Vol. IV N.º 1

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS etc.

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

PUBLICACIONES

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

Director: BEPPO LEVI



L. A. SANTALÓ


# SOBRE CIERTAS VARIEDADES CON CARACTER DE DESARROLLABLE EN EL ESPACIO EUCLIDIANO DE 4 DIMENSIONES

*


ROSARIO

# SOBRE CIERTAS VARIEDADES CON CARACTER DE DESARROLLABLE EN EL ESPACIO EUCLIDIANO DE CUATRO DIMENSIONES

POR

L. A. SANTALÓ

RESUMEN: Una variedad contenida en un espacio euclidiano $n$-dimensional y engendrada por $\infty^{\alpha}$ espacios lineales $E_m$ se dice que tiene carácter de desarrollable cuando tiene el mismo espacio lineal tangente para todos los puntos de un mismo $E_m$ generador.

En este trabajo se caracterizan desde el punto de vista de la Geometría Diferencial, ciertas variedades de este tipo que estan contenidas en $E^4$ Se consideran: I. Variedades desarrollables de 2 dimensiones engendradas por rectas que pasan por una línea fija. II. Variedades desarrollables de tres dimensiones engendradas por planos. III. Variedades de 3 dimensiones con carácter de desarrollable engendradas por $\infty^2$ rectas.

Se obtienen además ciertas relaciones que deben cumplir las líneas o superficies de $E_4$ para que por ellas pasen variedades desarrollables con determinadas propiedades

## INTRODUCCIÓN

Representemos por $E_n$ el espacio lineal de $n$ dimensiones. Es bien sabido que las superficies regladas desarrollables de $E_3$ se caracterizan por tener el mismo plano tangente para todos los puntos de una generatriz. Generalizando esta propiedad, se dice que una variedad formada por $\infty^{\alpha}$ espacios $E_m$ tienen *carácter de desarrollable* cuando el espacio lineal tangente a la variedad es el mismo para todos los puntos de un $E_m$ generador (1).

Limitándonos a las variedades contenidas en el espacio euclidiano de 4 dimensiones, habrá que considerar los casos:

a) Variedades bidimensionales (superficies) formadas por rectas.

---

(1) Ver C. SEGRE [8] pág. 111, A. TERRACINI [12] nº 26 (los paréntesis cuadrados se refieren a la bibliografía al final). En alemán estas variedades se llaman *torsen*, ver H. GERICKE [3] pág. 416.

b) Variedades tridimensionales formadas por $\infty^1$ planos.

c) Variedades tridimensionales formadas por $\infty^2$ rectas.

En los casos a) y b) las variedades son efectivamente desarrollables en el sentido de ser aplicables isométricamente sobre un espacio lineal de 2 y 3 dimensiones respectivamente. Basta observar, en efecto, que en ambos casos la condición impuesta equivale a decir que un elemento generador infinitamente próximo a otro cualquiera está con él en un mismo espacio tangente; por tanto, en el caso a) toda generatriz corta a otra infinitamente próxima y en el caso b) todo plano generador corta a otro infinitamente próximo según una recta. Por esto a las variedades de los casos a) y b) las llamaremos, simplemente, *variedades desarrollables*.

En cambio, para el caso c), que equivale a decir que generatrices infinitamente próximas están en un mismo $E_3$, no siempre ocurre que la variedad sea aplicable isométricamente sobre un $E_3$, y por tanto conservaremos el nombre de *variedades con carácter de desarrollables*.

En este trabajo vamos a estudiar algunas particulares variedades de estos diversos tipos, ligadas con una línea o una superficie fija de $E_4$ (2).

## I. Superficies desarrollables que pasan por una línea fija.

### § 1. *Fórmulas conocidas.*

*1.* Supongamos en $E_4$ una línea fija dada por su ecuación vectorial

$$X = X(s) \tag{1}$$

referida al arco $s$ como parámetro.

Al vector $X'(s)$, de módulo uno, lo representaremos por $T$ y se llama *vector tangente.* El vector de módulo uno, que tiene la dirección de $X''(s)$, se llama *vector normal principal*

(2) Debo expresar mi agradecimiento al Sr. B. Levi por ciertas simplificaciones en los cálculos y acertadas indicaciones sobre diversos puntos del trabajo.

o *normal primera* y lo representaremos por $N$. En el $E_3$ definido por los vectores $X'$, $X''$, $X'''$ hay un vector de módulo uno perpendicular a $X'$ y a $X''$; lo llamaremos vector *segundo normal* o *binormal* y lo representaremos por $B$. Finalmente al vector unitario de $E_4$, que es perpendicular al $E_3$, determinado por los vectores anteriores, lo llamaremos *tercer normal* o *trinormal* y lo representaremos por $D$.

Los 4 vectores $T$, $N$, $B$, $D$ forman el *tetraedroide fundamental* vinculado a cada punto de la curva (1); todos ellos son funciones del arco $s$ y sus derivadas se expresan por las fórmulas fundamentales siguientes que generalizan a $E_4$ las clásicas fórmulas de Frenet-Serret de la teoría de curvas alabeadas (3)

$$\begin{aligned} T' &= \varkappa_1 N \qquad\qquad , \quad N' = -\varkappa_1 T + \varkappa_2 B, \\ B' &= -\varkappa_2 N + \varkappa_3 D, \quad D' = -\varkappa_3 B. \end{aligned} \tag{2}$$

$\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ son, respectivamente, la primera, segunda y tercera curvatura de la curva (1).

Se sabe que la condición para que la curva (1) no esté contenida en un espacio lineal de menor número de dimensiones, es que las curvaturas no sean constantemente cero. Si $\varkappa_3 = 0$ la curva está en un $E_3$; si $\varkappa_2 = 0$ es una curva plana y si $\varkappa_1 = 0$ es una recta.

## § 2. *Superficies desarrollables que pasan por una línea.*

4. Una superficie reglada que pase por la curva (1) se podrá representar por una ecuación vectorial de la forma

$$Y(s, \lambda) = X(s) + \lambda U(s) \tag{3}$$

siendo $U(s)$ un vector de módulo 1 función de $s$.

El plano tangente en el punto $s, \lambda$ de la superficie (3) es el determinado por los dos vectores $Y_s = X' + \lambda U'$ y $Y_\lambda = U$. Para que este plano sea independiente de $\lambda$ (condición para que la superficie sea desarrollable según la definición) *es necesario*

(3) Ver, por ej. [5], p. 16; [3], p. 417.

*y suficiente que los 3 vectores $X' = T$, $U$, $U'$ estén en un plano.* Vamos a expresar analíticamente esta condición.

El vector $U(s)$ se puede descomponer en sus componentes según el tetraedroide fundamental vinculado a la curva; sea

$$U = \alpha_1 T + \alpha_2 N + \alpha_3 B + \alpha_4 D \tag{4}$$

con la condición

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = 1 \tag{5}$$

que expresa que $U$ es de módulo unidad.

Derivando (4) y aplicando las fórmulas de Frenet-Serret (2) se obtiene

$$\begin{aligned} U' = {} & (\alpha'_1 - \alpha_2 \varkappa_1)\, T + (\alpha_1 \varkappa_1 + \alpha'_2 - \alpha_3 \varkappa_2)\, N \\ & + (\alpha_2 \varkappa_2 + \alpha'_3 - \alpha_4 \varkappa_3)\, B + (\alpha_3 \varkappa_3 + \alpha'_4)\, D. \end{aligned} \tag{6}$$

La condición para que $T$, $U$, $U'$ estén en un plano, es que la característica de la matriz formada por las componentes de estos 3 vectores sea igual a 2. Representando, para abreviar, por $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$ a los coeficientes respectivos de $T$, $N$, $B$, $D$ en (6), dicha matriz es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{pmatrix}$$

y por tanto, escribiendo que son nulos todos los menores de tercer orden y poniendo ya en lugar de $e_i$ sus valores, se obtienen las condiciones:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) \quad \alpha_2 \alpha'_3 - \alpha'_2 \alpha_3 - (\alpha_2^2 + \alpha_3^2)\varkappa_2 - \alpha_1 \alpha_3 \varkappa_1 - \alpha_2 \alpha_4 \varkappa_3 = 0 \\ &(\mathrm{II}) \quad \alpha_2 \alpha'_4 - \alpha'_2 \alpha_4 + \alpha_3 \alpha_4 \varkappa_2 - \alpha_1 \alpha_4 \varkappa_1 + \alpha_2 \alpha_3 \varkappa_3 = 0 \\ &(\mathrm{III}) \quad \alpha_3 \alpha'_4 - \alpha'_3 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_4 \varkappa_2 + (\alpha_3^2 + \alpha_4^2)\varkappa_3 = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Estas ecuaciones, junto con (5), serán, pues, *las condiciones para que la superficie (3), en la que $U$ está dado por (4), sea desarrollable.*

Las tres condiciones (7) no son independientes. En efecto, escribiendo que es igual a cero el determinante obtenido añadiendo a la matriz anterior una nueva fila igual a la segunda, se obtiene la relación:

$$\alpha_4 \, \mathrm{I} - \alpha_3 \, \mathrm{II} + \alpha_2 \, \mathrm{III} = 0. \tag{8}$$

Prescindiendo del caso $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, $\alpha_1 = 1$ que corresponde a la tangente, por la cual pasa la superficie formada por las tangentes a la curva o superficie tangencial que desde luego es desarrollable, en el entorno de otra generatriz cualquiera, la relación (8) reduce a dos las ecuaciones (7).

Supongamos, por ejemplo, $\alpha_2 \neq 0$. La tercera ecuación (7) será una consecuencia de las dos primeras. Dando arbitrariamente el cociente $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = a(s)$, el sistema de las dos primeras ecuaciones (7) permite encontrar $\frac{\alpha_3}{\alpha_2}$ y $\frac{\alpha_4}{\alpha_2}$ una vez fijados los valores iniciales de estos cocientes. Sea $\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = b(s)$, $\frac{\alpha_4}{\alpha_2} = c(s)$. Los coeficientes $\alpha_i$ que determinan la superficie desarrollable estarán dados por

$$\frac{\alpha_1}{a} = \alpha_2 = \frac{\alpha_3}{b} = \frac{\alpha_4}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2 + c^2}}.$$

En resumen: *Los cosenos directores* $\alpha_i$ *que determinan las generatrices de una superficie desarrollable que pasa por la línea (1) están dados por el sistema (7); para determinar una de estas superficies desarrollables en el entorno de una determinada generatriz, se puede dar arbitrariamente uno de los cocientes* $\frac{\alpha_1}{\alpha_i}$ $(\alpha_i \neq 0,\ i = 2, 3, 4)$ *y la posición de dicha generatriz inicial.*

## § 3. *Casos particulares.*

1. *Desarrollables cuyas generatrices están contenidas en el* $E_3$ *osculador.* Supongamos que se quieran hallar las superficies desarrollables para las cuales es constantemente $\alpha_4 = 0$,

o sea, cuya generatriz está siempre en el correspondiente $E_3$ osculador a la curva (4).

Las dos últimas ecuaciones de (7) dan respectivamente

$$\alpha_2 \alpha_3 \varkappa_3 = 0, \qquad \alpha_3^2 \varkappa_3 = 0.$$

Si la línea (1) no está contenida en un $E_3$, es $\varkappa_3 \neq 0$ y estas condiciones exigen que $\alpha_3 = 0$. Con esta condición, la primera ecuación de (7) da $\alpha_2 = 0$, luego:

*Si la línea no está contenida en un $E_3$, la única superficie desarrollable que pasa por ella y cuyas generatrices están constantemente en el correspondiente $E_3$ osculador, es la superficie tangencial.*

Si la línea está contenida en un $E_3$ ($\varkappa_3 = 0$) hay infinitas soluciones, formadas por las infinitas superficies desarrollables que, como es sabido, pasan por una línea de $E_3$ (5).

