determinado de p las derivadas $d^{p-\nu}x/du^{p-\nu}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, p-1)$ se expresan en la forma:

$$\frac{d^p x}{dx^p} = \alpha_{0p}\, c_0\, v_p + \alpha_{1p}\, c_1\, v_{p-1} + \alpha_{2p}\, c_2\, v_{p-2} + \ldots + \alpha_{\varkappa p}\, c_\varkappa\, v_{p-\varkappa} + P_p$$

$$(21.7)$$

$$\frac{d^{p-1}x}{du^{p-1}} = \alpha_{0p-1}\, c_0\, v_{p-1} + \alpha_{1p-1}\, c_1\, v_{p-2} + \cdots$$

$$+ \alpha_{\varkappa-1p-1}\, c_{\varkappa-1}\, v_{p-\varkappa} + P_{p-1}$$

....

$$\frac{d^{p-\varkappa}x}{du^{p-\varkappa}} = \alpha_{0p-\varkappa}\, c_0\, v_{p-\varkappa} + P_{p-\varkappa}$$

$$\frac{d^{p-\varkappa-\sigma}x}{du^{p-\varkappa-\sigma}} = P_{p-\varkappa-\sigma}$$

donde

$$\varkappa = \text{ent}\left[\frac{p-1}{2}\right], \quad \sigma = 1, 2, \ldots, \text{ent}\left[\frac{p+2}{2}\right],$$

representando las α_{ij} factores numéricos que no interesan aunque podrían escribirse fácilmente, y siendo los P_t como los c_m puntos que dependen únicamente de los valores fijados para las variables v_λ; $\lambda = 1, 2, \ldots, \text{ent}\left[\frac{p}{2}\right]$.

Supongamos ahora que, además de estas v_λ, se quieran suponer fijados los valores de algunas sucesivas correspondientes a

$$\text{ent}\left[\frac{p}{2}\right] < \lambda \leqq \text{ent}\left[\frac{p}{2}\right] + h, \quad 0 \leqq h \leqq \text{ent}\left[\frac{p-1}{2}\right];$$

el sistema de las (21.7) representa entonces una $W(p, \text{ent}\left[\frac{p}{2}\right] + h)$ y muestra que ésta coincide con el espacio ambiente definido por contener un espacio lineal de dimensión ent $\left[\frac{p}{2}\right] + h$ y contener un sistema de ent $\left[\frac{p+1}{2}\right] - h$ espacios lineales de dimensiones $1, 2, \ldots, \text{ent}\left[\frac{p+1}{2}\right] - h$, cada uno de los cuales corta al anterior según un espacio de dimensión menor en una unidad conteniendo la intersección anterior. Se trata pues de un espacio lineal de dimensión

$$\text{ent}\left[\frac{p}{2}\right] + h + 2\,\text{ent}\left[\frac{p+1}{2}\right] - 2h = p + \text{ent}\left[\frac{p+1}{2}\right] - h. \tag{21.8}$$

Se puede, por tanto, enunciar:

Las variedades $W(p, \text{ent}[p/2] + h)$, *para* $0 \leqq h \leqq \text{ent}\left[\frac{p-1}{2}\right]$ *son espacios lineales cuya dimensión está dada por* (21.8) (*).

(*) Este resultado está enunciado, sin demostración, en MENDEL, loc. cit. Ver también LANE, loc. cit., pág. 399.

Las $W(p, q)$, para $q > \text{ent}\left[\frac{p}{2}\right]$ coinciden por tanto con los $S(p, q)$.

Para estudiar las $W(p, q)$ para $q < \text{ent}\left[\frac{p}{2}\right]$ es necesario profundizar el análisis de los términos c_m y por otra parte considerar en (21.1) términos en los cuales $\lambda_1 \leqq \text{ent}\left[\frac{p}{2}\right]$.

Los primeros están dados por (21.5), y por ser, en los términos escritos explícitamente en las (21.7),

$$\lambda_1 \geqq \text{ent}\left[\frac{p}{2}\right] + 1,$$

deberá ser

$$\Sigma \rho_{1+h} \lambda_{1+h} \leqq \text{ent}\left[\frac{p-1}{2}\right], \quad \Sigma \rho_{1+h} \leqq \frac{1}{2} \text{ent}\left[\frac{p-1}{2}\right];$$

se sigue que, hasta tanto que sea $p \leqq 6$, es

$$\Sigma \rho_{1+h} \leqq 1, \quad \lambda_{1+h} = \lambda_2 \leqq 2$$

es decir que los c_m dependen a lo sumo de una v_λ y en esta son lineales; en efecto esto se ha presentado en todos los casos considerados.

