REVISTA
DE LA
UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Tomo XII | Lima, Setiembre-Octubre de 1944 | Número 6-7

ORIGEN Y DESARROLLO DE LA GEOMETRIA INTEGRAL

Por *L. A. SANTALÓ*

1. La teoría de Probabilidades Geométricas. En 1777, en su *Essai d'arithmétique morale* [1] (*) el famoso naturalista francés Georges Buffon (1707-1788) publicaba la solución de un problema que ya había enunciado en 1733 y que ha devenido célebre con el nombre de "Problema de la aguja". Consiste en lo siguiente: dadas en un plano una sucesión de rectas paralelas que distan entre sí una distancia constante a, se arroja al azar sobre el mismo plano una aguja de longitud r ($r < a$) y se pide la probabilidad de que la aguja quede cortando alguna de las paralelas. Si p es la probabilidad buscada, la solución es

$$p = \frac{2r}{\pi a} \tag{1}$$

Este problema, que fué generalizado años después por Laplace al caso de suponer el plano dividido en rectángulos de lados mayores que la longitud de la aguja [9, pág. 366], llamó inmediatamente la atención de los geómetras por el hecho de que, tomado en sentido inverso, debía permitir el cálculo del número π al azar. En efecto, si se verifica la experiencia un número creciente de veces y se toma el cociente entre el número de casos favorables (aquellos en que la aguja corta a alguna paralela) y el número total de ca-

(*) Estos paréntesis [ ] se refieren a la bibliografía al final.

sos en que la aguja es arrojada, se debe obtener la probabilidad p con una aproximación creciente con el número de veces que se realiza la experiencia. Entonces, conocido el valor de p y las longitudes r y a, la fórmula (1) debe permitir el cálculo de π.

Se han hecho, efectivamente, experiencias en este sentido, la mayoría de las cuales pueden leerse, por ejemplo, en los conocidos tratados sobre Probabilidades de G. Castelnuovo [13] y J. V. Uspensky [15] y todas ellas, como no podía ser de otra manera, han dado resultados coincidentes con la teoría. Decimos que no podía ser de otra manera porque la validez de un razonamiento matemático jamás podrá discutirse apoyándose en el resultado de una experiencia, más bien es el primero el que puede decidir acerca de si la última ha sido o no bien realizada. Así, en el caso de la comprobación experimental de la fórmula (1), si en alguna experiencia ocurriera que el resultado no concuerda con la teoría, ello no significaría que dicha fórmula es errónea, sino que la experiencia ha sido mal realizada y deberíamos modificarla hasta obtener un resultado de acuerdo con (1), puesto que el único elemento de juicio para juzgar si la experiencia se hace bien, está en el hecho de que el resultado esté de acuerdo con la fórmula teórica

Aparte la curiosa consecuencia anterior, el problema de Buffon tiene importancia fundamental por el hecho de que por primera vez se trata de una cuestión de probabilidades en que tanto el número de casos favorables, igual al número de posiciones diferentes de la aguja en las cuales corta a alguna paralela, como el de casos posibles, número total de posiciones de la aguja en el plano, son infinitos. Ya no es aplicable la definición de probabilidad como simple cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles. Se trata de un nuevo tipo de problemas, que se han llamado de *probabilidades continuas* o *probabilidades geométricas*.

2. Medida de conjuntos de elementos geométricos. Los conjuntos finitos se miden por el número de sus elementos. Este criterio no sirve para los conjuntos compuestos de infinitos elementos; para ellos hay que dar una definición de lo que debe entenderse por "medida" del conjunto. Por ejemplo, los puntos de una línea, que son infinitos, se miden por la longitud de la misma; los puntos de una región del plano o de una superficie se miden por el área. Más generalmente, se entiende por *medida* de un conjunto X a toda función de conjunto $\mu(X)$ que cumpla las condiciones de ser siempre positiva o nula $[\mu(X) \geqslant 0]$ y poseer la propiedad aditiva, o sea, que la medida de la suma de dos conjuntos sin elemento común sea igual a la suma de las medidas $[\mu(X_1 + X_2) = \mu(X_1) + \mu(X_2)]$.