2. *Desarrollables con* $\alpha_3 = 0$. Para hallar las superficies desarrollables cuyas generatrices están siempre contenidas en el $E_3$ determinado por $T$, $N$, $D$, bastará hacer en (7) $\alpha_3 = 0$.

a) *Caso* $\varkappa_3 \neq 0$. La curva no está contenida en un $E_3$. Las ecuaciones (I) y (III) de (7) dan

$$\alpha_2 (\alpha_2 \varkappa_2 - \alpha_1 \varkappa_3) = 0, \quad \alpha_1 (\alpha_2 \varkappa_2 - \alpha_1 \varkappa_3) = 0. \tag{9}$$

Si $\alpha_2 = 0$, la segunda de estas ecuaciones da $\alpha_1 = 0$ y por tanto se obtiene la superficie tangencial. Lo mismo si $\alpha_1 = 0$.

---

(4) Se llama $E_3$ osculador a una curva al $E_3$ determinado por los vectores $T$, $N$, $B$.

(5) Para hallar las superficies desarrollables de un $E_3$ que pasan por una línea del mismo, el problema se plantea de la misma manera que lo estamos haciendo en $E_4$. Si $T$, $N$, $B$ son los vectores tangente, normal principal y binormal de la línea en $E_3$ y el vector unitario $U(s)$ que define la superficie reglada (3) se escribe $U(s) = \alpha_1 T + \alpha_2 N + \alpha_3 B$, la condición de desarrollabilidad es

$$\alpha_2 \alpha'_3 - \alpha_3 \alpha'_2 + (\alpha_2^2 + \alpha_3^2) \varkappa_2 - \alpha_1 \alpha_3 \varkappa_1 = 0 \tag{*}$$

como se obtiene directamente, o bien haciendo $\alpha_1 = 0$, $\varkappa_3 = 0$ en las ecuaciones (7). En este caso $\varkappa_1$ es la curvatura ordinaria y $\varkappa_2$ la segunda curvatura o torsión.

A partir de (*) se pueden obtener fácilmente todas las conocidas superficies desarrollables que pasan por una línea alabeada del espacio orlinario: evolutas, superficie rectificante, así como sus principales y clásicas propiedades.

Si $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_4 \neq 0$, se tiene, de (9),

$$\frac{\alpha_4}{\alpha_2} = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_3}. \tag{10}$$

La ecuación (7) (II) se puede escribir en este caso

$$\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_4}\right)' + \frac{\alpha_1}{\alpha_4}\varkappa_1 = 0,$$

o sea, según (10)

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_4} = -\frac{1}{\varkappa_1}\left(\frac{\varkappa_3}{\varkappa_2}\right)'. \tag{11}$$

Los cosenos directores $\alpha_i$ estarán dados, por tanto, por

$$\alpha_3 = 0, \quad \frac{\alpha_1}{-\frac{1}{\varkappa_1}\left(\frac{\varkappa_3}{\varkappa_2}\right)'} = \frac{\alpha_2}{\frac{\varkappa_3}{\varkappa_2}} = \frac{\alpha_4}{1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\varkappa_3}{\varkappa_2}\right)^2 + \frac{1}{\varkappa_1^2}\left(\frac{\varkappa_3}{\varkappa_2}\right)'^2}} \tag{12}$$

donde los acentos indican derivadas respecto al arco $s$.

Luego: *Excepto la desarrollable tangencial, hay una sola superficie desarrollable que contiene a la línea (1) y cuyas generatrices están constantemente en el $E_3$ determinado por los vectores $T$, $N$, $D$. Los cosenos directores de esta desarrollable única están dados por (12).*

b) *Caso* $\varkappa_3 = 0$. La curva está contenida en un $E_3$. La ecuación (7) (I) nos da $\alpha_2 = 0$, con lo cual la (7) (II) se reduce a $\alpha_1 \alpha_4 \varkappa_1 = 0$. Para satisfacer a esta última ecuación debe ser, o bien $\alpha_4 = 0$ (superficie tangencial), o bien $\alpha_1 = 0$, en cuyo caso queda $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 1$, que corresponde a la solución evidente del cilindro formado por las rectas normales al $E_3$ que contiene la línea, a lo largo de ésta.

3. *Desarrollables con* $\alpha_2 = 0$. Se trata de hallar las superficies desarrollables cuyas generatrices están contenidas en el correspondiente $E_3$ determinado por $T$, $B$, $D$.

a) *Caso* $\varkappa_3 \neq 0$. La curva (1) no está contenida en un $E_3$. Las ecuaciones (I) y (II) de (7) se escriben en este caso

$$\alpha_3(\alpha_1\varkappa_1 - \alpha_3\varkappa_2) = 0, \quad \alpha_4(\alpha_1\varkappa_1 - \alpha_3\varkappa_2) = 0.$$

La solución $\alpha_3 = 0$, llevada a (7) (III) da $\alpha_4 = 0$, que corresponde a la superficie tangencial. Análogamente, $\alpha_4 = 0$ corresponde también a la superficie tangencial.

Para $\alpha_3 \neq 0$, $\alpha_4 \neq 0$, resulta

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_3} = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}.$$

La ecuación (7) (III) se escribe

$$\left(\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\right)' + \left(1 + \left(\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\right)^2\right) \varkappa_3 = 0.$$

Poniendo $\frac{\alpha_4}{\alpha_3} = \cot\varphi$, esta ecuación se transforma en

$$-\frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi}\frac{d\varphi}{ds} + \frac{\varkappa_3}{\operatorname{sen}^2\varphi} = 0, \quad \text{de donde} \quad \varphi = \int \varkappa_3\, ds + c.$$

Se obtiene pues la solución

$$\alpha_2 = 0, \ \frac{\alpha_1}{\varkappa_2} = \frac{\alpha_3}{\varkappa_1} = \frac{\alpha_4}{\varkappa_1 \cot\varphi} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa_2^2 + \varkappa_1^2(1 + \cot^2\varphi)}} \qquad (13).$$

siendo $\varphi = \int \varkappa_3\, ds + c$.

Luego: *Exceptuada la desarrollable tangencial, las superficies desarrollables que pasan por la línea (1) y tienen sus generatrices constantemente en el $E_3$ determinado por los vectores $T$, $B$, $D$ están determinadas por (13). Existe una familia de tales superficies, cada una de las cuales está determinada por el valor de la constante $c$.*

Se observa que, para dos desarrollables distintas, *el ángulo que forman entre sí los planos determinados por $T$, $U$ de cada una de ellas, se conserva constante a lo largo de la línea.*

b) *Caso* $\varkappa_3 = 0$. La línea (1) está en un $E_3$. En este caso valen las mismas fórmulas (13), para las cuales será $\varphi = c$ y a cada valor de esta constante corresponderá una desarrollable distinta.

4. *Desarrollables normales.* Para hallar las superficies desarrollables que contienen a la curva (1) y cuyas generatrices están constantemente en el $E_3$ normal a la misma, deberemos hacer $\alpha_1 = 0$ en las ecuaciones (7). Se obtiene

$$\text{(I)} \quad \alpha_2 \alpha'_3 - \alpha'_2 \alpha_3 + (\alpha_2^2 + \alpha_3^2)\,\varkappa_2 - \alpha_2 \alpha_4 \varkappa_3 = 0$$

$$\text{(II)} \quad \alpha_2 \alpha'_4 - \alpha_4 \alpha'_2 + \alpha_3 \alpha_4 \varkappa_2 + \alpha_2 \alpha_3 \varkappa_3 = 0$$

$$\text{(III)} \quad \alpha_3 \alpha'_4 - \alpha_4 \alpha'_3 - \alpha_2 \alpha_4 \varkappa_2 + (\alpha_3^2 + \alpha_4^2)\,\varkappa_3 = 0.$$

Se verifica además

$$\text{(IV)} \qquad \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = 1, \quad \alpha_2 \alpha'_2 + \alpha_3 \alpha'_3 + \alpha_4 \alpha'_4 = 0.$$

Multiplicando (I) por $\alpha_3$, (II) por $\alpha_4$ y sumando, teniendo en cuenta (IV), se obtiene

$$\alpha'_2 = \alpha_3 \varkappa_2 \tag{14$_1$}$$

con lo cual (II) y (III) dan

$$\alpha'_4 = -\alpha_3 \varkappa_3, \qquad \alpha'_3 = \alpha_4 \varkappa_3 - \alpha_2 \varkappa_2. \tag{14$_2$}$$

Se observa que las ecuaciones (14) son las que definen una rotación de la generatriz cuyos cosenos directores son $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ alrededor del eje instantáneo $\omega\,(\varkappa_3, 0, \varkappa_2)$. Por consiguiente, *dada una generatriz inicial cualquiera, las ecuaciones (14) definen una desarrollable normal única que la contiene.* Además, *dado un sistema de generatrices iniciales, al describir las respectivas superficies desarrollables normales, ellas conservarán invariable su posición relativa* (6).

Este resultado generaliza el teorema clásico de que las desarrollables normales a una curva fija del espacio ordinario se cortan bajo un ángulo constante a lo largo de la misma.

Si la curva está contenida en un $E_3$, es $\varkappa_3 = 0$ y el sistema de las ecuaciones (14) se reduce a:

$$\alpha'_2 = \alpha_3 \varkappa_2, \quad \alpha'_3 = -\alpha_2 \varkappa_2, \quad \alpha_4 = \text{cte.} \tag{15}$$

Poniendo $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_3} = \operatorname{tg} \varphi$, se obtiene, derivando

$$\frac{\alpha'_2 \alpha_3 - \alpha'_3 \alpha_2}{\alpha_3^2} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{ds}$$

o sea, según (15) y siendo $\cos^2 \varphi = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \dfrac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}$,

(6) Este resultado es conocido. Ver C. Guichard [5] p. 22.

queda $d\varphi = \varkappa_2 ds$ y por tanto

$$\varphi = \int \varkappa_2 ds + c. \qquad (16)$$

Esta expresión, junto con el hecho de ser $\alpha_4 = \text{cons.}$, nos dice que *para las curvas de $E_4$ contenidas en un $E_3$, las generatrices de toda desarrollable normal forman un ángulo constante con la trinormal $D$ y que el ángulo que forma el plano determinado por ellas y por $D$ con el plano determinado por $D$ y $B$ está dado por (16).*

5. *Desarrollables cuyas generatrices tienen posición invariable respecto el tetraedroide fundamental.* Queremos ver las condiciones para que existan superficies desarrollables para las cuales los cosenos directores $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ de (4) sean constantes. Para ello deberemos hacer, en el sistema (7), $\alpha'_1 = \alpha'_2 = \alpha'_3 = \alpha'_4 = 0$ y queda

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) \quad (\alpha_2^2 + \alpha_3^2)\varkappa_2 - \alpha_1\alpha_3\varkappa_1 - \alpha_2\alpha_4\varkappa_3 = 0\\
&(\mathrm{II}) \quad \alpha_3\alpha_4\varkappa_2 - \alpha_1\alpha_1\varkappa_1 + \alpha_2\alpha_3\varkappa_3 = 0 \qquad (17)\\
&(\mathrm{III}) \quad -\alpha_2\alpha_4\varkappa_2 + (\alpha_3^2 + \alpha_4^2)\varkappa_3 = 0.
\end{aligned}$$

Supongamos que $\varkappa_3$ no es constantemente cero. Para $\alpha_1 = 0$ o bien $\alpha_2 = 0$, se observa que este sistema exige que sea, además, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_1 = 1$; esta solución corresponde a la superficie tangencial, que evidentemente es desarrollable para toda curva. Para $\alpha_3 = 0$ o bien $\alpha_1 = 0$ (con $\alpha_2, \alpha_4 \neq 0$) el sistema anterior se reduce a la ecuación única $\alpha_2\varkappa_2 - \alpha_4\varkappa_3 = 0$, o sea, la superficie desarrollable correspondiente será

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad \frac{\varkappa_2}{\varkappa_3} = \frac{\alpha_4}{\alpha_2} \qquad (18)$$

y por tanto, si $\alpha_2$ y $\alpha_4$ son constantes, debe ser $\frac{\varkappa_2}{\varkappa_3} = \text{Cte}$.