Para $p = 7$ o 8, vale todavía la relación $\Sigma \rho_{1+h} \leqq 1$; pero $c_\varkappa$ y $c_{\varkappa-1}$ vienen a depender de dos variables, aun siendo lineales en ellas; para $p > 8$ se presentan términos de grado mayor.

Vamos a estudiar a continuación los primeros casos que se presentan para $q < \text{ent}[p/2]$, distinguiendo separadamente, para mayor claridad, los casos $p = 2m$ y $p = 2m + 1$.

22. Las variedades $W(2m, m-1)$, $W(2m, m-2)$ y $W(2m+1, m)$. — Para estudiar directamente estas variedades recordemos la propiedad obtenida en el nº. precedente de que el coeficiente de v_λ ($\lambda \geqq \text{en}[(p+2)/2]$) en la derivada de orden p depende únicamente de la diferencia $p - \lambda$ y no de los índices p y λ por separado, lo cual se puede enunciar de la manera siguiente:

El coeficiente de v_λ $(\lambda \geqq \mathrm{ent}[(p+2)/2])$ *en la derivada de orden p es el mismo, salvo un factor numérico, que el coeficiente de* $v_{\lambda-\nu}$ *en la derivada de orden* $p-\nu$.

Desde luego debe suponerse también

$$\lambda-\nu \geqq \mathrm{ent}[(p-\nu+2)/2],$$

o sea

$$\nu < 2\lambda - p. \tag{22. 1}$$

Con esta observación vamos a estudiar separadamente las siguientes variedades:

1º. *Variedad* $W(2m, m-1)$. Según ya vimos, las variables $v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_{2m}$ aparecen linealmente en todas las derivadas (21. 7) y por tanto el espacio lineal $W(2m, m)$ puede definirse por los puntos

$$c_0, c_1, c_2, \dots, c_{m-1}, P_{2m}, P_{2m-1}, \dots, P_0. \tag{22. 2}$$

Según el último teorema enunciado, los coeficientes de v_m en las expresiones desarrolladas de $P_{2m-1}, P_{2m-2}, \dots P_m$ son, salvo un factor numérico, los mismos $c_{m-1}, c_{m-2}, \dots, c_0$. Por consiguiente en la expresión de los puntos P_i $(i<2m)$, puede suprimirse el término que contiene v_m, sin que varíe el espacio lineal $W(2m, m)$. Resulta así que v_m aparece únicamente en la expresión desarrollada de P_{2m} y según (21. 7), (21. 1) y (21. 2) este punto es de la forma

$$P_{2m} = A + B\,v_m + C\,v_m{}^2 \tag{22. 3}$$

donde los coeficientes A, B, C dependen únicamente de v_1, $v_2, v_3, \dots, v_{m-1}$. Si estas variables se mantienen fijas y se hace variar v_m, el punto P_{2m} describe una cónica y la variedad $W(2m, m-1)$ descrita por los espacios lineales $W(2m, m)$ será el cono cuádrico que desde el $[3m-1]$ determinado por todos los puntos (22. 2) menos el P_{2m}, proyecta dicha cónica. Por tanto:

La variedad $W(2m, m-1)$ *es un cono cuádrico, de dimensión* $3m+1$, *obtenido proyectando una cónica desde un* $[3m-1]$ *como vértice.*

2°. *Variedad* $W(2m, m-2)$. Esta variedad es la engendrada por los espacios lineales $W(2m, m)$ definidos por los puntos de (22. 2) al variar v_m y v_{m-1}; veamos en cuáles de esos puntos aparecen estas variables.