Definida la medida para conjuntos de elementos geométricos cualesquiera (puntos, rectas, planos, ...), la definición clásica de probabilidad como cociente entre el número de casos favorables y el de casos posibles, se generaliza inmediatamente al caso de las probabilidades geométricas. Se dirá: *dados dos conjuntos* X, Y *de elementos geométricos, el primero contenido en el segundo* $(X \subset Y)$, *se llama probabilidad de que un elemento elegido al azar en* Y *pertenezca a* X, *al cociente*

$$p = \frac{\mu(X)}{\mu(Y)} \tag{2}$$

de las medidas respectivas.

Se comprende de esta definición, que el valor de la probabilidad está íntimamente ligado a la definición adoptada de medida. Modificando ésta, puede variar también el valor de la probabilidad. En general la medida que debe adoptarse en cada problema particular de probabilidades geométricas depende de la manera como se supone realizada la elección del elemento en el conjunto total de casos posibles.

Supongamos, por ejemplo, una circunferencia de centro O y radio R y sobre ella un arco AB de longitud a (fig. 1). La probabilidad de que un punto dado al azar sobre la circunferencia pertenezca al arco AB, si no se especifica el modo de elección y por tanto se admite implícitamente que todos los puntos son igualmente probables, será igual al cociente $a : 2\pi R$ entre la longitud del arco AB y la longitud total de la circunferencia. Pero el punto tomado al azar puede también suponerse que se obtiene prolongando el radio de una circunferencia interna a la dada y de centro un punto cualquiera O', radio que se hace girar alrededor de O' como una ruleta ordinaria de juego. Entonces, si el radio de la circunferencia menor es R' y el arco AB se proyecta sobre ella desde O' según un arco $A'B'$ de longitud a', la probabilidad será $a' : 2\pi R'$ que, en general, es distinta de la anterior.

Este sencillo ejemplo nos muestra claramente que en los problemas de probabilidades geométricas, para estar bien enunciados y poseer en consecuencia una solución bien determinada, debe darse la manera de elección al azar del elemento posible, o, en otras palabras, debe darse la "ley de probabilidad" correspondiente al problema. Esto da la explicación de ciertas paradojas, como la célebre paradoja de Bertrand [11, pág. 4] que puede verse reproducida en casi todos los libros de probabilidades geométricas [14, pág. 7], [15, pág. 251].

Para eliminar esta posible diversidad de medidas, aquella que se conviene en admitir para los conjuntos de elementos geométricos,

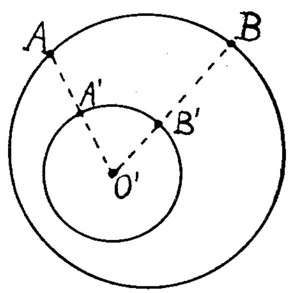

Fig. 1

al objeto de definir para ellos la noción de probabilidad, es la que resulta al imponer la condición de que *debe ser independiente de la posición del conjunto en el espacio,* o sea, *debe ser invariante por movimientos.*

Consideremos el caso más simple de un conjunto de puntos sobre la recta. Tomemos sobre la recta un origen O y sea x la abscisa de sus puntos. Como medida de un conjunto X de puntos de la recta se puede tomar la integral, extendida al conjunto X, de cualquier expresión diferencial $f(x)dx$ con tal de que $f(x)$ sea una función integrable no negativa. Para que esta medida sea invariante por movimientos del conjunto sobre la recta, o sea, sea independiente del origen O de coordenadas, deberá ser $f(x+a) = f(x)$

cualquiera que sea el valor de la traslación a a la que se someta X. Por tanto debe ser $f(x) =$ constante y se tiene que la probabilidad se define como el *cociente entre las longitudes de los conjuntos de casos favorables y casos posibles.*

Análogamente se procede para conjuntos de puntos del plano. Sea X uno de ellos. Como medida del mismo se podría tomar la integral, extendida al conjunto, de cualquier expresión de la forma $f(x, y)\, dx\, dy$, siendo $f(x, y)$ una función integrable y no negativa arbitraria. Pero para que esta integral sea invariante por movimientos, o lo que es lo mismo, tome igual valor cualquiera que sea la posición en el plano de los ejes coordenados de referencia, se demuestra fácilmente que la función $f(x, y)$ debe ser una constante. Por tanto: *la probabilidad para conjuntos de puntos del plano se define como cociente de las áreas de los conjuntos de casos favorables y posibles.*

De la misma manera, en el espacio euclidiano de n dimensiones, la probabilidad geométrica para conjuntos de puntos se define como cociente de volúmenes.