Supongamos ahora que todas las $\alpha_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ sean distintas de cero. De la ecuación (III) se deduce que si las $\alpha_i$ son constantes, también lo será el cociente $\frac{\varkappa_2}{\varkappa_3}$ y entonces (I) no dice que $\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$ también es constante.

Recíprocamente, si $\frac{x_1}{x_2}$ y $\frac{x_2}{x_3}$ son constantes a lo largo de la línea, las ecuaciones anteriores nos determinarán las generatrices que describen desarrollables y conservan su posición invariable respecto el tetraedroide fundamental.

Como las ecuaciones (17) no son independientes, pues ya vimos que entre ellas existe la relación (8), el sistema (17) representará un cono. Para estudiarlo observemos que, como suponemos $x_3 \neq 0$, $\alpha_4 \neq 0$ podemos cortar por el hiperplano $\alpha_4 = 1$ y se obtiene una línea sección cuyas ecuaciones, en el sistema de ejes rectangulares cuyas coordenadas son $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, son

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{x_3^2}{x_1 x_2} \alpha_3^3 + \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_1 x_2} \alpha_3 \\
\alpha_2 &= \frac{x_3}{x_2} \alpha_3^2 + \frac{x_3}{x_2}.
\end{aligned}
\qquad (19)
$$

Estas ecuaciones representan una *cúbica racional normal*. Por tanto, si $x_3 \neq 0$, el cono formado en cada punto de una curva por las rectas que describen desarrollables conservando su posición invariable respecto el tetraedroide fundamental, es un cono de tercer orden.

Este cono sólo puede degenerar en el caso de ser $x_3 = 0$, es decir, en el caso de estar la curva contenida en un hiperplano. En este caso el cono anterior se descompone en un cono cuadrático de revolución contenido en el hiperplano $T$, $N$, $B$ que contiene la curva y cuya ecuación en el mismo hiperplano es

$$(\alpha_2^2 + \alpha_3^2)\, x_2 - \alpha_1 \alpha_3 x_1 = 0, \qquad (20)$$

más el plano determinado por las ecuaciones

$$\alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 x_2 - \alpha_1 x_1 = 0.$$

En resumen: *Prescindiendo de la superficie tangencial, la primera condición que debe cumplirse para que exista una superficie desarrollable cuyas generatrices tengan posición invariable respecto el tetraedroide fundamental, es que* $\frac{x_2}{x_3} = \text{Cte}$.

*En este caso, cualquiera que sea* $\varkappa_1$, *existe la superficie única definida por (18). Para que existan otras superficies, debe cumplirse además la condición* $\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} = Cte.$ *Entonces, cada punto de la curva es vértice de un cono de 3er. orden cuyas generatrices, invariablemente unidas al tetraedroide fundamental, describen superficies desarrollables. Este cono sólo puede degenerar en el caso de ser* $\varkappa_3 = 0$ *y entonces se descompone en un cono cuadrático de revolución (representado por (20)) más un plano.*

6. *Superficies desarrollables cuyas generatrices están constantemente en alguna de las caras del tetraedroide fundamental.* Considerando en conjunto los resultados anteriores, se llega a las conclusiones:

a) Si $\varkappa_3 \neq 0$, de las superficies regladas descritas por cada uno de los vectores $T$, $N$, $B$, $D$ que forman el tetraedroide fundamental, sólo es desarrollable la superficie tangencial. Si $\varkappa_3 = 0$, es también desarrollable la engendrada por los vectores $D$.

b) Excepto la superficie tangencial, no hay tampoco en general ninguna desarrollable *cuyas generatrices estén constantemente en una de las caras del tetraedroide fundamental.* Para que esto sea posible es necesario y suficiente que $\frac{\varkappa_3}{\varkappa_2}$ sea constante; entonces, por el nº. 2 (fórmulas (12)) se nota la existencia de *la única superficie con las condiciones dichas,* que está definida por

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad \frac{\alpha_2}{\varkappa_3} = \frac{\alpha_4}{\varkappa_2} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa_3^2 + \varkappa_2^2}}.$$

## § 4. *Conos y cilindros.*

Las ecuaciones (7) que expresan la condición para que la superficie reglada (3) sea desarrollable se pueden escribir

$$\frac{\alpha_1 \varkappa_1 + \alpha'_2 - \alpha_3 \varkappa_2}{\alpha_2} = \frac{\alpha_2 \varkappa_2 + \alpha'_3 - \alpha_4 \varkappa_3}{\alpha_3} = \frac{\alpha_3 \varkappa_3 + \alpha'_4}{\alpha_4} = \beta. \quad (21)$$

Con esto se comprueba que, efectivamente, los vectores

$T$; $U$, $U'$ están en un plano, que es la condición para que la superficie sea desarrollable. En efecto, según (6) y (21) se tiene

$$U' = (\alpha'_1 - \alpha_2 \varkappa_1 - \beta \alpha_1)\, T + \beta\, U. \tag{22}$$

La condición para que la superficie

$$Y(s, \lambda) = X(s) + \lambda\, U(s) \tag{23}$$

sea un *cono*, se encontrará escribiendo que para una cierta función $\lambda = \lambda(s)$, el vector $Y(s, \lambda)$ termina en un punto fijo, o sea, la derivada respecto $s$ es cero. Se tiene, según (22) y (23)

$$\frac{dY}{ds} = T + \lambda U' + \lambda' U = (1 + \lambda(\alpha'_1 - \alpha_2 \varkappa_1 - \beta \alpha_1))\, T + \\ + (\lambda' + \lambda \beta)\, U. \tag{24}$$

Como se trata de una expresión vectorial, para que sea cero deben ser cero los dos coeficientes de los vectores $T$ y $U$, o sea

$$1 + \lambda(\alpha'_1 - \alpha_2 \varkappa_1 - \beta \alpha_1) = 0, \quad \lambda' + \lambda \beta = 0. \tag{25}$$

De estas igualdades se deduce

$$\beta = \frac{(\alpha'_1 - \alpha_2 \varkappa_1 - \beta \alpha_1)'}{(\alpha'_1 - \alpha_2 \varkappa_1 - \beta \alpha_1)}. \tag{26}$$

Teniendo en cuenta el valor de $\beta$ dado por (21), la expresión (26) será *la condición para que la superficie desarrollable (23) sea un cono.*

El vértice del cono se deduce despejando $\lambda$ de (25) y sustituyendo en (23); será el punto

$$Y = X - \frac{1}{\alpha'_1 - \alpha_2 \varkappa_1 - \beta \alpha_1}\, U. \tag{27}$$

De aquí se deduce que la desarrollable será un *cilindro* si se cumple

$$\alpha'_1 - \alpha_2 \varkappa_1 - \beta \alpha_1 = 0. \tag{28}$$

*Observación.* La expresión (27) hemos visto que da el vértice del cono en el caso de que la desarrollable lo sea. En el caso general, la primera de las igualdades (25) nos da la condición para que la tangente a la línea $Y(s, \lambda(s))$ situada sobre la desarrollable tenga la dirección de la generatriz $U$, o sea, la condición para que dicha línea sea la *arista de retroceso* de la desarrollable. Luego: en general, *la ecuación (27) es la de la arista de retroceso de la superficie desarrollable (23), siendo* $U = \alpha_1 T + \alpha_2 N + \alpha_3 B + \alpha_4 D$ *y* $\beta$ *dado por (21).*

## § 5. *Casos particulares.*

Vamos a estudiar ahora las condiciones que debe cumplir la curva $X(s)$ para que las superficies desarrollables particulares estudiadas en § 3 sean *conos* o *cilindros*.

1. *Caso* $\alpha_3 = 0$. En el $E_3$ determinado por los vectores $T$, $N$, $D$ vimos que había una sola superficie desarrollable, dada por (12). Veamos la condición para que sea un cono.

Para $\alpha_3 = 0$, según (21), podemos tomar

$$\beta = \frac{\alpha'_4}{\alpha_4}$$

y entonces (26) toma la forma

$$\left(\alpha'_1 - \alpha_2 \varkappa_1 - \frac{\alpha'_4}{\alpha_4}\alpha_1\right)' = \frac{\alpha'_4}{\alpha_4}\left(\alpha'_1 - \alpha_2 \varkappa_1 - \frac{\alpha'_4}{\alpha_4}\alpha_1\right) \qquad (29)$$

que se puede escribir

$$\left(\alpha_4 \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_4}\right)' - \alpha_2 \varkappa_1\right)' = \frac{\alpha'_4}{\alpha_4}\left(\alpha_4 \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_4}\right)' - \alpha_2 \varkappa_1\right),$$

o sea, por una integración

$$\alpha_4 \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_4}\right)' - \alpha_2 \varkappa_1 = k\, \alpha_4,$$

siendo $k$ una constante. Dividiendo por $\alpha_4$ y sustituyendo los cocientes $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_4}$ por su valor deducido de (12) resulta

$$-\left(\frac{1}{\varkappa_1}\left(\frac{\varkappa_3}{\varkappa_2}\right)'\right)' - \frac{\varkappa_3}{\varkappa_2}\varkappa_1 = k. \tag{30}$$

Recíprocamente, si se cumple esta condición, se cumplirá (29) y la superficie desarrollable (23) será un cono. Si $k = 0$ la superficie será, según (28), un cilindro.

Este resultado se puede enunciar: *La condición necesaria y suficiente para que los $E_3$ determinados por los vectores $T$, $N$, $D$ pasen por un mismo punto, es que entre las curvaturas de la curva $X(s)$ exista la relación (30).* Si en ella es $k = 0$, dichos $E_3$ pasan por un mismo punto del infinito.

2. *Caso* $\alpha_2 = 0$. En este caso ya vimos que existían infinitas superficies desarrollables, dadas para los distintos valores de la constante $c$ en las fórmulas (13). Se trata de establecer las condiciones necesarias y suficientes para que entre estas superficies haya algún *cilindro* o *cono*.

Siendo $\alpha_2 = 0$, las ecuaciones (21) dan $\beta = \dfrac{\alpha'_3 - \alpha_4 \varkappa_3}{\alpha_3}$ (7) y la condición (28) para que la superficie sea un *cilindro* se escribe

$$\alpha'_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_3}(\alpha'_3 - \alpha_4 \varkappa_3) = 0$$

o sea

$$\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\right)' + \frac{\alpha_1}{\alpha_3}\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\varkappa_3 = 0.$$

Teniendo en cuenta (13) esta condición equivale a

$$\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)' + \frac{\varkappa_2 \varkappa_3}{\varkappa_1}\cot\varphi = 0. \tag{31}$$

Observando que, según (13), es $\varkappa_3\, ds = d\varphi$, esta ecuación se integra inmediatamente, dando

$$\log\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} + \log \operatorname{sen}\varphi = \mathrm{Cte}.$$

(7) Suponemos $\alpha_3 \neq 0$, lo cual ocurre efectivamente, pues según vimos en § 3, nº 3, con las condiciones $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, solamente existe la superficie tangencial como única superficie desarrollable, y ella no puede ser cilindro ni cono.

