Vol. II N.º 4

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS etc.

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

PUBLICACIONES

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICAS

Director: Prof. Dr. BEPPO LEVI

L. A. SANTALÓ

UN TEOREMA SOBRE CONJUNTOS DE PARALELEPIPEDOS DE ARISTAS PARALELAS

*

ROSARIO
REPUBLICA ARGENTINA
1940

UN TEOREMA SOBRE CONJUNTOS DE PARALELEPIPEDOS DE ARISTAS PARALELAS

POR

L. A. SANTALÓ

RESUMEN: Se demuestra el teorema siguiente: "Dado en el plano un conjunto de paralelogramos de lados paralelos a dos direcciones fijas, si cada 6 de ellos tienen puntos sobre una misma recta, existe una recta que tiene punto común con todos los paralelogramos del conjunto".

En II se generaliza este teorema al espacio ordinario y algunos casos particulares del espacio de n - dimensiones.

Es conocido el siguiente teorema:

«Dado en el plano un conjunto de figuras convexas, si 3 a 3 de ellas tienen punto común, existe un punto común a todas las figuras del conjunto».

Este teorema debido a HELLY se puede generalizar a conjuntos de figuras convexas de un espacio de cualquier número de dimensiones. Una demostración para este caso general fué dada por RADON (¹) en 1921 y otra por KÖNIG (²) en 1922.

VINCENSINI (³) en 1935 propuso el problema correlativo siguiente: «Dado un conjunto de figuras convexas en el plano, se puede dar un número n tal que si n a n de ellas poseen una recta secante común, exista una recta secante a todas las figuras del conjunto?».

(¹) RADON, *Mengen Konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten.* Math. Ann. 83, 1921, pág. 113.

(²) KÖNIG, *Ueber konvexe Körper.* Math. Zeits. 14, 1922, pág. 208.

(³) VINCENSINI, *Figures convexes et varietés linéaires de l'espace euclidien a n dimensions.* Bull. Sciences Math. 59 (París, 1935), pág. 163.

La solución que da Vincensini de este problema, como ya fué notado por Schönhardt (4) es errónea. Se puede ver, efectivamente, que la cuestión así planteada no admite solución. Tomando como figuras convexas los segmentos indicados en la fig. 1 (formados por los lados, convenientemente prolongados, de un polígono regular de 7 lados) se vé que para cada seis de ellos existe una secante común y sin embargo no hay ninguna recta que corte a todos.

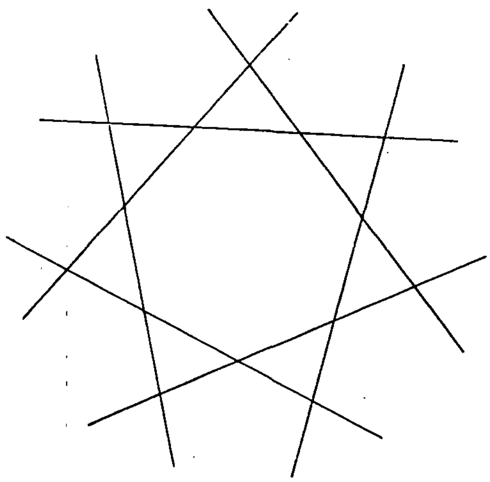

Fig. 1

Una figura análoga se puede construir para cualquier número de segmentos y por tanto: cualquiera que sea n, se pueden dar siempre $n+1$ figuras convexas tales que n cualesquiera de ellas tengan una secante común y sin embargo no exista ninguna secante común a todas.

No obstante el problema tiene solución si se limitan las figuras convexas a ser paralelogramos de lados paralelos a dos direcciones fijas. Es decir, para el caso de tratarse de un conjunto de paralelogramos como los indicados en la fig. 2, los cuales pueden, naturalmente, reducirse a segmentos.

(4) Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Bd. 61 (1935). Pág. 757.