3. Conjuntos de rectas. Después de los puntos, los elementos geométricos más simples que aparecieron en los problemas de probabilidades continuas, fueron las rectas. Lo mismo que para los conjuntos de puntos, fué necesario definir una "medida" para conjuntos de rectas. Una recta G del plano queda determinada dando su distancia p a un punto fijo O del mismo plano y el ángulo ϕ que la normal a la recta forma con una dirección fija por O. Por tanto, como medida de un conjunto de rectas se podría tomar la integral de cualquier expresión de la forma $f(p, \phi)\, dp\, d\phi$, siendo $f(p, \phi)$ una función integrable, no negativa, cualquiera. Se demuestra [14, pág. 59] que para que esta integral sea invariante por movimientos, es decir, sea independiente de la posición del punto fijo O y de la dirección por el mismo, debe ser $f(p, \phi) =$ cte. y por tanto se tiene: *la medida de un conjunto de rectas del plano es igual a la integral, extendida al conjunto, de la forma diferencial*

$$dG = dp\, d\phi. \tag{3}$$

Esta expresión diferencial se llama *densidad* para conjuntos de rectas.

Con esta expresión ya obtuvo, al parecer Cauchy [2] el primero, el resultado siguiente, que puede considerarse como uno de los primeros de lo que luego se ha llamado Geometría Integral. Supongamos en el plano una curva abierta o cerrada cualquiera, rectificable y de longitud L. Sea n el número de puntos en que esta curva es cortada por una recta arbitraria G del plano; naturalmente n es una función de G, o sea, de sus coordenadas p, ϕ. Se demuestra entonces que es válida la siguiente fórmula integral:

$$\int n \, dG = 2L, \tag{4}$$

siendo dG la expresión (3) y estando la integración extendida a todas las rectas del plano; la demostración puede verse, por ejemplo en [14, pág. 60], [16, pág. 11]. Naturalmente, para las rectas que no cortan a la curva es $n = 0$.

Por ejemplo, si la curva es convexa y cerrada, es siempre $n = 2$ y por tanto la fórmula (4) nos dice que: *la medida del conjunto de rectas que cortan a una curva convexa cerrada del plano, es igual a la longitud de la misma.* En forma de problema de probabilidades geométricas este resultado se enuncia: dada una curva convexa y cerrada K_1 de longitud L_1, interior a otra curva también convexa y cerrada K de longitud L, la probabilidad de que una recta arbitraria que corta a K corte también a K_1, es igual al cociente $L_1 : L$ entre las longitudes de las dos curvas.

Pero la importancia de la fórmula (4) no estriba únicamente en que permite resolver los problemas de probabilidades geométricas en los cuales los elementos son rectas, sino en que puede servir para obtener ciertas propiedades de las curvas planas rectificables. Supongamos, por ejemplo, una curva K_1, convexa o no, de longitud L_1, contenida en el interior de una curva convexa cerrada K de longitud L. Considerando todas las rectas que cortan a K, el *valor medio* del número de puntos en que estas rectas cortan a K_1 será (estando la integral del numerador y la del denominador extendidas a todas las rectas G que cortan a K)

$$\bar{n} = \frac{\int n \, dG}{\int dG} = \frac{2L_1}{L} \tag{5}$$

y como siempre debe haber rectas cuyo número de puntos de intersección con K_1 supere al valor medio $\bar{n}$ de los mismos, se deduce: *si una curva* K_1, *convexa o no, tiene longitud* L_1 *y está contenida en el interior de otra curva convexa de longitud* L, *siempre existen rectas que la cortan en un número de puntos igual o mayor que* $2L_1 : L$ *si este número es entero, o igual o mayor que el entero superior más próximo en caso contrario.*

Tenemos así un primer ejemplo de cómo la idea de medida de conjuntos de rectas, idea que nace espontáneamente como una necesidad en la teoría de probabilidades geométricas, sirve para deducir propiedades de las curvas planas desligadas completamente de aquella noción de medida y de la noción de probabilidad.

4. Las fórmulas de Crofton. Quien primero hizo un uso sistemático del método anterior, o sea, de utilizar el concepto de pro-

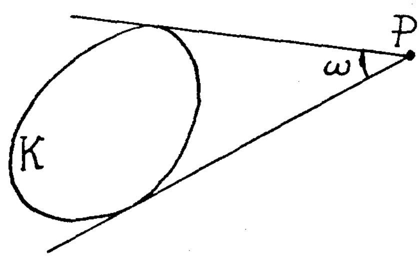

Fig. 2

babilidad geométrica para la obtención de resultados y fórmulas referentes a figuras planas, desvinculados completamente de aquella idea originaria, fué el inglés M. W. Crofton (1826-1915) [3], [4], [5]. En este sentido puede considerarse a Crofton como el fundador de la Geometría Integral.