Por consiguiente, siendo $c$ una constante, la expresión

$$\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} \operatorname{sen}\left(\int \varkappa_3 \, ds + c\right) = \mathrm{Cte.} \qquad (32)$$

nos da *la relación que debe existir entre las curvaturas de una curva de $E_4$ para que por ella pase un cilindro cuyas generatrices estén constantemente en el $E_3$ determinado por $T$, $B$, $D$.*

La condición para que alguna de las superficies dadas por (13) sea un *cono*, según el valor de $\beta$ antes encontrado y según (26) será

$$\left(\alpha'_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_3}(\alpha'_3 - \alpha_4 \varkappa_3)\right)' = \left(\alpha'_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_3}(\alpha'_3 - \alpha_4 \varkappa_3)\right)\frac{\alpha'_3 - \alpha_4 \varkappa_3}{\alpha_3},$$

que puede escribirse

$$\left(\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\right)' + \frac{\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_3^2} \varkappa_3\right)' + \left(\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\right)' + \frac{\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_3^2} \varkappa_3\right) \frac{\alpha_4}{\alpha_3} \varkappa_3 = 0.$$

Teniendo en cuenta (13) esta relación se escribe

$$\left(\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)' + \frac{\varkappa_2 \varkappa_3}{\varkappa_1} \cot \varphi\right)' + \left(\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)' + \frac{\varkappa_2 \varkappa_3}{\varkappa_1} \cot \varphi\right) \varkappa_3 \cot \varphi = 0.$$

Recordando, como antes, que $\varkappa_3 \, ds = d\varphi$, esta ecuación se integra como en el caso precedente y se obtiene

$$\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)' \operatorname{sen} \varphi + \frac{\varkappa_2 \varkappa_3}{\varkappa_1} \cos \varphi = \mathrm{Cte.} \quad \left(\varphi = \int \varkappa_3 \, ds + c\right). \qquad (33)$$

Esta será *la ecuación intrínseca de las curvas de $E_4$ por las cuales pasa algún cono cuyas generatrices están constantemente en el $E_3$ determinado por $T$, $B$, $D$, es decir, de las curvas para las cuales dichos $E_3$ pasan todos por un punto fijo del espacio.*

*3. Caso $\alpha_1 = 0$.* De las ecuaciones (14) y (21) se deduce $\beta = 0$. Luego, para que una superficie desarrollable normal sea un cono, debe ser, según (26),

$$(\alpha_2 \varkappa_1)' = 0. \qquad (34)$$

Esto nos dice que $\alpha_2 \varkappa_1$ es igual a una constante. Según (27) el vértice del cono será

$$Y = X + \frac{1}{\alpha_2 \kappa_1} U \tag{35}$$

y por tanto el vector $Y - X$ tiene módulo constante, es decir, los puntos de la curva equidistan del vértice del cono, que es un punto fijo. Por consiguiente: *si alguna de las superficies desarrollables normales a la curva es un cono, la curva está contenida en una hiperesfera.*

El radio de esta hiperesfera, según (35), vale $R = \frac{1}{\alpha_2 \kappa_1}$. De aquí y de las ecuaciones (14) se deduce

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{1}{R \kappa_1}, \quad \alpha_3 = \frac{\alpha'_2}{\kappa_2} = -\frac{\kappa'_1}{R \kappa_1^2 \kappa_2} \\ \alpha_4 &= \frac{1}{\kappa_3}(\alpha'_3 + \alpha_2 \kappa_2) = \frac{1}{R \kappa_3}\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} - \left(\frac{\kappa'_1}{\kappa_1^2 \kappa_2}\right)'\right) \end{aligned} \tag{36}$$

y como la suma de los cuadrados de los tres cosenos vale la unidad, se tiene

$$R^2 = \frac{1}{\kappa_1^2} + \frac{\kappa'^2_1}{\kappa_1^4 \kappa_2^2} + \frac{1}{\kappa_3^2}\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} - \left(\frac{\kappa'_1}{\kappa_1^2 \kappa_2}\right)'\right)^2. \tag{37}$$

Si en lugar de las curvaturas se ponen de manifiesto los radios de curvatura, esta expresión se escribe de manera más simple

$$R^2 = \rho_1^2 + (\rho_2 \rho'_1)^2 + \left(\rho_3 \frac{\rho_1}{\rho_2} + \rho_3 (\rho_2 \rho'_1)'\right)^2. \tag{38}$$

Como $R$ es constante, escribiendo que la derivada del segundo miembro de (37) o (38) es igual a cero, se obtendrá *la condición necesaria y suficiente que deben cumplir las curvaturas o los radios de curvatura de una curva de $E_4$ para que esté contenida en una hiperesfera.* Las expresiones (37) o (38) dan, entonces, los valores del radio de la hiperesfera.

4. *Cilindros y conos cuyas generatrices están invariablemente unidas al tetraedro fundamental.* Entre las superficies desarrollables estudiadas en § 3, nº. 5 queremos ahora ver si hay conos o cilindros.

Supongamos, pues, que $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ son constantes y que, por tanto, también lo son los cocientes (deducidos de (17)),

$$\frac{\varkappa_2}{\varkappa_3} = \frac{\alpha_3^2 + \alpha_4^2}{\alpha_2 \alpha_4} = a, \quad \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} = \frac{\alpha_3 \alpha_2^2 + \alpha_3 (\alpha_3^2 + \alpha_4^2)}{\alpha_1 (\alpha_3^2 + \alpha_4^2)} = b. \quad (39)$$

Por (21) es $\beta = \frac{\alpha_3}{\alpha_4} \varkappa_3$ y según (28) la condición para que la superficie desarrollable sea un cilindro es que

$$\alpha_2 \varkappa_1 + \beta \alpha_1 = \alpha_2 \varkappa_1 + \frac{\alpha_3}{\alpha_4} \alpha_1 \varkappa_3 = 0,$$

o sea, suponiendo $\varkappa_3 \neq 0$,

$$\alpha_2 \alpha_4 \frac{\varkappa_1}{\varkappa_3} + \alpha_3 \alpha_1 = 0,$$

y sustituyendo el valor de $\frac{\varkappa_1}{\varkappa_3}$ deducido de (39)

$$\alpha_3 \alpha_2^2 + \alpha_3 (\alpha_3^2 + \alpha_4^2) + \alpha_3 \alpha_1^2 = \alpha_3 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2) = 0.$$

Esta igualdad sólo puede realizarse si $\alpha_3 = 0$. En este caso resultaría $\beta = 0$ y por tanto la condición anterior de ser la superficie un cilindro se reduce a $\alpha_2 \varkappa_1 = 0$, de donde, $\alpha_2 = 0$; con esto, la ecuación (III) de (17) exige a su vez que $\alpha_4 = 0$ (se supone $\varkappa_3 \neq 0$). De aquí, puesto que la superficie tangencial nunca puede ser un cilindro, se deduce: *Por las curvas con $\varkappa_3 \neq 0$ no pasa ningún cilindro cuyas generatrices tengan posición invariable respecto el tetraedroide fundamental vinculado a la curva.*

Veamos las condiciones para que pasen *conos.*

Tomando, por (21), $\beta = \frac{\alpha_3}{\alpha_4} \varkappa_3$, según (26), la condición para que la superficie desarrollable sea un cono es

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_4} \varkappa_3 = \frac{\left(\alpha_2 \varkappa_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_4} \alpha_3 \varkappa_3\right)'}{\left(\alpha_2 \varkappa_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_4} \alpha_3 \varkappa_3\right)}.$$

Según las igualdades (39) esta condición equivale a

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_4}\varkappa_3 = \frac{[\varkappa_3(\alpha_2 a b + \frac{\alpha_1}{\alpha_4}\alpha_3)]'}{\varkappa_3(\alpha_2 a b + \frac{\alpha_1}{\alpha_4}\alpha_3)} = \frac{\varkappa'_3}{\varkappa_3}, \qquad (40)$$

y de aquí (recordando que las $\alpha_i$ son constantes por hipótesis), resulta,

$$\frac{1}{\varkappa_3} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_4}s + c$$

siendo $s$ el arco de la curva y $c$ una constante.

De (39) se deduce ahora

$$\varkappa_1 = \frac{a b}{c - \frac{\alpha_3}{\alpha_4}s}, \quad \varkappa_2 = \frac{a}{c - \frac{\alpha_3}{\alpha_4}s}, \quad \varkappa_3 = \frac{1}{c - \frac{\alpha_3}{\alpha_4}s}. \qquad (41)$$

Recíprocamente, dada una curva alabeada de $E_4$, cuyas ecuaciones intrínsecas sean de la forma

$$\varkappa_1 = \frac{c_1}{c + A s}, \quad \varkappa_2 = \frac{c_2}{c + A s}, \quad \varkappa_3 = \frac{c_3}{c + A s}, \qquad (42)$$

siendo $A$, $c$, $c_i$ constantes, vamos a demostrar que *esta curva está sobre un cono cuyas generatrices tienen posición invariable respecto el tetraedroide fundamental vinculado a la curva*. En efecto, comparando (41) con (42) se deduce que debe ser

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_4} = -A;$$

además, según (39) y (42) es

$$\frac{\alpha_3^2 + \alpha_4^2}{\alpha_2 \alpha_4} = \frac{c_2}{c_3} = a, \quad \frac{\alpha_3(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2)}{\alpha_1(\alpha_3^2 + \alpha_4^2)} = \frac{c_1}{c_2} = b. \qquad (43)$$

De estas igualdades se deduce que existe un cono *único* con las condiciones dichas, cuyas generatrices están dadas por

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_4} = -A, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_4} = \frac{1 + A^2}{a}, \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_4} = -\frac{A\left(1 + \frac{1 + A^2}{a^2}\right)}{b} \qquad (44)$$

siendo $a, b$ los valores dados por (43).

En resumen: *La condición necesaria y suficiente para que exista algún cono que pase por una línea alabeada de $E_4$, con $\varkappa_3 \neq 0$, cuyas generatrices tengan en cada punto posición invariable respecto el tetraedroide fundamental, es que las ecuaciones intrínsecas de la curva sean de la forma (42). En este caso el cono es único y sus generatrices están dadas por (44).*

## II. Variedades tridimensionales desarrollables en $E_4$ que pasan pon una línea.

Consideremos una línea fija en $E_4$ y por cada uno de sus puntos un $E_2$ (o sea, un plano); estos $E_2$, suponiendo que su posición varíe de una manera continua a lo largo de la curva dada, engendran una variedad de tres dimensiones. Consideremos un $E_3$ tangente a la variedad: cuando este $E_3$ es el mismo para todos los puntos de un mismo plano generador, la variedad se dirá *desarrollable*. Esta definición equivale a decir que dos planos generadores infinitamente próximos están en un mismo $E_3$ y por tanto se cortan según una recta.

Vamos a estudiar las diversas variedades desarrollables de este tipo que pasan por una línea dada de $E_4$.

### § 1. *Condiciones generales.*

Sea $X = X(s)$ la ecuación vectorial de la curva dada. En cada uno de sus puntos consideremos dos vectores $U_1$, $U_2$ de módulo uno y perpendiculares entre sí, o sea, con la condición

$$U_1 \cdot U_2 = 0. \qquad (1)$$

Siendo $U_1$ y $U_2$ funciones de $s$, la variedad tridimensional engendrada por los planos que ellos determinan será

$$Y(s, \lambda_1, \lambda_2) = X(s) + \lambda_1 U_1(s) + \lambda_2 U_2(s): \qquad (2)$$

Esta variedad será desarrollable cuando para todos los puntos del plano $s = \text{cte.}$ el $E_3$ tangente sea el mismo. El $E_3$ tangente a (2) en el punto $s, \lambda_1, \lambda_2$ es el determinado por los vectores

$$Y_s = X' + \lambda_1 U'_1 + \lambda_2 U'_2, \quad Y_{\lambda_1} = U_1, \quad Y_{\lambda_2} = U_2. \tag{3}$$

Para que este $E_3$ sea independiente de $\lambda_1, \lambda_2$ es *necesario y suficiente que los cinco vectores* $X' = T, U_1, U_2, U'_1, U'_2$ *estén en un mismo* $E_3$, o sea, *que la característica de la matriz formada por las componentes de los vectores anteriores sea* $\leqq 3$.