Ya hemos visto que sin alterar el espacio lineal definido por los puntos (22. 2), podían suprimirse ciertos términos de las P_i de manera que v_m apareciera únicamente en la expresión de P_{2m}. Por la misma razón, es decir, por el hecho de que los coeficientes de v_{m-1} en las expresiones de P_{2m-3}, $P_{2m-4}, \ldots, P_{m-1}$ son, salvo un factor numérico, los mismos $c_{m-2}, c_{m-3}, \ldots, c_0$, pueden suprimirse en dichos puntos los términos que contienen v_{m-1} y queda que v_m y v_{m-1} únicamente aparecen en los puntos $c_{m-1}, P_{2m}, P_{2m-1}, P_{2m-2}$. Veamos lá expresión de cada uno de estos.

a) De (21. 7) y de la fórmula general (21. 1) se calcula que c_{m-1} es de la forma

$$c_{m-1} = A_1 + \alpha_1 F_2^2 v_{m-1} \tag{22. 4}$$

donde A_1 depende únicamente de $v_1, v_2, \ldots, v_{m-2}$ y α_1 es un coeficiente numérico.

b) Análogamente se obtiene que, si $m > 3$, P_{2m} es de la forma

$$P_{2m} = S_1 + Q_1 v_{m-1} + R_1 v_{m-1}^2 + (M + N v_{m-1}) v_m + \alpha_2 F_2^2 v_m^2 \tag{22. 5}$$

donde α_2 es coeficiente numérico y S_1, Q_1, R_1, M, N son expresiones que solo dependen de $v_1, v_2, \ldots, v_{m-2}$.

Si $m = 3$, la expresión del punto P_6 contiene un término más con el factor v_2^3; tenemos entonces la $W(6. 1)$ que se estudió en el § 6.

Si $m < 3$ no hay lugar a la consideración de términos en v_{m-1} por resultar $m - 1 < 2$; como por otra parte debe ser $m - 2 \geqq 0$, cae en esta hipótesis sólo la $W(4, 0)$, estudiada en el § 4.

c) El punto P_{2m-1}, después de haber suprimido en él el término que contiene v_m de acuerdo a lo dicho en el caso 1.°, es de la forma

$$P_{2m-1} = S_2 + Q_2 v_{m-1} + R_2 v_{m-1}^2. \tag{22. 6}$$

d) El punto P_{2m-2}, después de haber suprimido todavía el término que contiene v_m, es de la forma

$$P_{2m-2} = S_3 + Q_3 v_{m-1} + R_3 v_{m-1}^2. \qquad (22.7)$$

En c) y d) los coeficientes $S_2, Q_2, R_2, S_3, Q_3, R_3$ dependen únicamente de $v_1, v_2, \dots, v_{m-2}$. Además, ellos no son independientes con los coeficientes de (22.4). Utilizando las fórmulas (21.1) y (21.2) para calcularlos se obtiene que Q_3 y A_1 son iguales salvo un factor numérico, de manera que se puede poner

$$Q_3 = \beta A_1, \qquad (22.8)$$

y además es

$$R_2 = \alpha_3 F_3^2, \quad R_3 = \alpha_4 F_2^2 \qquad (22.9)$$

siendo α_3, α_4 coeficientes numéricos.

Teniendo en cuenta estas relaciones el punto P_{2m-2} puede escribirse en la forma (cfr. 22.4)

$$\begin{aligned} P_{2m-2} &= S_3 + \left(\beta - \frac{\alpha_4}{\alpha_1}\right) A_1 v_{m-1} + \frac{\alpha_4}{\alpha_1}(A_1 + \alpha_1 F_2^2 v_{m-1}) v_{m-1} \\ &= S_3 + \left(\beta - \frac{\alpha_4}{\alpha_1}\right) A_1 v_{m-1} + c_{m-1} v_{m-1} \end{aligned}$$

y por tanto el [3] definido por los puntos c_{m-1}, P_{2m}, P_{2m-1} y P_{2m-2} puede considerarse también definido por c_{m-1}, P_{2m}, P_{2m-1} y P^*_{2m-2}, donde

$$P^*_{2m-2} = S_3 + \left(\beta - \frac{\alpha_4}{\alpha_1}\right) A_1 v_{m-1}. \qquad (22.10)$$

La variedad $W(2m, m-2)$ se obtiene pues proyectando desde el $[3m-4]$ definido por los puntos

$$c_0, c_1, \dots, c_{m-2}, P_{2m-3}, P_{2m-4}, \dots, P_0$$

la variedad V_5 de los [3] determinados por los puntos c_{m-1} (22.4), P_{2m} (22.5), P_{2m-1} (22.6), P^*_{2m-2} (22.10) al variar v_{m-1},

v_m. Para hallar el orden de esta V_5 basta razonar como en el § 6 respecto de la variedad $W(6,1)$ con la única diferencia que la cónica

$$S_1 + Q_1 v_{m-1} + R_1 v^2_{m-1}$$

está sustituída allá por una cúbica. De esta manera el orden de nuestra V_5 se reduce al valor 10.