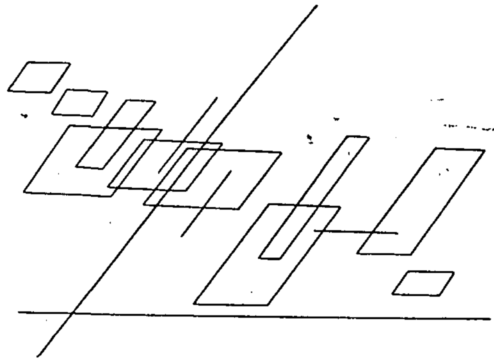

Fig. 2

En este caso vamos a demostrar que vale el teorema:

«Dado un conjunto de paralelogramos de lados paralelos a dos direcciones fijas, si cada 6 de ellos tienen puntos sobre una misma recta, existe una recta que tiene punto común con todos los paralelogramos del conjunto».

También para el espacio valen dos teoremas análogos:

«Si un conjunto de paralelepípedos es tal que para cada 16 de ellos hay un plano que los corta, existe un plano que corta a todos».

«Si un conjunto de paralelepípedos es tal que para cada 20 de ellos hay una recta que los corta, existe una recta que corta a todos».

La demostración que damos de estos teoremas se basa en la idea que utiliza RADON en su trabajo citado para demostrar el teorema enunciado al principio.

En I resolvemos el problema para el plano y en II para el espacio para conjuntos finitos. En III se extienden los resultados al caso de conjuntos infinitos. En IV se enuncian dos cuestiones que quedan por resolver.

I. CASO DEL PLANO

El teorema a demostrar es:

«Dado un conjunto finito de paralelogramos de lados paralelos a dos direcciones fijas, si 6 a 6 de ellos tienen una secante común, existe una secante común a todos» (5).

Procedemos por inducción. Como para un conjunto de 6 paralelogramos es evidente, hay que demostrar que si es cierto para N, lo es para $N + 1$.

Sean pues $N + 1$ paralelogramos P_1, P_2, $P_3, \ldots P_{N+1}$ de lados paralelos a dos direcciones fijas y tales que cada 6 de ellos admitan una secante común. Como para N paralelogramos suponemos el teorema cierto, todo grupo de N paralelogramos tomados entre los $N + 1$ dados, admitirá una secante común. Hay que demostrar que también habrá una secante común a los $N + 1$.

Tomemos unos ejes coordenados paralelos a las direcciones fijas de los lados de los paralelogramos. En este sistema de coordenadas oblicuas, representemos por

$$a\,x + b_k\,y + c_k = 0 \tag{1}$$

a la recta que tiene punto común con todos los paralelogramos menos, tal vez, con el P_k. Tendremos así $N + 1$ rectas correspondientes a $k = 1, 2, \ldots N + 1$.

Se puede elegir que el primer coeficiente a sea positivo y siempre el mismo para todas las rectas. De estas rectas elegimos 4 tales que los coeficientes b_K sean del mismo signo. Esto será seguramente posible si $N + 1 \geqq 7$, o sea $N \geqq 6$, lo cual se realiza en nuestra hipótesis. Estas rectas se puede suponer que sean las 4 primeras y serán, o bien del tipo

$$a\,x + b_k\,y + c_k = 0 \tag{2}$$

o bien del tipo

$$a\,x - b_k\,y + c_k = 0 \tag{3}$$

donde la a y las b_k son positivas y las c_k pueden ser de signo cualquiera.

Consideremos el sistema de ecuaciones homogéneas

(5) Por comodidad llamamos *secante* a toda recta que tiene algún punto común con el paralelógramo, aunque no le divida en dos partes.

$$\begin{aligned} \Sigma \lambda_k &= 0 \\ \Sigma b_k \lambda_k &= 0 \\ \Sigma c_k \lambda_k &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

con las incógnitas λ_k $(k = 1, 2, 3, 4)$.