Esta condición necesaria y suficiente para la desarrollabilidad de (2) se puede expresar más cómodamente considerando dos casos.

*1er. caso: Los vectores* $T, U_1, U_2$ *están en un plano.* En este caso se puede elegir $U_1 = T$ y la condición única para que (2) sea desarrollable es

$$(T, U_2, U'_1, U'_2) = 0, \tag{4}$$

indicando con $(T, U_2, U'_1, U'_2)$ el determinante formado por las componentes, respecto el tetraedroide fundamental vinculado a la curva en cada punto, de los vectores que figuran en esta expresión.

*2o. caso: Los vectores* $T, U_1, U_2$ *no están en un plano.* Para expresar que los cinco vectores $T, U_1, U_2, U'_1, U'_2$ están en el $E_3$ determinado por los 3 primeros, bastará escribir que $T, U_1, U_2, U'_1$ pertenecen a un mismo $E_3$, o sea

$$(T, U_1, U_2, U'_1) = 0 \tag{5}$$

y que además $T, U_1, U_2, U'_2$ también están en el mismo $E_3$, o sea,

$$(T, U_1, U_2, U'_2) = 0 \tag{6}$$

Luego: *La condición (4) o las condiciones (5) y (6) según el caso, son las condiciones necesarias y suficientes para que la variedad (2) sea desarrollable.*

### § 2. *Casos particulares.*

*1. Variedades engendradas por las caras del tetraedroide fundamental.* Consideremos todos los casos posibles siguientes:

a) $U_1 = T$, $U_2 = N$. Según las fórmulas de Frenet de la Parte I (2), la condición (4) se escribe

$$(T, N, \varkappa_1 N, -\varkappa_1 T + \varkappa_2 B) = 0$$

la cual es satisfecha idénticamente y por tanto nos dice que la variedad descrita es *desarrollable.*

b) $U_1 = T, U_2 = B$. Es

$$(T, B, \varkappa_1 N, -\varkappa_2 N + \varkappa_3 D) = \varkappa_1 \varkappa_3 (T, B, N, D) = -\varkappa_1 \varkappa_3$$

y por tanto la variedad sólo será desarrollable en el caso de ser $\varkappa_3 = 0$.

c) $U_1 = T, U_2 = D$. Es

$$(T, D, \varkappa_1 N, -\varkappa_3 B) = -\varkappa_1 \varkappa_3 (T, D, N, B) = -\varkappa_1 \varkappa_3$$

o sea, la variedad no es desarrollable, excepto si $\varkappa_3 = 0$.

d) $U_1 = N$, $U_2 = B$. Las condiciones (5) y (6) devienen respectivamente

$$(T, N, B, -\varkappa_1 T + \varkappa_2 B) = 0$$
$$(T, N, B, -\varkappa_2 N + \varkappa_3 D) = \varkappa_3 (T, N, B, D) = \varkappa_3 = 0$$

y por tanto la variedad únicamente será desarrollable en el caso de ser $\varkappa_3 = 0$.

e) $U_1 = N$, $U_2 = D$. Se tiene

$$(T, N, D, -\varkappa_1 T + \varkappa_2 B) = \varkappa_2 (T, N, D, B) = -\varkappa_2$$
$$(T, N, D, -\varkappa_3 B) = -\varkappa_3 (T, N, D, B) = \varkappa_3,$$

luego según (5) y (6) la variedad no es desarrollable.

f) $U_1 = B$, $U_2 = D$. Se tiene

$$(T, B, D, -\varkappa_2 N + \varkappa_3 D) = -\varkappa_2 (T, B, D, N) = -\varkappa_2$$
$$(T, B, D, -\varkappa_3 B) = 0$$

y por tanto, supuesto $\varkappa_2 \neq 0$, tampoco se cumplen las condiciones (5) y (6).

En resumen: *Suponiendo una línea de $E_4$ no contenida en ningún $E_3$ (o sea, con $\varkappa_3 \neq 0$); de las variedades engendradas por las caras del tetraedroide fundamental vinculado a la curva, solamente es desarrollable la descrita por el plano osculador.*

Si la línea está contenida en un $E_3$ evidentemente todos los planos contenidos en él engendrarán el mismo $E_3$, el cual, desde luego, es desarrollable, como ha resultado también de los cálculos anteriores.

2. *Caso en que el plano generador pasa por $T$.* Consideremos ahora las variedades engendradas por planos que contienen en cada punto la tangente a la curva. Es decir, supongamos $U_1 = T$ y $U_2$ un vector unitario cualquiera contenido en el $E_3$ determinado por los vectores $N$, $B$, $D$.

En este caso, poniendo

$$U_2 = \alpha_2 N + \alpha_3 B + \alpha_4 D \qquad (7)$$

y aplicando las fórmulas de Frenet ((2), I), se obtiene

$$U'_2 = -\alpha_2 \varkappa_1 T + (\alpha'_2 - \alpha_3 \varkappa_2) N + \\ + (\alpha_2 \varkappa_2 + \alpha'_3 - \alpha_4 \varkappa_3) B + (\alpha_3 \varkappa_3 + \alpha'_4) D.$$

Con esto, el primer miembro de (4) queda

$$(T, U_2, \varkappa_1 N, U'_2) = (T, \alpha_3 B, \varkappa_1 N, (\alpha_3 \varkappa_3 + \alpha'_4) D) + \\ + (T, \alpha_4 D, \varkappa_1 N, (\alpha_2 \varkappa_2 + \alpha'_3 - \alpha_4 \varkappa_3) B) \\ = \varkappa_1 [\alpha_4 \alpha'_3 - \alpha_3 \alpha'_4 + \alpha_2 \alpha_4 \varkappa_2 - (\alpha_3^2 + \alpha_4^2) \varkappa_3].$$

y por tanto, la condición para que la variedad considerada sea desarrollable es

$$\alpha_4 \alpha'_3 - \alpha_3 \alpha'_4 + \alpha_2 \alpha_4 \varkappa_2 - (\alpha_3^2 + \alpha_4^2) \varkappa_3 = 0. \qquad (8)$$

Esta ecuación (8) se satisface siempre que la superficie descrita por el vector $U_2$ sea desarrollable. La cuestión es evidente desde el punto de vista geométrico puesto que entonces la variedad tridimensional es desarrollable por estar formada por los planos tangentes a una superficie desarrollable. También analíticamente se puede comprobar observando que la ecuación (8) se satisface para los valores de $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ dados por las ecuaciones (14) de la parte I. El recíproco, sin embargo, no es cierto: la variedad tridimensional puede ser desarrollable sin que lo sea la superficie descrita por $U_2$. En efecto, basta considerar el caso de la variedad engendrada por los planos osculadores (determinados por $T, N$) la cual es desarrollable, sin que lo sea la superficie engendrada por las normales $N$.

Recordando la nota (5) de § 3, I, la ecuación (8) se puede interpretar diciendo que los valores de $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ soluciones de (8) son cosenos directores de generatrices de superficies desarrollables del espacio ordinario $E_3$ que pasan por una línea del mismo cuyas ecuaciones intrínsecas sean $\varkappa_2 = \varkappa_2(s)$, $\varkappa_3 = \varkappa_3(s)$, siendo $\varkappa_2$ la curvatura ordinaria y $\varkappa_3$ la torsión.

Por tanto, recordando las propiedades de las superficies desarrollables que pasan por una línea en el espacio $E_3$ (que pueden obtenerse inmediatamente de la ecuación (*) de la nota (5)) se obtiene:

*Para que la variedad descrita por el plano determinado por $T$ y el vector $U_2$ dado por (7) sea desarrollable, es necesario y suficiente que se cumpla (8). En particular:*

a) *Para* $\alpha_2 = 0$ *el ángulo* $\varphi$ *que forma* $U_2$ *con* $D$ *es tal que* $\varphi = \varphi_0 + \int_0^s \varkappa_3 \, ds$.

b) *Para* $\alpha_3 = 0$ *hay la solución* $\alpha_2 = 1$, $\alpha_4 = 0$ *(que corresponde a la variedad engendrada por el plano osculador $T$, $N$) y la* $\dfrac{\alpha_2}{\varkappa_3} = \dfrac{\alpha_4}{\varkappa_2}$.

c) *Para* $\alpha_4 = 0$ *hay la solución única* $\alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 1$ *(que corresponde a la variedad engendrada por el plano osculador $T, N$).*

d) *Con la condición de ser* $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ *constantes, solamente existe solución si la curva dada es tal que* $\dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_3} = cte$. *En este caso, los vectores $U_2$ que junto con $T$ determinan planos que engendran variedades desarrollables forman, en cada punto, un cono cuadrático de revolución definido por*

$$\alpha_2 \alpha_4 \varkappa_2 - (\alpha_3^2 + \alpha_4^2) \varkappa_3 = 0$$

*respecto el triedro $N, B, D$.*

3. *Caso en que el plano generador pasa por N.* Pongamos en este caso

$$U_1 = N, \quad U_2 = \alpha_1 T + \alpha_3 B + \alpha_4 D, \qquad (9)$$

de donde

$$U'_1 = -\varkappa_1 T + \varkappa_2 B$$
$$U'_2 = \alpha'_1 T + (\alpha_1 \varkappa_1 - \alpha_3 \varkappa_2) N + (\alpha'_3 - \alpha_4 \varkappa_3) B + (\alpha_3 \varkappa_3 + \alpha'_4) D.$$

La condición (5) para que la variedad engendrada por el plano determinado por los vectores $U_1$, $U_2$ de (9) sea desarrollable, queda

$$(T, U_1, U_2, U'_1) = (T, N, \alpha_3 B + \alpha_4 D, \varkappa_2 B) =$$
$$= \alpha_4 \varkappa_2 (T, N, D, B) = -\alpha_4 \varkappa_2 = 0,$$

lo cual exige $\alpha_4 = 0$; con esta condición, la (6) nos da

$$(T, U_1, U_2, U'_2) = (T, N, \alpha_3 B, \alpha_3 \varkappa_3 D) =$$
$$= \alpha_3^2 \varkappa_3 (T, N, B, D) = \alpha_3^2 \varkappa_3 = 0.$$

Luego: *Si $\varkappa_3 \neq 0$ la única variedad tridimensional desarrollable engendrada por planos que contienen constantemente el vector normal N es la engendrada por el plano osculador.*

Si $\varkappa_3 = 0$, la única condición es que sea $\alpha_4 = 0$, o sea, que el plano esté constantemente en el $E_3$ que contiene la curva, lo cual es, por otra parte, evidente.

4. *Caso en que el plano generador pasa por B.* Sea

$$U_1 = B, \qquad U_2 = \alpha_1 T + \alpha_2 N + \alpha_4 D, \qquad (10)$$

y de aquí

$$U'_1 = -\varkappa_2 N + \varkappa_3 D$$
$$U'_2 = (\alpha'_1 - \alpha_2 \varkappa_1) T + (\alpha_1 \varkappa_1 + \alpha'_2) N +$$
$$+ (\alpha_2 \varkappa_2 - \alpha_4 \varkappa_3) B + \alpha'_4 D.$$

La condición (5) se escribe

$$(T, U_1, U_2, U'_1) = (T, B, \alpha_2 N + \alpha_4 D, -\varkappa_2 N + \varkappa_3 D) =$$
$$= (T, B, \alpha_2 N, \varkappa_3 D) + (T, B, \alpha_4 D, -\varkappa_2 N) =$$
$$= -(\alpha_2 \varkappa_3 + \alpha_4 \varkappa_2) = 0, \qquad (11)$$

y la (6)

$$\begin{aligned}(T, U_1, U_2, U'_2) &= (T, B, \alpha_2 N + \alpha_4 D, (\alpha_1 \varkappa_1 + \alpha'_2) N + \alpha'_4 D) \\ &= (T, B, \alpha_2 N, \alpha'_4 D) + (T, B, \alpha_4 D, (\alpha_1 \varkappa_1 + \alpha'_2) N) \\ &= -\alpha_2 \alpha'_4 + \alpha_4 (\alpha_1 \varkappa_1 + \alpha'_2) = 0. \end{aligned} \qquad (12)$$

Si $\alpha_2 = 0$, (11) nos dice que también debe ser $\alpha_4 = 0$ y entonces sería $U_2 = T$; este caso no puede tratarse, por tanto, mediante las ecuaciones (5) y (6); debe hacerse por la (4) y entonces ya vimos que el plano $T, B$ engendra una variedad que no es desarrollable.