Por tanto:

Para $m>3$ *la variedad* $W(2m, m-2)$ *es una variedad de dimensión* $3m+2$ *y orden* 10, *obtenida proyectando una* $V_5{}^{10}$ *desde un* $[3m-4]$ *como vértice.*

Para $m \leqq 3$ rige la misma expresión para la dimensión, pero los ordenes suben a 12 $(m=3)$ y 14 $(m=2)$ (§§ 6, 4).

3°. *Variedad* $W(2m+1, m-1)$. Ya observamos en el caso 1°. que según (21.7), donde ahora es $p=2m+1$, la variedad $W(2m+1, m)$ es el espacio lineal determinado por los puntos

$$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_m, P_{2m+1}, P_{2m}, \ldots, P_0. \qquad (22.11)$$

La variedad $W(2m+1, m-1)$ es la engendrada por estos espacios lineales al variar v_m. Veamos, por tanto, como aparece v_m en los puntos (22.11).

Los puntos $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$ no dependen de v_m y según el teorema enunciado al principio de este n°. 22, los coeficientes de v_m en las expresiones de los puntos $P_{2m-1}, P_{2m-2}, \ldots, P_m$, en los cuales aparece linealmente, son iguales, salvo un factor numérico, a $c_{m-1}, c_{m-2}, \ldots, c_0$. Por consiguiente, sin variar el espacio lineal determinado por los puntos (22.11), pueden suprimirse en las expresiones de $P_{2m-1}, P_{2m-2}, \ldots, P_m$ los términos que contienen v_m. Queda así que únicamente dependen de v_m los puntos siguientes:

a) El punto c_m, que según (21.7) y (21.1), es de la forma

$$c_m = A_1 + \alpha_1 F_2{}^2 v_m \qquad (22.12)$$

donde α_1 es un coeficiente numérico y A_1 depende únicamente de $v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}$.

b) El punto P_{2m+1} que se calcula fácilmente y es de la forma

$$P_{2m+1} = A_2 + B_2 v_m + \alpha_2 F_3{}^2 v_m{}^2. \tag{22.13}$$

c) El punto P_{2m}, que resulta ser de la forma

$$P_{2m} = A_3 + B_3 v_m + \alpha_3 F_2{}^2 v_m{}^2. \tag{22.14}$$

Como siempre, en las dos últimas expresiones A_2, B_2, A_3, B_3 son puntos que dependen únicamente de $v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}$ y α_2, α_3 son coeficientes numéricos. Además, al calcular explícitamente B_3 y A_1 se encuentra que son iguales salvo un factor numérico, de manera que se puede poner $B_3 = \beta A_1$, con lo cual el punto P_{2m} se escribe

$$P_{2m} = A_3 + \left(\beta - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) A_1 v_m + \frac{\alpha_3}{\alpha_1}(A_1 + \alpha_1 F_2{}^2 v_m) v_m.$$

Se deduce que el plano determinado por los puntos c_m, P_{2m+1}, P_{2m} puede también determinarse por los puntos c_m, P_{2m+1}, P^*_{2m}, donde

$$P^*_{2m} = A_3 + \left(\beta - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) A_1 v_m. \tag{22.15}$$

La variedad $W(2m+1, m-1)$ es, por tanto, la variedad que desde el $[3m-1]$ determinado por los $3m$ puntos que quedan en (22.11) al quitar los c_m, P_{2m+1}, P_{2m}, proyecta la V_3 engendrada por el plano determinado por los puntos c_m, P_{2m+1}, P^*_{2m} al variar v_m.