Teniendo en cuenta la primera ecuación, las λ_k no pueden ser todas del mismo signo. Separemos a un miembro las positivas y al otro las negativas:

$$\begin{aligned} \Sigma' \lambda_k &= \Sigma'' \lambda_k \\ \Sigma' b_k \lambda_k &= \Sigma'' b_k \lambda_k \\ \Sigma' c_k \lambda_k &= \Sigma'' c_k \lambda_k \end{aligned} \tag{5}$$

donde con un acento se indica que la sumación está extendida a las λ_k positivas y con dos acentos a las negativas.

Si las 4 rectas eran del tipo (2), consideramos la recta de ecuación

$$a(\Sigma' \lambda_k)\, x + (\Sigma' b_k \lambda_k)\, y + (\Sigma' c_k \lambda_k) = 0 \tag{6}$$

que es idéntica a la

$$a(\Sigma'' \lambda_k)\, x + (\Sigma'' b_k \lambda_k)\, y + (\Sigma'' c_k \lambda_k) = 0 \tag{6'}$$

Si eran del tipo (3) consideraríamos la recta que puede representarse indistintamente por una cualquiera de las ecuaciones

$$\begin{aligned} a(\Sigma' \lambda_k)\, x - (\Sigma' b_k \lambda_k)\, y + (\Sigma' c_k \lambda_k) &= 0 \\ a(\Sigma'' \lambda_k)\, x - (\Sigma'' b_k \lambda_k)\, y + (\Sigma'' c_k \lambda_k) &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

La recta así obtenida, la (6) o la (7), según el caso de que se trate, *tendrá punto común con todos los paralelogramos.*

En efecto, sea un paralelogramo P_i. Supongamos por ejemplo que se trata del primer caso en que las 4 rectas son de la forma (2). Como P_i es cortado por las rectas (1) excepto por la correspondiente a $k = i$, tendrá N puntos $x_k^{(i)}$, $y_k^{(i)}$ que satisfacen

$$a x_k^{(i)} + b_k y_k^{(i)} + c_k = 0$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots i - 1, i + 1, \ldots, N + 1. \qquad (8)$$

El índice i no puede formar parte al mismo tiempo de los valores de k que figuran en las dos ecuaciones (6) y (6'); puede ser que no figure en ninguna (si $i \neq 1, 2, 3, 4$), pero por lo menos en una no figurará. Sea la (6) aquella en la cual las Σ' no comprenden el valor $k = i$. Consideremos el punto

$$\xi^{(i)} = \frac{\Sigma' \lambda_k x_k^{(i)}}{\Sigma' \lambda_k} \qquad \eta^{(i)} = \frac{\Sigma' b_k \lambda_k y_k^{(i)}}{\Sigma' b_k \lambda_k}$$

Este punto pertenece a P_i y además cumple la ecuación (6), puesto que siendo $k \neq i$ se cumplen las (8). Queda, por tanto, demostrado el enunciado.

II. Caso del espacio

1. *Planos que cortan a un conjunto de paralelepípedos.* Elijamos unos ejes coordenados paralelos a las tres direcciones de las aristas de los paralelepídedos. El problema se conduce de la misma manera que para el plano, pero ahora (para formar el sistema de las λ_k análogo al (4)) se necesitan 5 ecuaciones del tipo

$$a x + b_k y + c_k z + d_k = 0$$

tales que para todas ellas las b_k tengan signo constante y lo mismo las c_k. Para ello es preciso disponer de 17 ecuaciones de planos. Entonces es seguro que se podrán tomar 9 de ellas con las b_k del mismo signo y dentro de estas otras 5 con las c_k también de signo constante. Con el mismo razonamiento que para el plano, esto nos dice que debe ser $N + 1 \geqq 17$, o sea, $N \geqq 16$. La construcción del plano que tiene punto común con todos los paralelepípedos se hace igual que para construir la recta en el caso del plano. Queda pues:

«Dados en el espacio un conjunto finito de paralelepípedos con las aristas paralelas a tres direcciones fijas, si cada 16 de ellos tienen puntos situados en un mismo plano, existe un plano que tiene punto común con todos».