Si $\alpha_2 \neq 0$, (12) se puede escribir

$$\left(\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\right)' = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{\alpha_4}{\alpha_2} \varkappa_1$$

y como, según (11), es $\frac{\alpha_4}{\alpha_2} = -\frac{\varkappa_3}{\varkappa_2}$ queda

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1 \varkappa_3} \left(\frac{\varkappa_3}{\varkappa_2}\right)'$$

y por lo tanto los cosenos directores $\alpha_i$ que figuran en (10) estarán dados por la condición $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_4^2 = 1$ y además

$$\frac{\alpha_1}{\varkappa_2^2 \left(\frac{\varkappa_3}{\varkappa_2}\right)'} = \frac{\alpha_2}{\varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3} = \frac{\alpha_4}{-\varkappa_1 \varkappa_3^2}. \qquad (13)$$

Si $\frac{\varkappa_3}{\varkappa_2} =$ cte. la solución es

$$\alpha_1 = 0, \quad \frac{\alpha_2}{\varkappa_2} = \frac{\alpha_4}{-\varkappa_3}. \qquad (14)$$

En resumen: *Los únicos planos que, pasando constantemente por la segunda normal B engendran variedades tridimensionales desarrollables, son aquellos que contienen, además, el vector $U_2$ definido por (10) con los valores (13) por los cosenos $\alpha_i$.*

5. *Caso en que el plano generador pasa por D.* En este caso será

$$U_1 = D, \quad U_2 = \alpha_1 T + \alpha_2 N + \alpha_3 B, \qquad (15)$$

de donde

$$U'_1 = - \varkappa_3 B$$
$$U'_2 = (\alpha'_1 - \alpha_2 \varkappa_1) T + (\alpha_1 \varkappa_1 + \alpha'_2 - \alpha_3 \varkappa_2) N + (\alpha_2 \varkappa_2 + \alpha'_3) B + \alpha_3 \varkappa_3 D.$$

La condición (5) se escribe

$$(T, U_1, U_2, U'_1) = (T, D, \alpha_2 N + \alpha_3 B, - \varkappa_3 B) = - \alpha_2 \varkappa_3 = 0,$$

y la (6)

$$(T, U_1, U_2, U'_2) = (T, D, \alpha_2 N + \alpha_3 B, (\alpha_1 \varkappa_1 + \alpha'_2 - \alpha_3 \varkappa_2) N + (\alpha_2 \varkappa_2 + \alpha'_3) B)$$
$$= (T, D, \alpha_2 N, (\alpha_2 \varkappa_2 + \alpha'_3) B) + (T, D, \alpha_3 B, (\alpha_1 \varkappa_1 + \alpha'_2 - \alpha_3 \varkappa_2) N)$$
$$= \alpha_2 (\alpha_2 \varkappa_2 + \alpha'_3) - \alpha_3 (\alpha_1 \varkappa_1 + \alpha'_2 - \alpha_3 \varkappa_2) = 0.$$

Suponiendo $\varkappa_3 \neq 0$, la primera condición da $\alpha_2 = 0$, con lo cual la segunda se reduce a

$$\alpha_3 (\alpha_1 \varkappa_1 - \alpha_3 \varkappa_2) = 0.$$

Si $\alpha_3 = 0$ resultaría $U_2 = T$, solución que hay que excluir, pues este caso debe tratarse tal como se hizo en el n°. 2. Suponiendo $\alpha_3 \neq 0$ queda, pues, la solución

$$\alpha_2 = 0, \quad \alpha_4 = 0, \quad \frac{\alpha_1}{\varkappa_2} = \frac{\alpha_3}{\varkappa_1}. \tag{16}$$

Luego: *Los únicos planos que pasando constantemente por la trinormal $D$ engendran una variedad tridimensional desarrollable son aquellos que contienen, además, el vector $U_2$ definido por (15) con los valores (16) para los cosenos $\alpha_i$.*

## *§ 3. Superficie y línea de estricción de las variedades tridimensionales desarrollables.*

*1.* En el espacio euclidiano tridimensional se llama *línea de estricción* de una superficie desarrollable, aquella línea (que se demuestra existe siempre, o se reduce a un punto) a la cual son tangentes todas las generatrices de la superficie.

En las variedades desarrollables tridimensionales de $E_4$ engendradas por planos, vamos a demostrar que también todos los planos generadores son tangentes a una superficie (que puede degenerar en una recta o en un punto) que se puede llamar *superficie de estricción*. Veremos además que esta superficie es a su vez desarrollable y por tanto que los planos generadores de la variedad tridimensional desarrollable son los planos osculadores a una curva de $E_4$; ésta se llamará *línea de estricción* de la variedad (8).

2. *Superficie y línea de estricción.* Ya vimos en § 1 que es necesario distinguir dos casos, según que el vector tangente $T$ esté contenido o no en el plano determinado por $U_1, U_2$.

I. Si $T$ está contenido en el plano $U_1, U_2$, se puede tomar, sin restricción alguna para la generalidad, $T = U_1$. La variedad desarrollable supongamos que sea

$$Y(s, \lambda_1, \lambda_2) = X + \lambda_1 T + \lambda_2 U_2. \qquad (17)$$

Por la condición $(T, U_2, T', U'_2) = 0$ de desarrollabilidad (4), se deduce que $U'_2$ está contenido en el $E_3$ determinado por $T, U_2, T'$ y por tanto se puede poner (9)

$$U'_2 = \mu T + \nu U_2 + \tau T'. \qquad (18)$$

Queremos hallar $\lambda_1$ y $\lambda_2$ como funciones de $s$ de manera tal que la tangente a la curva $X = Y(s, \lambda_1(s), \lambda_2(s))$ esté contenida en el plano generador $T, U_2$. Para ello, derivando (17) y teniendo en cuenta (18) queda

$$\frac{dY}{ds} = (1 + \lambda'_1 + \lambda_2 \mu) T + (\lambda'_2 + \lambda_2 \nu) U_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 \tau) T', \quad (19)$$

(8) C. SEGRE en [8] pág. 89 en lugar de línea o superficie de estricción utiliza los nombres de *línea* o *superficie* o, en general, *espacio singular*. A los puntos de cada recta generatriz o plano generador que pertenecen al espacio singular los llama *focos* o *puntos singulares*. Ver también A. TERRACINI [11].

(9) En este razonamiento queda exceptuado el caso de que $T$, $U_2$, $T'$ estén en un mismo plano. Entonces, como $T' = \varkappa_1 N$, la variedad desarrollable es la engendrada por los planos osculadores $T, N$; en este caso trivial, la superficie de estricción es la formada por las tangentes a la curva y la línea de estricción la curva misma.

y para que este vector esté en el plano $T, U_2$ debe ser

$$\lambda_1 + \lambda_2 \tau = 0. \qquad (20)$$

Esta ecuación representa una recta en el plano generador $T, U_2$: todos los puntos de la misma, al variar $s$, describirán curvas cuya tangente está en dicho plano $T, U_2$. La recta (20) engendrará, pues, la *superficie de estricción* cuya ecuación será, por tanto, (según (17) y (20))

$$Y = X - \lambda_2 (\tau T - U_2). \qquad (21)$$

Esta superficie es desarrollable; en efecto, basta observar que, según la manera como se ha determinado, para cualquier punto de una misma generatriz el plano tangente es el plano $T, U_2$.

La *línea de estricción* de esta superficie desarrollable se puede hallar determinando $\lambda_2(s)$ de manera que la recta tangente a la curva $Y(s) = X - \lambda_2 (\tau T - U_2)$ coincida con la generatriz, o sea, tenga la dirección del vector $\tau T - U_2$.

Escribiendo, pues, la proporcionalidad entre las componentes homólogas de los vectores $Y'$ (19) y $\tau T - U_2$ se obtiene la condición (20) y además la

$$1 + \lambda'_1 + \lambda_2 \mu + (\lambda'_2 + \lambda_2 \nu) \tau = 0, \qquad (22)$$

o sea, teniendo en cuenta (20)

$$1 - \lambda_2 (\tau' - \mu - \nu \tau) = 0.$$

La ecuación de la *línea de estricción* de la superficie (21) y por tanto de la variedad desarrollable (17) es, por tanto,

$$Y = X - \frac{1}{\tau' - \mu - \nu \tau} (\tau T - U_2), \qquad (23)$$

donde $\tau, \mu, \nu$ están determinados por la condición (18), que se puede escribir siempre si la variedad (17) es desarrollable.

*Ejemplo.* Consideremos por ejemplo, la variedad desarrollable mencionada en § 2, 1, b), o sea,

$$Y = X + \lambda_1 T + \lambda_2 U_2 \quad \text{siendo} \quad U_2 = \varkappa_3 N + \varkappa_2 D.$$

Teniendo en cuenta las fórmulas de Frenet ((2), I) y después de transformaciones inmediatas, se obtiene

$$U'_2 = -\varkappa_1 \varkappa_3 T + \frac{\varkappa'_2}{\varkappa_2} U_2 + \left(\frac{\varkappa_3}{\varkappa_2}\right)' \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} T',$$

de donde $\mu = -\varkappa_1 \varkappa_3$, $\nu = \frac{\varkappa'_2}{\varkappa_2}$, $\tau = \left(\frac{\varkappa_3}{\varkappa_2}\right)' \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}$. Con estos valores, la ecuación (23) nos da la línea de estricción. En particular si se trata de una curva con $\frac{\varkappa_3}{\varkappa_2} =$ cte. resulta que la línea de estricción es

$$Y = X + \frac{1}{\varkappa_1} N + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1 \varkappa_3} D.$$

II. Consideremos ahora el caso en que $T$ no está contenido en el plano $U_1, U_2$. Entonces, según § 1, la condición de desarrollabilidad es que los vectores $U'_1$ y $U'_2$ estén contenidos en el $E_3$ determinado por $T, U_1, U_2$. Por tanto se podrá poner

$$U'_1 = \mu_1 T + \nu_1 U_1 + \tau_1 U_2, \quad U'_2 = \mu_2 T + \nu_2 U_1 + \tau_2 U_2. \quad (24)$$

Con esto, considerando $\lambda_1$ y $\lambda_2$ como funciones de $s$, es (derivando (2)),

$$\frac{dY}{ds} = (1 + \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2) T + (\lambda'_1 + \lambda_1 \nu_1 + \lambda_2 \nu_2) U_1 + \\ + (\lambda'_2 + \lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2) U_2. \quad (25)$$

Por tanto, para que la tangente a la línea $Y = X + \lambda_1(s) U_1 + \lambda_2(s) U_2$ esté en el plano determinado por $U_1$ y $U_2$ debe ser

$$1 + \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 = 0. \quad (26)$$

De aquí se deduce que todas estas líneas están sobre la superficie reglada

$$Y(s, \lambda_1) = X(s) + \lambda_1 U_1(s) - \frac{1}{\mu_2} (1 + \lambda_1 \mu_1) U_2(s). \quad (27)$$

Esta superficie es la engendrada por las rectas definidas por la ecuación (26) situadas en el plano determinado por $U_1, U_2$.