Las dos fórmulas principales de Crofton, referentes a curvas convexas del plano, son las siguientes:

a). Sea en el plano una curva convexa cerrada cualquiera K de longitud L y sea F el área limitada por la misma. Sea ω el ángulo bajo el cual K es vista desde un punto exterior P de coordenadas x, y; el ángulo ω será una función de x, y (fig. 2).

Se verifica entonces la notable fórmula integral

$$\int (\omega - \operatorname{sen} \omega)\, dx\, dy = \tfrac{1}{2} L^2 - \pi F, \qquad (6)$$

estando la integración extendida a toda la región del plano exterior a K. Aunque se trata naturalmente de una integral doble, aquí y en todo lo sucesivo, pondremos únicamente un solo signo de integración.

b). Sea la misma curva convexa cerrada K. Sea σ la longitud de la cuerda que en ella determina una recta cualquiera G del plano (fig. 3). Se verifica entonces

$$\int \sigma^3\, dG = 3 F^2 \qquad (7)$$

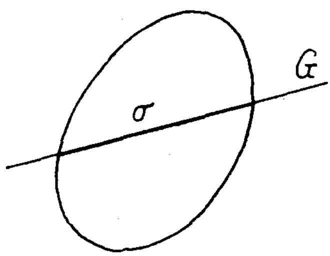

Fig. 3

siendo dG la densidad de rectas (3) y estando la integración extendida a todas las rectas del plano. Naturalmente para las rectas que no cortan a K es $\sigma = 0$.

Estas fórmulas, notables por su gran generalidad, puesto que no dependen de la forma de la curva K, a la cual sólo se impone la condición de ser convexa, fueron obtenidas por Crofton, como dijimos, por razonamientos basados en el concepto de probabilidad. La demostración por este camino puede verse en Deltheil [14, pág. 74] o en Czuber [10].

Las fórmulas (6) y (7) de Crofton, como otras de tipo análogo obtenidas por el mismo autor, no han tenido aplicación a otras cuestiones de la matemática, pero por su gran generalidad y simplicidad insospechada, han sido objeto de estudio por otros matemáticos, habiéndose dado demostraciones completamente independientes de la noción de probabilidad; ver por ejemplo Serret [6], Lebesgue quien dedicó una memoria a exponer de manera rigurosa y puramente analítica estos y otros resultados de Crofton [8], y Blaschke [16].

5. La densidad cinemática. Sin salir todavía del plano, además de conjuntos de puntos y de rectas, se pueden considerar también conjuntos de figuras congruentes cualesquiera. Los puntos y las rectas son los casos particulares más simples de figuras que son todas congruentes entre sí; para su determinación hacen falta dos parámetros, que son las coordenadas x, y en el caso de los puntos y

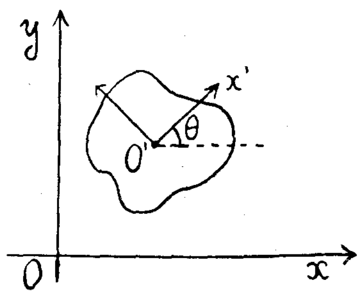

Fig. 4

las p, ϕ para las rectas. Para otra figura de forma invariable cualquiera, su *posición en el plano depende de tres parámetros*. Ellos pueden ser las coordenadas x, y de un punto O' invariablemente unido a la figura y el ángulo θ que una dirección $O'x'$ por este punto, también invariablemente unida a la figura, forma con una dirección fija Ox (fig. 4).

Entonces, para medir conjuntos de figuras congruentes cualesquiera, se toma la integral, extendida al conjunto, de la forma diferencial

$$dK = dx\,dy\,d\theta. \tag{8}$$

Esta forma diferencial se llama *densidad cinemática* y se demuestra que es la única que da lugar a una medida que es invariante por movimientos, es decir, que no depende de la posición de los ejes coordenados de referencia ni de la posición del punto O' en la figura de posición variable, ni de la dirección $O'x'$ por el mismo. Esta densidad cinemática servirá, pues, para medir conjuntos de figuras congruentes, o, lo que es lo mismo, conjuntos de posiciones de una misma figura móvil de manera indeformable en el plano.