El procedimiento de demostración es general para cualquier número de dimensiones. Se obtiene:

«*Dado en el espacio euclideo* n*-dimensional un conjunto finito de paralelepípedos con las aristas paralelas a* n *direcciones fijas, si cada* 2^{n-1} $(n+1)$ *de ellos tienen un hiperplano secante común, existe un hiperplano con punto común con todos*».

2. *Rectas que cortan a un conjunto de paralelepípedos.* Tomemos también un sistema de ejes paralelos a las direcciones de las tres aristas concurrentes de los paralelepípedos. El resultado a demostrar es:

«Dado un conjunto finito de paralelepípedos con las aristas paralelas a 3 direcciones fijas, tal que cada 20 de ellos posean una recta secante común, existe una recta secante común a todos».

Como en el caso del plano y procediendo por inducción el problema se reduce a demostrar que si, dados $N+1$ paralelepípedos, N cualesquiera de ellos tienen una secante común, existe una secante común a todos.

Sean P_1, P_2, $P_3, \ldots$, P_{N+1} los paralelepípedos. La recta que corta a todos ellos menos a P_k, puede ponerse en la forma

$$\begin{aligned} a\,x + b_k\,y + c_k &= 0 \\ a\,x + d_k\,z + e_k &= 0 \end{aligned} \qquad (9)$$

Necesitamos 6 de estas rectas para las cuales las b_k y las d_k tengan signo constante. Para ello es suficiente disponer de 21 rectas, pues de ellas habrá forzosamente 11 con las b_k del mismo signo y dentro de éstas habrá también seguro 6 con las d_k de signo constante. Debe ser, pues, $N+1 \geqq 21$ o sea $N \geqq 20$, lo cual se cumple según el enunciado.

Se puede suponer que las 6 rectas así elegidas sean las correspondientes a $k=1, 2, \ldots, 5, 6$. Sean por ejemplo de la forma

$$\begin{aligned} & a\,x + b_k\,y + c_k = 0 \\ & a\,x - d_k\,z + e_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, 6) \end{aligned} \tag{10}$$

El razonamiento se seguiría de manera análoga si el signo de las b_k o d_k fuera distinto del indicado.

Formemos el sistema

$$\begin{aligned} \Sigma \lambda_k &= 0 \\ \Sigma b_k\,\lambda_k &= 0 \\ \Sigma c_k\,\lambda_k &= 0 \\ \Sigma d_k\,\lambda_k &= 0 \\ \Sigma e_k\,\lambda_k &= 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, 6) \end{aligned} \tag{11}$$

con las incógnitas λ_k. Este sistema de ecuaciones homogéneas tiene solución y se pueden separar a un miembro los términos correspondientes a λ_k positivas y al otro las negativas. Queda así

$$\begin{aligned} \Sigma' \lambda_k &= \Sigma'' \lambda_k \\ \Sigma'\, b_k\,\lambda_k &= \Sigma''\, b_k\,\lambda_k \\ \Sigma' c_k\,\lambda_k &= \Sigma''\, c_k\,\lambda_k \\ \Sigma' d_k\,\lambda_k &= \Sigma''\, d_k\,\lambda_k \\ \Sigma' e_k\,\lambda_k &= \Sigma''\, e_k\,\lambda_k \end{aligned} \tag{12}$$

La recta

$$\begin{aligned} & a\,(\Sigma' \lambda_k)\,x + (\Sigma' b_k\,\lambda_k)\,y + (\Sigma' c_k\,\lambda_k) = 0 \\ & a\,(\Sigma' \lambda_k)\,x - (\Sigma' d_k\,\lambda_k)\,z + (\Sigma' e_k\,\lambda_k) = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

que también puede representarse por

$$
\left.\begin{aligned}
a(\Sigma''\lambda_k)\,x + (\Sigma''b_k\,\lambda_k)\,y + (\Sigma''c_k\,\lambda_k) = 0 \\
a(\Sigma''\lambda_k)\,x - (\Sigma''d_k\,\lambda_k)\,x + (\Sigma''e_k\,\lambda_k) = 0
\end{aligned}\right\} \quad (13')
$$

corta a todos los $N + 1$ paralelepípedos.