Esta superficie es desarrollable, puesto que, en efecto, a lo largo de cualquier generatriz el plano tangente es siempre el determinado por la generatriz misma y la tangente a la línea anteriormente considerada que pasa por el punto correspondiente. El plano tangente es, pues, el determinado por $U_1, U_2$. Luego, esta superficie (27) será la *superficie de estricción.*

Para hallar la *línea de estricción* de la superficie (27), bastará buscar $\lambda_1(s)$ de manera que la línea resultante $Y(s) = Y(s, \lambda_1(s))$ tenga por plano osculador el plano tangente, que es el determinado por $U_1, U_2$.

Pongamos $Y' = \frac{dY}{ds}$. El plano osculador es el determinado por $Y'$ e $Y''$. Para que este plano sea el $U_1, U_2$, como $Y'$ por la condición (26) ya está contenido en este plano, sólo deberá cumplirse la nueva condición de que también $Y''$ se exprese como combinación lineal de $U_1$ y $U_2$; teniendo en cuenta (24) y (25) y derivando nuevamente (25), para que el resultado se exprese como combinación lineal de $U_1$ y $U_2$ debe ser

$$(\lambda'_1 + \lambda_1 \nu_1 + \lambda_2 \nu_2)\mu_1 + (\lambda'_2 + \lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2)\mu_2 = 0. \qquad (28)$$

Añadiendo la condición (26) queda que, *la línea cuyos planos osculadores son los generadores de la variedad desarrollable (2), está determinada por las funciones $\lambda_1(s)$ y $\lambda_2(s)$ definidas por el sistema*

$$\begin{gathered} 1 + \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 = 0 \\ (\lambda'_1 + \lambda_1 \nu_1 + \lambda_2 \nu_2)\mu_1 + (\lambda'_2 + \lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2)\mu_2 = 0, \end{gathered} \qquad (29)$$

*donde los $\mu_i$, $\nu_i$, $\tau_i$ $(i = 1, 2)$ están dados por* (24).

*Ejemplos.* Vamos a limitarnos al caso en que la curva originaria $X = X(s)$ tiene *las tres curvaturas constantes*. Aplicaremos el sistema (29) para determinar la línea de estricción de las variedades desarrollables estudiadas en § 2, 4 y § 2, 5.

a) *Variedad desarrollable engendrada por los planos determinados por $U_1 = B$ y $U_2 = \varkappa_2 N - \varkappa_3 D$* (estudiada en § 2, 4). Siendo $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ y $\varkappa_3$ constantes, será

$$\begin{aligned} U'_1 &= -\varkappa_2 N + \varkappa_3 D = -U_2 \\ U'_2 &= -\varkappa_1 \varkappa_2 T + (\varkappa_2^2 + \varkappa_3^2) B = -\varkappa_1 \varkappa_2 T + (\varkappa_2^2 + \varkappa_3^2) U_1, \end{aligned}$$

o sea, comparando con (24),

$$\mu_1=\nu_1=0,\quad \tau_1=-1,\quad \mu_2=-\varkappa_1\varkappa_2,\quad \nu_2=\varkappa_2^2+\varkappa_3^2,\quad \tau_2=0.$$

Con estos valores, el sistema (29) da

$$\lambda_1=0,\qquad \lambda_2=\frac{1}{\varkappa_1\varkappa_2}.$$

Es decir: *Para el caso de ser $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ constantes, la variedad tridimensional desarrollable estudiada en § 2, 4, está formada por los planos osculadores a la curva*

$$Y=X+\frac{1}{\varkappa_1}N-\frac{\varkappa_3}{\varkappa_1\varkappa_2}D.$$

Teniendo en cuenta las fórmulas de Frenet ((2) I), se encuentra $Y'=\frac{\varkappa_2^2+\varkappa_3^2}{\varkappa_1\varkappa_2}B$. Esto nos dice que las tangentes a esta curva son en cada punto paralelas al vector $B$ correspondiente a la curva dada. Además, según el valor de $X'$, se reduce que la línea de estricción encontrada solamente se reduce a un punto (en cuyo caso debe ser $Y'=0$) en el caso de ser $\varkappa_2=\varkappa_3=0$.

b) *Variedad desarrollable engendrada por los planos determinados por $U_1=D$ y $U_2=\varkappa_2T+\varkappa_1B$* (estudiada en § 2, 5).

Siendo, por hipótesis, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ constantes, será

$$U'_1=-\varkappa_3B=\frac{\varkappa_2\varkappa_3}{\varkappa_1}T-\frac{\varkappa_3}{\varkappa_1}U_2$$

$$U'_2=\varkappa_1\varkappa_3D=\varkappa_1\varkappa_3U_1,$$

o sea, comparando con (24)

$$\mu_1=\frac{\varkappa_2\varkappa_3}{\varkappa_1},\quad \nu_1=0,\quad \tau_1=-\frac{\varkappa_3}{\varkappa_1},\quad \mu_2=0,\quad \nu_2=\varkappa_1\varkappa_3,\quad \tau_2=0.$$

Con estos valores el sistema (29) da

$$\lambda_1=-\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2\varkappa_3},\quad \lambda_2=0$$

Esto nos dice que *la variedad desarrollable tridimensional estudiada en § 2, 5 está formada por los planos osculadores a la curva*

$$Y = X - \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2 \varkappa_3} D.$$

Siendo $Y' = T + \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} B$ se deduce que dicha curva no puede reducirse nunca a un punto.

*§ 4. Variedades desarrollables envolventes de los $E_3$ que son caras del tetraedroide fundamental.*

Nos proponemos buscar cuáles son las variedades desarrollables tridimensionales que pasan por una línea (obtenidas en § 2) que son las envolventes de los $E_3$ caras del tetraedroide fundamental.

*1. Variedad tridimensional envolvente de los $E_3$ determinados por $T$, $N$, $B$.* Para hallar la variedad envolvente de la familia de los $E_3$ definidos por

$$Y = X + \lambda T + \mu N + \nu B$$

bastará hallar los puntos $Y(s)$ de estos espacios para los cuales la tangente $Y'$ está contenida en el $E_3$ definido por los mismos $T$, $N$, $B$. Es

$$Y' = (1 - \mu \varkappa_1 + \lambda') T + (\lambda \varkappa_1 - \nu \varkappa_2 + \mu') N + (\mu \varkappa_2 + \nu') B + \nu \varkappa_3 D.$$

Para que este vector $Y'$ pertenezca al $E_3$ definido por $T$, $N$, $B$ debe ser $\nu = 0$ y entonces la variedad envolvente es la engendrada por $Y = X + \lambda T + \mu N$. Por tanto: *Los $E_3$ determinados por los vectores $T$, $N$, $B$ envuelven la variedad desarrollable engendrada por los planos osculadores.*

*2. Variedad tridimensional envolvente de los $E_3$ determinados por los vectores $T$, $N$, $D$.* Como en el número anterior, siendo ahora

$$Y = X + \lambda T + \mu N + \nu D$$

$$Y' = (1 - \mu \varkappa_1 + \lambda') T + (\lambda \varkappa_1 + \mu') N + (\mu \varkappa_2 - \nu \varkappa_3) B + \nu' D,$$

para que $Y'$ esté contenido en el $E_3$ definido por $T, N, D$ debe ser $\mu \varkappa_2 - \nu \varkappa_3 = 0$. La variedad envolvente es, pues, la engendrada por los planos

$$Y = X + \lambda T + \mu (\varkappa_3 N + \varkappa_2 D)$$

que no es otra que la variedad desarrollable obtenida en § 2, 2, b).

*3. Variedad tridimensional envolvente de los $E_3$ determinados por los vectores $T, B, D$.* En este caso es

$$Y = X + \lambda T + \mu B + \nu D$$
$$Y' = (1 + \lambda') T + (\lambda \varkappa_1 - \mu \varkappa_2) N + (\mu' - \nu \varkappa_3) B + (\mu \varkappa_3 + \nu') D$$

y por razones análogas a las de los números precedentes, la variedad envolvente será

$$Y = X + \lambda (\varkappa_2 T + \varkappa_1 B) + \nu D,$$

que es la variedad ya encontrada en § 2, 5, como única variedad desarrollable engendrada por planos que pasan constantemente por la binormal $D$.

*4. Variedad tridimensional envolvente de los $E_3$ determinados por los vectores $T, B, D$.* En este caso es

$$Y = X + \lambda N + \mu B + \nu D$$
$$Y' = (1 - \lambda \varkappa_1) T + (\ldots) N + (\ldots) B + (\ldots) D,$$

y para que el vector $Y'$ esté contenido en el $E_3$ definido por $N, B, D$ debe ser $1 - \lambda \varkappa_1 = 0$. La variedad envolvente es, por tanto, la engendrada por el plano

$$Y = X + \frac{1}{\varkappa_1} N + \mu B + \nu D. \qquad (30)$$

Esta variedad se diferencia de las anteriores en que los planos (30) no pasan por el punto $X$ de la curva. Son los planos paralelos al plano determinado por $B, D$ que cortan a la normal principal $N$ a una distancia $\frac{1}{\varkappa_1} = \rho_1$ del punto de la curva.

## III. Variedades tridimensionales en $E_4$, con carácter de desarrollables y que contienen una superficie.

### § 1. *Resumen de las nociones fundamentales sobre superficies en $E_4$.*

1. *Ecuaciones fundamentales.* Sea $X = X(u, v)$ la ecuación vectorial de una superficie en $E_4$. Por comodidad en los cálculos supondremos que las líneas coordenadas $u = \text{cte.}$ y $v = \text{cte.}$ son perpendiculares. Será, por consiguiente

$$X_u \,.\, X_v = 0 \tag{1}$$

y además pondremos, como de costumbre,

$$E = X_u^2, \quad G = X_v^2. \tag{2}$$

Consideremos en cada punto de la superficie dos vectores $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$ normales entre sí y normales al plano tangente a la superficie en el mismo punto. Pongamos las notaciones

$$\begin{array}{ll} L = \xi X_{uu} = -\xi_u X_u & L_1 = \eta X_{uu} = -\eta_u X_u \\ M = \xi X_{uv} = -\xi_v X_u = -\xi_u X_v & M_1 = \eta X_{uv} = -\eta_v X_u = -\eta_u X_v \\ N = \xi X_{vv} = -\xi_v X_v & N_1 = \eta X_{vv} = -\eta_v X_v \end{array} \tag{3}$$

y además

$$\begin{gathered} \delta = \eta \xi_u = -\xi \eta_u, \quad \delta' = \eta \xi_v = -\eta_v \xi \\ m = -\frac{L}{E}, \quad n = -\frac{M}{G}, \quad m_1 = -\frac{L_1}{E}, \; n_1 = -\frac{M_1}{G} \\ m' = -\frac{M}{E}, \quad n' = -\frac{N}{G}, \quad m'_1 = -\frac{M_1}{E}, \; n'_1 = -\frac{N_1}{G}. \end{gathered} \tag{4}$$

Con estas notaciones, las ecuaciones fundamentales de la teoría de superficies en $E_4$ son (10):

$$X_{uu} = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} X_u + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} X_v + L\xi + L_1 \eta$$

$$X_{uv} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} X_u + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} X_v + M\xi + M_1 \eta$$

$$X_{vv} = \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} X_u + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} X_v + N\xi + N_1 \eta$$

(10) Ver Servant [10].

$$\begin{aligned} \xi_u &= m\,X_u + n\,X_v + \delta\,\eta \\ \xi_v &= m'\,X_u + n'\,X_v + \delta'\,\eta \\ \eta_u &= m_1\,X_u + n_1\,X_v - \delta\,\xi \\ \eta_v &= m'_1\,X_u + n'_1\,X_v - \delta'\,\xi \end{aligned} \qquad (5)$$

En estas ecuaciones vectoriales, los símbolos $\left\{ {ij \atop k} \right\}$ son los clásicos símbolos de Christoffel que se expresan mediante $E, G$ (2) y sus primeras derivadas parciales respecto $u, v$ (11).