Este concepto de *densidad cinemática* fué introducido por Poincaré [12, pág. 127].

6. La Geometría Integral. Los conceptos anteriores constituían los fundamentos de la teoría de probabilidades geométricas y, excepto los trabajos de Crofton, que ya hemos dicho que excedían los dominios de esta teoría, obteniendo resultados muy generales acerca de las curvas convexas cerradas, quedaban limitados a simple curiosidad en los libros de Cálculo de Probabilidades. Sin embargo, ellos contenían los principios de ciertas ideas cuyo desarrollo parecía que debía ser fecundo aun desde el punto de vista geométrico puro, ajeno a toda idea de probabilidad.

Se presentaban, como principales, dos direcciones de investigación. La primera consistía en generalizar los conceptos y definiciones de medida de conjuntos de rectas y medida cinemática, a espacios de cualquier número de dimensiones. La segunda consistía en proseguir el camino iniciado por Crofton, aplicando las ideas y resultados obtenidos al medir determinados conjuntos particulares de rectas o figuras congruentes, a la obtención de propiedades geométricas de las figuras del plano o de los espacios de mayor número de dimensiones.

La tarea fué iniciada por G. Herglotz en un curso sobre Probabilidades Geométricas dado en la Universidad de Göttingen durante el semestre de verano de 1933. Inmediatamente las investigaciones fueron proseguidas por W. Blaschke, quien después de dar dos bellísimos cursos sobre el particular en el Seminario Matemático de la Universidad de Hamburgo en 1934-35, inaugura una serie de publicaciones que encabeza con el nombre de Geometría Integral, introduciendo esta denominación, y cuyo número fué creciendo rápidamente con trabajos del mismo Blaschke y de sus alumnos de la escuela de Hamburgo. La lista de esta serie de memorias puede verse en la Bibliografía del final de este artículo [17 a 49], existiendo además, como compendio de las mismas hasta la fecha de su publicación, las *Vorlesungen über Integralgeometrie*, también de Blaschke [16].

Vamos a indicar, brevemente, los principales resultados a que se ha llegado en esta nueva rama de la geometría. De acuerdo con las dos direcciones que hemos dicho se presentaban de manera natural, vamos a exponer primeramente los resultados generales referentes a la definición y generalización del concepto de medida de conjuntos de variedades a espacios generalizados. Después mencionaremos las aplicaciones.

De análoga manera a como para medir conjuntos de rectas del plano se toma la integral de la expresión (3), llamada densidad de rectas, por ser ella la única que es invariante por movimientos, para un espacio euclidiano n-dimensional E_n se presenta el problema de definir la medida de conjuntos de subespacios lineales E_r de dimensión r, con la condición de que dicha medida sea invariante por movimientos en el espacio E_n. Este problema fué completamente resuelto por Blaschke en el primer trabajo de Geometría Integral [17], obteniendo el siguiente resultado. Un E_r en E_n $(0 \leqslant r < n)$ puede fijarse por uno de sus puntos x de coordenadas x_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ y por un sistema de n ejes coordenados ortogonales entre sí, de vértice x, y tales que los r primeros ejes, de cosenos directores a_j^i $(i = 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ estén en E_r y los $n - r = s$ restantes que completan el sistema tengan por cosenos directores b_j^i $(i = r + 1, r + 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, 3, \ldots, n)$ siendo normales entre sí y normales a E_r. Se forman entonces las formas diferenciales

$$p^{ik} = \sum_{t=1}^{n} b_t^k \, da_t^i \qquad v^i = \sum_{t=1}^{n} b_t^i \, dx_t$$

y la densidad de los E_r en E_n es

$$dE_r = \prod_{j=1}^{s} v^j \prod_{i=1,\ k=1}^{r,\ s} p^{ik} \tag{9}$$

En estos productos hay que entender que aquellos que contienen más de una vez un mismo diferencial da_t^i son nulos, y cuando el orden de los mismos cambia, el signo depende, como en el desarrollo de un determinante, de la paridad del número de permutaciones de los índices t.

Como medida de un conjunto de E_r en E_n se toma la integral, extendida al conjunto, de la forma diferencial (9). Se demuestra que esta medida es la única, salvo un factor constante, que es invariante por movimientos en E_n, es decir, que no cambia cuando a todo el conjunto, de manera indeformable, se le traslada de lugar en el espacio.