En efecto, sea P_i uno cualquiera de ellos. Consideremos de las representaciones (13) o (13') aquella en la cual el índice k no toma el valor i. Sea por ejemplo la (13). Como P_i es cortado por todas las rectas (9) menos la correspondiente a $k = i$, para los valores de k que figuran en (13) hay puntos de P_i que cumplen

$$
\begin{aligned}
a\,x_k^{(i)} + b_k\,y_k^{(i)} + c_k = 0 \\
a\,x_k^{(i)} - d_k\,z_k^{(i)} + e_k = 0
\end{aligned} \quad (14)
$$

El punto

$$
\xi^{(i)} = \frac{\Sigma'\lambda_k\,x_k^{(i)}}{\Sigma'\lambda_k}, \quad \eta^{(i)} = \frac{\Sigma\,b_k\,\lambda_k\,y_k^{(i)}}{\Sigma'b_k\,\lambda_k}, \quad \zeta^{(i)} = \frac{\Sigma'd_k\,\lambda_k\,z_k^{(i)}}{\Sigma'd_k\,\lambda_k}
$$

pertenece a P_i y, teniendo en cuenta (14), se ve que satisface a las ecuaciones (13) o sea, pertenece a la recta dicha.

El mismo procedimiento es generalizable sin apenas modificación a un espacio euclideo de cualquier número de dimensiones. Representando una recta por $n - 1$ ecuaciones de la forma:

$$
\begin{aligned}
&a\,x_1 + b_2\,x_2 + c_2 = 0 \\
&a\,x_1 + b_3\,x_3 + c_3 = 0 \\
&a\,x_1 + b_4\,x_4 + c_4 = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a\,x_1 + b_n\,x_n + c_n = 0\,,
\end{aligned}
$$

el camino seguido anteriormente se reproduce sin dificultad. Se obtiene entonces:

«*Dado en el espacio n-dimensional un conjunto finito de paralelepípedos con las aristas paralelas a n direcciones fijas, si para cada* $2^{n-1}(2n-1)$ *de ellos existe una recta que los corta, existe una recta que corta a todos*».

III. Generalización a conjuntos infinitos

Los resultados anteriores valen también para el caso de tratarse de conjuntos infinitos de paralelogramos o paralelepípedos situados a distancia finita, es decir, contenidos todos en una región acotada del plano.

Consideremos primero el caso del plano.

Sea en primer lugar una infinidad numerable P_1, P_2, $P_3, \ldots, P_n \ldots$ de paralelogramos. Tomemos uno cualquiera P_0 de ellos y vayamos considerando las rectas R_1, $R_2, R_3, \ldots, R_n, \ldots$ que cortan a $P_0 P_1$, $P_0 P_1 P_2$, $P_0 P_1 P_2 P_3$, $P_0 P_1 P_2 P_3 \ldots P_n, \ldots$ Tracemos una circunferencia de centro un punto cualquiera O que comprenda en su interior a P_0. Cada recta R_n puede representarse por el punto Q_n proyección de O sobre ella. Los puntos Q_n son todos interiores a la circunferencia dicha y como son infinitos existirá uno Q de acumulación. La recta correspondiente a este punto, o sea, la perpendicular por Q a la recta O Q, corta a todos los paralelogramos. En efecto, si no cortara a uno de ellos P_i, existiría un entorno de Q tal que todas las rectas correspondientes a sus puntos tampoco le cortarían (se suponen los paralelogramos con los lados incluídos, es decir, se consideran como conjuntos cerrados). Pero esto no puede ser por ser Q punto de acumulación de puntos Q_n y por tanto existir en todo entorno del mismo puntos cuyas rectas correspondientes cortan a cualquier P_i por grande que sea i en la sucesión numerable dada.