## § 2. *Variedades tridimensionales de $E_4$ con carácter de desarrollables que contienen a una superficie dada.*

*1. Condiciones generales.* Supongamos en cada punto de la superficie $X = X(u,v)$ un vector $U = U(u,v)$ de módulo unidad. El conjunto de las rectas definidas por estos vectores formará una variedad de 3 dimensiones de ecuación

$$Y(u,v,\lambda) = X(u,v) + \lambda\,U(u,v). \qquad (6)$$

Esta variedad se dirá que tiene *carácter de desarrollable* cuando el $E_3$ tangente sea el mismo para todos los puntos de una misma generatriz.

El $E_3$ tangente en un punto $u, v, \lambda$ es el determinado por los tres vectores

$$Y_\lambda = U, \quad Y_u = X_u + \lambda\,U_u, \quad Y_v = X_v + \lambda\,U_v. \qquad (7)$$

Para que este $E_3$ sea el mismo para cualquier $\lambda$, debe cumplirse, según el caso,

1º. Si $U$ no está en el plano $X_u$, $X_v$, debe ser

$$(U, X_u, X_v, U_u) = 0, \quad (U, X_u, X_v, U_v) = 0, \qquad (8)$$

donde los primeros miembros indican abreviadamente los determinantes de cuarto orden cuyas filas son las componentes de los vectores respectivos.

La primera condición expresa que $U_u$ está en el $E_3$ definido por los vectores $U$, $X_u$, $X_v$, y la segunda que $U_v$ está también en el mismo espacio.

---

(11) Ver por ej. BLASCHKE [1] p. 115. GRAUSTEIN [4] p. 136.

2°. Si $U$ está en el plano $X_u$, $X_v$, bastará que se verifique la condición única,

$$(X_u, X_v, U_u, U_v) = 0. \tag{9}$$

2. *Expresiones de $U_u$ y $U_v$.* Como los vectores $X_u$, $X_v$, $\xi$, $\eta$ forman un tetraedroide rectangular, se puede expresar $U$ por sus componentes respecto el mismo. Sea

$$U = a X_u + b X_v + c\,\xi + e\,\eta. \tag{10}$$

De aquí, teniendo en cuenta las relaciones fundamentales de § 1, se obtiene

$$\begin{aligned} U_u &= (\dots) X_u + (\dots) X_v + (c_u + a L + b M - e\,\delta)\,\xi \\ &\qquad + (e_u + a L_1 + b M_1 + c\,\delta)\,\eta, \\ U_v &= (\dots) X_u + (\dots) X_v + (c_v + a M + b N - e\delta')\,\xi \\ &\qquad + (e_v + a M_1 + b N_1 + c\,\delta')\,\eta. \end{aligned} \tag{11}$$

Los coeficientes de $X_u, X_v$ no se han puesto de manifiesto porque no interesarán en lo sucesivo.

## *§ 3. Condiciones generales para que la variedad tenga carácter de desarrollable.*

1. *La generatriz $U$ está en el plano tangente.* En la expresión (10) será $c = e = 0$. La condición para que la variedad (6) tenga carácter de desarrollable es, en este caso, la condición (9), que según (11) se escribe

$$\begin{aligned} &(X_u, X_v, (a L + b M)\,\xi, (a M_1 + b N_1)\,\eta) + \\ &\qquad + (X_u, X_v, (a L_1 + b M_1)\,\eta, (a M + b N)\,\xi) = 0, \end{aligned}$$

o sea,

$$(a L + b M)(a M_1 + b N_1) - (a L_1 + b M_1)(a M + b N) = 0,$$

que se puede escribir en la forma

$$a^2 (L M_1 - M L_1) + a b (L N_1 - N L_1) + b^2 (M N_1 - N M_1) = 0. \tag{12}$$

Esta ecuación nos dice que, *en general habrá en cada punto dos direcciones según las cuales las rectas tangentes a la superficie formarán una variedad tridimensional con carácter de desarrollable.* Estas dos direcciones están dadas por la ecuación (12) y se llaman, según los autores, *direcciones asintóticas* (12), *direcciones conjugadas* (13) o *direcciones características* (14) de la superficie.

2. *La generatriz U no está en el plano tangente.* En este caso las condiciones para que la variedad tenga carácter de desarrollable son las (8), que teniendo en cuenta (11), se escribirán:

La primera

$$(U, X_u, X_v, U_u) = (c\,\xi, X_u, X_v, (e_u + a\,L_1 + b\,M_1 + c\,\delta)\,\eta) + (e\,\eta, X_u, X_v, (c_u + a\,L + b\,M - e\,\delta)\,\xi) = 0,$$

o sea,

$$c\,(e_u + a\,L_1 + b\,M_1 + c\,\delta) - e\,(c_u + a\,L + b\,M - e\delta) = 0. \quad (13)$$

La segunda

$$(U, X_u, X_v, U_v) = (c\,\xi, X_u, X_v, (e_v + a\,M_1 + b\,N_1 + c\,\delta')\,\eta) + (e\,\eta, X_u, X_v, (c_v + a\,M + b\,N - e\,\delta')\,\xi) = 0,$$

o sea,

$$c\,(e_v + a\,M_1 + b\,N_1 + c\,\delta') - e\,(c_v + a\,M + b\,N - e\,\delta') = 0. \quad (14)$$

---

(12) Ver por ej. KOMMERELL [6], pág. 554, H. GERICKE [3] pág. 420.

En estos trabajos las asintóticas se definen por la ecuación diferencial

$$(X_u, X_v, X_{uu}, X_{uv})\,u'^2 + (X_u, X_v, X_{uu}, X_{vv})\,u'\,v' + (X_u, X_v, X_{uv}, X_{vv})\,v'^2 = 0.$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones fundamentales (5) resulta, efectivamente, que esta ecuación es equivalente a la (12). Para las propiedades de las líneas asintóticas sobre una superficie de $E_4$ y la condición para que todas las líneas de la superficie lo sean, ver los trabajos citados. También E. E. LEVI [7] nº 48.

(13) E. E. LEVI [7] nº 39, 48.

(14) C. SEGRE [9] nº 13, 14. E. BOMPIANI [2] nº 5. A. TERRACINI [12] nº 5.

## § 4. *Caso particular.*

*1. La generatriz U está en el plano normal.* Supongamos que $U$ está en el plano determinado por los vectores $\xi, \eta$, es decir,

$$U = c\,\xi + e\,\eta.$$

Para determinar $c, e$ de manera que la variedad tridimensional tenga carácter de desarrollable, habrá que hacer en (13) y (14) $a = b = 0$, con lo cual quedan las ecuaciones

$$\begin{aligned} c\,e_u - e\,c_u + (c^2 + e^2)\,\delta &= 0 \\ c\,e_v - e\,c_v + (c^2 + e^2)\,\delta' &= 0, \end{aligned}$$

o sea

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{c}{e}\right) = \delta, \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{c}{e}\right) = \delta'. \tag{15}$$

Para la compatibilidad de estas ecuaciones es necesario y suficiente que se cumpla la condición

$$\frac{\partial\,\delta(u,v)}{\partial v} = \frac{\partial\,\delta'(u,v)}{\partial u}. \tag{16}$$

Esta condición, teniendo en cuenta los valores de $\delta$ y $\delta'$ dados en (4), equivale a $\xi_u\,\eta_v = \xi_v\,\eta_u$, o también, sustituyendo las derivadas parciales de $\xi, \eta$ por sus valores expresados en (5):

$$m\,m'_1\,E + n\,n'_1\,G = m'\,m_1\,E + n'\,n_1\,G.$$

Finalmente, sustituyendo en esta expresión los valores dados en (4), se obtiene que la condición (16) equivale a

$$E\,(M\,N_1 - N\,M_1) + G\,(L\,M_1 - M\,L_1) = 0. \tag{17}$$

Vamos a obtener el significado geométrico de esta condición. Recordemos que las llamadas *direcciones asintóticas* de la superficie son las de los vectores $a_1\,X_u + b_1\,X_v$, $a_2\,X_u + b_2\,X_v$ donde $a_1, b_1$ y $a_2, b_2$ son las raíces de la ecuación (12). Para que estas direcciones asintóticas sean perpendiculares es preciso que

$$(a_1 X_u + b_1 X_v) \cdot (a_2 X_u + b_2 X_v) = 0.$$

Haciendo el producto y teniendo en cuenta (1) y (2) queda $a_1 a_2 E + b_1 b_2 G = 0$. Siendo $a_1, b_1$ y $a_2, b_2$ las raíces de (12) esta condición equivale a (17). Por tanto: *Para que existan variedades tridimensionales con carácter de desarrollables engendradas por rectas que pasan por cada punto de una superficie y estén situadas en el plano normal correspondiente, es condición necesaria y suficiente que la superficie sea tal que sus direcciones asintóticas, dadas por (12), sean perpendiculares.*

Cuando esto sucede se dice, según Guichard, que dichas líneas forman una *red de líneas de curvatura* de la superficie y gozan de notables propiedades ([15]).

Supuesto que la superficie cumpla la condición (16), la variedad tridimensional desarrollable se determina fácilmente. Llamando $\varphi$ al ángulo que forman las generatrices $U$ con el vector normal $\eta$ $\left(\text{o sea, } \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{c}{e}\right)$, según (15) será

$$\varphi = \int_0^u \delta(u, v)\, du + \int_0^v \delta'(0, v)\, dv + a_1.$$

Por tanto: *La variedad desarrollable queda determinada dando un valor inicial de $\varphi$ para un punto determinado. Dadas dos variedades distintas, correspondientes a los valores iniciales $\varphi_1$, $\varphi_2$, la diferencia $\varphi_1 - \varphi_2 = a_1 - a_2$, o sea, el ángulo que forman las generatrices respectivas, se conserva constante para todo par de generatrices homólogas.*

Rosario, Instituto de Matemática, marzo de 1942.

---

([15]) Ver, SERVANT [10] p. 100.

## BIBLIOGRAFIA


[1] W. BLASCHKE, *Differentialgeometrie I*, J. Springer, Berlin 1930.

[2] E. BOMPIANI, *Contributo allo studio dei sistemi lineari di rette nello spazio a quattro dimensioni.* Atti dal R. Istituto Veneto di Sc. T. LXXII (1913), p. 579.

[3] H. GERICKE, *Zur Differentialgeometrie von Flächen im n-dimensionalen euklidischen Raum. Adjungierte Extremalflächen.* Math. Zeitsch. Bd. 46, 1940, p. 408.

[4] W. C. GRAUSTEIN, *Differential geometry*, Macmillan C° New York 1935.

[5] C. GUICHARD, *Les courbes de l'espace a n dimensions.* Mémorial des Sciences Mathématiques. fasc. XXIX. Gauthier-Villars. París, 1928.

[6] K. KOMMERELL, *Riemannsche Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen.* Math. Ann. T. 60 (1905), p. 548.

[7] E. E. LEVI, *Saggio sulla teoria delle superficie a due dimensioni immerse in un iperspazio.* Ann. R. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1905.

[8] C. SEGRE, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi.* Rend. Palermo, t. XXX, 1910, p. 87.

[9] C. SEGRE, *Su una classe di superficie degl'iperspazii legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine.* Atti della R. Acc. Sc. Torino, Vol. XLII (1907).

[10] SERVANT, *Sur une extensión des formules de Gauss.* Bull. de la Soc. Math. de France, t. 30, 1902, p. 92.

[11] A. TERRACINI, *Sulle varietà di spazi con carattere di sviluppabili.* Atti R. Acc. Sc. di Torino, vol. 48 (1913).

[12] A. TERRACINI, *Esposizione di alcuni risultati di geometria proiettiva differenziale negli iperspazi.* Apéndice III a la obra "Geometria proiettiva differenziale" de Fubini-Cech, N. Zanichelli, Bologna, 1927.