Las rectas que unen c_m con P^*_{2m}, al variar v_m envuelven una cónica, puesto que las rectas $c_m(v_m), P^*_{2m}(v_m)$ tiene el punto A_1 común. El punto P_{2m+1} al variar v_m describe una cónica siempre que $F_3{}^2$ sea independiente de v_m, o sea, siempre que sea $m > 1$.

Por tanto, para $m \geqq 2$, la variedad V_3 es la engendrada por los planos determinados por los puntos de una cónica y las tangentes a otra referida a ella proyectivamente; según el nº. 8 esta variedad es de orden 4. Por tanto se concluye:

La variedad $W(2m+1, m-1)$, *para* $m \geqq 2$, *es una variedad de dimensión* $3m+3$ *y orden* 4, *obtenida proyectando una* $V_3{}^4$ *desde un* $[3m-1]$ *fijo como vértice.*

Para $m=1$, la $W(3,0)$ es una $V_6{}^5$ (§ 3).

23. Variedades descritas por los espacios lineales $S(p,1)$. — Llamando m a la parte entera de $\frac{p}{2}$, hemos visto que las variedades $W(p, m+h)$ con $h \geqq 0$ son espacios lineales, que por lo tanto coincidirán con los espacios $S(p, m+v)$ tangentes a la superficie según un elemento $[m+h]$. De ahí se deduce que los espacios $S(p, m+h)$ con $h \geqq 1$, al variar v_{m+h}, o sea al variar el elemento $[m+h]$—osculador, manteniéndose fijos los elementos osculadores de orden inferior, describirán el espacio lineal $S(p, m+h-1)$. Queda el problema de estudiar, en general, las variedades descritas por los espacios lineales $S(p, h)$ con $1 \leqq h \leqq m$ al variar v_h.

Vamos a estudiar únicamente el caso de la variedad descrita por el espacio lineal $S(p, 1)$, al variar v_1, o sea, al variar la tangente a la superficie. Distinguiremos dos casos según la paridad de p.

1.º $p=2m-1$. — Por simple inducción de los casos $p=3$, $p=5$ ya estudiados (nos. 11, 19), se obtiene que el espacio lineal $S(2m-1, 1)$ es el determinado por los puntos

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{I} & \left\{ \begin{array}{l}
x, \\
x_u, \quad x_v, \\
x_{uu}, \quad x_{uv}, \quad x_{vv}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_{u^{m-1}}, \; x_{u^{m-2}v}, \dots, x_{v^{m-2}},
\end{array} \right. \\
 & \\
\mathrm{II} & \left\{ \begin{array}{l}
F_{p-(m-1)}, F^1{}_{p-(m-1)}, \dots, F^{m-1}{}_{p-(m-1)}, \\
F_{p-(m-2)}, F^1{}_{p-(m-2)}, \dots, F^{m-2}{}_{p-(m-2)}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
F_{p-1}, \quad F^1{}_{p-1}, \\
F_p.
\end{array} \right.
\end{array} \qquad (23.1)$$

La variedad descrita por el espacio lineal determinado por el grupo de puntos II, es la engendrada por los espacios lineales obtenidos como suma de un $[m-1]$ — osculador a la curva $F_{p-(m-1)}$, más un $[m-2]$ — osculador a la curva $F_{p-(m-2)}, \ldots,$ más un punto de F_p, tomados estos espacios osculadores en puntos correspondientes a un mismo valor de v_1 en las curvas mencionadas. Según al nº. 8, el orden de esta variedad es

$$(p-2(m-1))\, m + (p-2(m-2))\, (m-1) + (p-2(m-3))\,(m-2)$$
$$+ \ldots + (p-2)\,.\,2 + p$$

o sea, puesto que $p = 2m-1$:

$$1\,.\,m + 3\,(m-1) + 5\,(m-2) + \ldots + (2m-1)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} (2i-1)\,(m-i+1).$$

El valor de esta suma se calcula fácilmente recordando que $\sum_{1}^{m} i^2 = \frac{1}{6}\, m\,(m+1)\,(2m+1)$ y resulta igual a

$$\frac{1}{6}\, m\,(m+1)\,(2m+1). \qquad (23.\,2)$$

Por tanto: *la variedad descrita por los* $S(2m-1, 1)$, *al variar la tangente a la superficie, es la que desde el*

$$\left[\frac{m(m+1)}{2} - 1\right]$$

definido por los puntos I *de* (23. 1) *proyecta una variedad de orden* $\frac{1}{6}\, m\,(m+1)\,(2m+1)$ *y dimensión*

$$\frac{m(m+1)}{2}.$$

2.º $p = 2m$. — Por inducción de los casos $p=4$, $p=6$ ya estudiados en § 4 y § 6, resulta que $S(p, 1)$ está determinado por los puntos