Podría ocurrir que el punto de acumulación Q fuera el mismo O. Entonces se elige una sucesión de puntos Q_n que tienda a O y se toma una dirección límite de las rectas que los unen con O. La perpendicular por O a esta dirección se ve, como antes, que corta a todos los paralelogramos.

Demostrado para conjuntos numerables, el paso a conjuntos cualesquiera se puede hacer de la manera siguiente. Todo paralelogramo se puede sustituir por otro que lo contenga en su interior de lados paralelos suficientemente próximos para que todo punto del mismo diste del primero menos de ε y tal que los vértices sean puntos de coordenadas racionales. El conjunto así obtenido es numerable y como para cada 6 de sus paralelogramos existirá una secante común, se tendrá para cada ε

una secante común a los infinitos paralelogramos del conjunto numerable. Una de estas rectas que corte a todos los paralelogramos del conjunto numerable, poseerá puntos que estarán a lo sumo a distancia ε de los paralelogramos del conjunto primitivo; dando a ε una sucesión decreciente de valores $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \ldots$, con $\lim \varepsilon_i = 0$, una recta límite cualquiera del sistema debe cortar a todos.

Para el caso del espacio, si se trata de planos se puede proceder análogamente, representando cada plano por la proyección sobre él de un punto fijo O.

Para el caso de rectas, no basta para determinarlas la intersección de las mismas con el plano perpendicular trazado por un punto fijo, hay que dar además la dirección de la normal a este plano. Se puede proceder de la manera siguiente: Sea primero una infinidad numerable de paralelepípedos $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$ Consideremos las rectas R_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ que cortan a los n primeros paralelepípedos de la sucesión y una esfera de centro un punto cualquiera O que comprenda a P_0 en su interior. Desde O se trazan los planos perpendiculares a las R_n y las rectas paralelas a las mismas. Las intersecciones de los primeros con las R_n determinan un conjunto de puntos A_n interiores a la esfera, y las rectas paralelas determinan sobre la superficie de la esfera otro conjunto de puntos B_n. Por ser en número infinito, los A_n tendrán por lo menos un punto de acumulación A. Tomemos una sucesión $A_1, A_2, A_3, \ldots$ tendiendo a A. Los puntos correspondientes B_i del conjunto de puntos sobre la esfera tandrán también por lo menos un punto de acumulación B. La recta que pasa por A y es paralela a OB corta a todos los paralelepípedos, como es fácil ver.

El paso a conjuntos no numerables se hace igual que para el plano.

IV. Cuestiones por resolver

El procedimiento seguido deja por resolver las dos cuestiones siguientes:

1. Los números obtenidos, 6 para asegurar en el plano la existencia de una secante común, 16 cuando se trata de planos secantes en el espacio, 20 para el caso de rectas,... son los

mínimos? Es decir, por ejemplo para el caso del plano, es posible dar 6 paralelogramos de lados paralelos a dos direcciones fijas tales que 5 a 5 de ellos tengan una secante común y *no* exista ninguna recta que corte a los 6?

2. En el espacio euclideo n-dimensional hemos considerado las rectas y los hiperplanos. Qué ocurre al considerar variedades lineales secantes de r dimensiones? Es decir, para qué número ν se cumplirá que si en un conjunto dado de paralelepípedos de aristas paralelas a n direcciones fijas ν cualesquiera de ellos tienen una variedad lineal de r dimensiones secante común, exista una variedad de r dimensiones secante común a todos?

Los casos resueltos corresponden a $r = 1$ y $r = n - 1$.

Rosario, Instituto de Matemáticas, junio 1940.