La expresión (9), para $n = 2$, $r = 1$ se reduce, salvo la forma, a la expresión (3). Para $n = 3$ y $r = 1, 2$, se obtienen las densidades para medir conjuntos de rectas y de planos del espacio ordinario, densidades que ya eran conocidas en la teoría de probabilidades geométricas [14, cap. V], [7]. Con estas densidades se pueden medir casos particulares notables de conjuntos de rectas y de planos. Por ejemplo, como medida de las rectas del espacio de 3 dimensiones que cortan a una superficie convexa cerrada se obtiene $\frac{\pi}{2}F$, siendo F el área de la superficie; como medida del conjunto de planos que cortan a la misma superficie convexa y cerrada se obtiene la integral de curvatura media de la misma [14, pág. 90], [7].

En el trabajo citado [17], Blaschke obtiene, además de (9), también la densidad cinemática en E_n y las densidades para subespacios y cinemática para la geometría esférica de n dimensiones.

En otra forma, utilizando el simbolismo del cálculo con matrices, las mismas densidades para subespacios del espacio euclidiano o no euclidiano de n dimensiones fueron obtenidas más tarde por A. Müller [32].

A veces conviene expresar el producto de las densidades de varios E_r en E_n en función de otros elementos, distintos de los x_i, a_t^i, b_t^i, mencionados, que también sirvan para fijar dichos E_r. Por ejemplo, dos rectas G_1, G_2 en E_3 pueden determinarse por la perpendicular común G, más los puntos de abscisas t_1, t_2 sobre G en que esta perpendicular corta a G_1 y G_2, más los ángulos de giro θ_1,

θ_2 de estas rectas alrededor de G. Se obtiene entonces que el producto de las densidades $dG_1.dG_2$ puede expresarse en la forma

$$dG_1.dG_2 = \operatorname{sen}^2(\theta_2 - \theta_1)d\theta_1\, d\theta_2\, dG\, dt_1\, dt_2\,. \qquad (10)$$

Muchas interesantes fórmulas de este tipo, muy útiles para la obtención de fórmulas integrales al estilo de las (6), (7) de Crofton, fueron obtenidas por O. Varga [19] para el espacio euclidiano de 3 dimensiones y en toda generalidad, para el espacio euclidiano o no euclidiano n-dimensional, en un trabajo fundamental, por B. Petkantschin [22].

Además de las densidades de los E_r en E_n que son invariantes por movimientos (densidades en geometría métrica), cabe la búsqueda de densidades invariantes por grupos más amplios que el métrico, por ejemplo el grupo de las proyectividades. Este caso de densidades invariantes por proyectividades fué estudiado por Varga [24]; se obtiene que tales densidades no pueden existir para conjuntos de simples E_r, siendo necesario considerar conjuntos de combinaciones de varios de ellos. Por ejemplo, el elemento más simple en el plano, para el cual puede definirse una densidad proyectiva, es el elemento formado por el conjunto de un punto más una recta.

Objeto atrayente de estudio, hasta ahora únicamente esbozado, parece ser la obtención de las densidades y sus diversas combinaciones, de los subespacios lineales de los espacios de Hermite. En este sentido hay una nota de Blaschke [46] y un trabajo de Varga [70] en el cual, entre otros resultados, generaliza la fórmula (4), obteniendo que también en la geometría hermitiana del plano, la medida de las rectas que cortan a una curva, contada cada una tantas veces como puntos de intersección tenga con la curva, es proporcional a la longitud de la misma.

Los conceptos fundamentales de geometría integral han sido también generalizados por Chern [53] a los espacios de Klein, entendiendo por tales aquellos espacios de n dimensiones que admiten un grupo transitivo de transformaciones de r parámetros. Mucho parece que queda todavía por hacer en esta dirección, extendiendo las ideas de geometría integral a los espacios generalizados de diversos tipos.

Junto con los trabajos anteriores se ha ido desarrollando la segunda dirección de la geometría integral, consistente en la obtención de fórmulas integrales derivadas de la medida, utilizando las densidades anteriores, de ciertos conjuntos especiales de elementos geométricos y hacer aplicación de estas medidas a la demostración de propiedades geométricas de determinadas figuras especiales.