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{I}\left\{\begin{array}{l}
x, \\
x_u, \quad x_v, \\
x_{uu}, \quad x_{uv}, \quad x_{vv}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_u{}^m, \; x_u{}^{m-1}v, \ldots, x_{uv}{}^{m-1}, \; x_v{}^m,
\end{array}\right. \\
&\mathrm{II}\left\{\begin{array}{l}
F_{p-(m-1)}, F^1{}_{p-(m-2)}, \ldots, F^{m-1}{}_{p-(m-1)}, \\
F_{p-(m-2)}, F^1{}_{p-(m-1)}, \ldots, F^{m-2}{}_{p-(m-2)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
F_{p-1}, \quad F^1{}_{p-1}, \\
F_m.
\end{array}\right.
\end{aligned}
\qquad (23.3)
$$

Por tanto, como en el caso anterior de p impar, resulta que el orden de la variedad descrita por los espacios lineales determinados por los puntos II al variar v_1 es de orden

$$\sum_{i=1}^{m} 2i\,(m-i+1) = \frac{1}{3} m(m+1)\,(m+2) \qquad (23.4)$$

Por tanto, *la variedad descrita por los espacios lineales* $S(2m, 1)$ *al variar la tangente a la superficie, es la que desde el*

$$\left[\frac{m(m+3)}{2}\right]$$

determinado por los puntos I *de* (23. 3) *proyecta una variedad de dimensión*

$$\frac{m(m+1)}{2}$$

y orden $\frac{1}{3} m(m+1)\,(m+2)$.

SIGNIFICACION DE ALGUNOS SIMBOLOS

Las letras u, v representan variables numéricas (parámetros)

$$v_\lambda = \frac{d^\lambda v}{du^\lambda}$$

Las letras x, $x_u, x_v, \ldots$ F, $F_n^m \ldots$ representan puntos en un espacio de un número de dimensiones bastante grande.

$x(u,v)$ punto corriente sobre una dada superficie

$x_{u^\alpha v^\beta} = \dfrac{\partial^{\alpha+\beta} x}{\partial u^\alpha \partial v^\beta}$ extremo del vector derivada con origen en $x(00)$

Los puntos F_m^n se consideran generalmente como funciones de las variables v_1.

ent $\left[\frac{m}{n}\right]$ parte entera del quebrado $\frac{m}{n}$.

V_m^n variedad algebraica de dimensión m y orden n

$W(p,q)$ variedad engendrada por los $|p|$—osculadores a las curvas de la superficie lugar del punto $x(u,v)$, que pasan por el punto $x(00)$ con $|q|$—osculador común ($q<p$).

$S(p,q)$ espacio lineal de dimensión mínima que contiene $W(p,q)$

$\sigma(p,q)$ dicha dimensión.

ALGUNOS NUMEROS

	Dimensión	*Orden*	$\sigma(p,q)$
$W(1,0)$	2	1	2
$W(2,1)$	3	1	3
$W(2,0)$	4	2	5
$W(3,2)$	4	1	4
$W(3,1)$	5	1	5
$W(3,0)$	6	5	9
$W(4,3)$	5	1	5
$W(4,2)$	6	1	6
$W(4,1)$	7	2	8
$W(4,0)$	8	14	14

	Dimensión	*Orden*	$\sigma(p,q)$
$W(5,4)$	6	1	6
$W(5,3)$	7	1	7
$W(5,2)$	8	1	8
$W(5,1)$	9	4	11
$W(5,0)$	10	42	20
$W(6,5)$	7	1	7
$W(6,4)$	8	1	8
$W(6,3)$	9	1	9
$W(6,2)$	10	2	11
$W(6,1)$	11	12	15
$W(6,0)$	12	124	27

INDICE

Fascículos aparecidos en las "PUBLICACIONES" del Instituto de Matemáticas

		m$n.
Vol. I.	1 - B. LEVI — *Sobre el sistema* $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(xy)dx=p(y);\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(xy)dy=q(x)$	1.00
	2 - L. A. SANTALÓ — *Geometría integral de figuras ilimitadas*	1.80
	3 - F. AMODEO — *Origen y desarrollo de la Geometría proyectiva.* Trad. de Nicolás y José Babini	8.00
	4 - B. LEVI — *Una teoría intuicionista de las funciones racionales enteras de una variable*	1.00
Vol. II.	1 - P. MONTEL — *Funciones armónicas y subarmónicas*	1.00
	2 - G. FUBINI — *La ley de la media para funciones no derivables.* B. LEVI — *Sobre un teorema de Weierstrass, el teorema de Rolle y el anterior teorema de Fubini*	1.00
	3 - L. A. SANTALÓ — *Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo*	1.20
	4 - L. A. SANTALÓ — *Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas*	1.50
	5 - I. Antecedentes de la creación del Instituto. — II. Acto de inauguración oficial del Instituto. — C. PLA, *Origen y propósitos del Instituto.* — J. REY PASTOR, *La matemática italiana en el último medio siglo y la posición del Dr. Beppo Levi en ella.* — B. LEVI, *Evolución del pensamiento matemático*	1.50
	6 - E. GASPAR — *Fórmulas integrales referentes a intersección de una figura plana con bandas variables*	1.50
	7 - A. ROSENBLATT — *Sobre el teorema de los grandes números en la teoría de la probabilidad*	1.00
	8 - M. COTLAR — *Sobre conjuntos no medibles y generalización de la integral de Lebesgue* - Prólogo por B. Levi	1.50
	9 - B. LEVI — *La noción de "dominio deductivo" como elemento de orientación en las cuestiones de fundamentos de las teorías matemáticas*	1.50
Vol. III.	1 - Homenaje a la memoria de V. Volterra y J. J. Thomson. C. PLÁ — *Semblanza de Sir Joseph J. Thomson.* B. LEVI — *La personalidad de Vito Volterra*	1.00
	2 - G. FUBINI — *Algunas propiedades de los grupos discontinuos finitos*	2.50
	3 - B. LEVI — *Teoría de la integral de Lebesgue independiente de la noción de medida*	3.00
	4 - B. LEVI — *Sobre la inversión de una integral definida*	1.20
	5 - L. A. SANTALÓ — *Curvas extremales de la torsión total y curvas-D.*	2.00
	6 - A. TERRACINI — *Orígenes de algunos conceptos geométricos*	2.00
	7 - L. A. SANTALÓ — *Complemento a la Nota "Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas"*..	1.30
Vol. IV.	1 - L. A. SANTALÓ. — *Sobre ciertas variedades con carácter de desarrollable en el espacio euclidiano de cuatro dimensiones*	3.00
	2 - M. COTLAR — *Funciones univalentes sobre un conjunto de puntos del contorno de un dominio de holomorfismo*	2.00
	3 - JOSÉ L. MASSERA. — *Fórmulas en diferencias finitas con aplicación a la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales de primer orden*	3.50
	4 - A. KOMISCHKE. — *Sobre las relaciones entre la luz y la gravitación*	2.50
	5 - R. LAGUARDIA y B. LEVI. — *Sobre la representación por integrales de algunas funciones definidas por desarrollos de Taylor y aplicación a las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales*	2.00
Vol. V y VI.	*Memorias ofrecidas por varios amigos, alumnos y admiradores en homenaje al Dr. Julio Rey Pastor*	30.00
Vol. VII.	1 - J. C. VIGNAUX y M. COTLAR. — *Las familias totalmente normales de funciones analíticas*	6.00
	2 - J. V. USPENSKY. — *Sobre el problema de la ruina de los jugadores*	2.50
	3 - F. I. TORANZOS — *Sobre proyectividad en los espacios de Hilbert*	1.00
	4 - E. A. SAGASTUME BERRA — *El álgebra moderna y sus problemas*	2.00

En preparación:

Vol. VIII.	1 - B. LEVI - L. A. SANTALÓ - C. DEMARÍA — *Estudios numerativos sobre las variedades de contacto de las superficies en un espacio de n dimensiones*	