Mencionaremos con algún detalle los resultados referentes al caso del plano, observando que muchos de ellos ya se han generalizado al espacio y aun a espacios de mayor número de dimensiones. Definida por Poincaré la densidad cinemática (8), quedaba la labor de hacer aplicación de la misma a la medida de conjuntos especiales de figuras congruentes. En tal sentido se obtuvo la generalización de la fórmula (4) al caso en que en lugar de la recta, el elemento móvil es una curva cualquiera de forma invariable. Sea K_1 una curva cualquiera rectificable de longitud L_1 y K otra curva también rectificable de longitud L. Supongamos que K_1 está fija y K puede moverse en el plano, sin modificar su forma; la posición de K quedará determinada por 3 parámetros x, y, θ como los que figuran en (8), siendo x, y un punto invariablemente ligado a K, y θ el ángulo que indica un giro alrededor de este punto. Teniendo dK el significado (8) y llamando n al número de puntos en que K corta a K_1 en cada posición (n es, pues, una función de x, y, θ), se demuestra la fórmula integral

$$\int n \, dK = 4 L L_1 \tag{11}$$

estando la integración extendida a todas las posiciones de K, siendo $n = 0$ para aquellas posiciones en que no tenga punto común con K_1.

Esta fórmula (11), sin la determinación del coeficiente 4, diciendo solamente que el valor medio de puntos comunes a K y a K_1 debía ser proporcional al producto de las longitudes, se encuentra en el Cálculo de Probabilidades de Poincaré [12, pág. 143] para el caso de curvas situadas sobre la superficie de la esfera pero con razonamiento que vale igualmente para el plano, y por esto se ha llamado *fórmula de Poincaré*. Exactamente en la forma (11) fué dada por primera vez en [20]. Otra demostración puede verse en [16]. Estas primeras demostraciones suponían ciertas condiciones de regularidad para las curvas K, K_1; para el caso de suponer para K, K_1 únicamente la condición de ser rectificables, la demostración de (11) fué dada por W. Maak [43].

En el caso particular en que K es una circunferencia de radio r, se puede tomar como punto x, y invariablemente ligado con ella, el centro, y entonces en cada posición del mismo el ángulo θ que figura en la expresión de dK puede variar de 0 a 2π, sin que cambie el número n de puntos de intersección con K_1. La fórmula (11), sustituyendo $L = 2\pi r$, se puede escribir en este caso en la forma simple

$$\int n\, dx\, dy = 4 L_1 r. \qquad (12)$$

Es decir, dada en el plano una curva rectificable de longitud L_1, y llamando n al número de puntos de intersección de la misma con una circunferencia de centro el punto x, y y de radio r, tiene lugar la fórmula (12), en la cual se supone la integración extendida a todo el plano.

Esta fórmula (12) se ha generalizado a un espacio de cualquier número de dimensiones, suponiendo en él una curva rectificable de longitud L_1 y una hiperesfera de radio r [64].

Otra fórmula fundamental de la geometría integral del plano es la siguiente. Sean ahora K, K_1 dos curvas convexas cerradas que limitan respectivamente las áreas F y F_1; las longitudes sean, como antes, L, L_1. Suponiendo a K_1 fija y a K móvil a todas las posiciones en que la región que ella limita tenga algún punto común con la región que limita K_1, la medida cinemática del conjunto de todas estas posiciones se demuestra que vale

$$\int dK = 2\pi(F + F_1) + L L_1. \qquad (13)$$

Esta fórmula fué dada en [20]; otra demostración en [16].

Como aplicación de las fórmulas (11) y (13) se tiene la siguiente. Si K y K_1 son congruentes entre sí y llamamos M_i a la medida del conjunto de posiciones de K en las que tiene i puntos comunes con K_1, la (11) equivale a escribir

$$\sum i M_i = 4 L^2 \qquad (14)$$

y la (13)

$$\sum M_i = 4\pi F + L^2. \tag{15}$$

Siendo K y K_1 curvas cerradas, salvo posiciones especiales de contacto de medida cinemática nula, es $i = 2, 4, 6, \ldots$ y por tanto (14) se puede escribir

$$\sum M_i + 2M_4 + 3M_6 + \ldots\ldots = 2\,L^2$$

y por tanto, restando de esta igualdad la (15),

$$L^2 - 4\pi F = 2M_4 + 3M_6 + \ldots\ldots \geqslant 0. \tag{16}$$

Queda así demostrada la desigualdad isoperimétrica

$$L^2 - 4\pi F \geqslant 0,$$

que se cumple entre la longitud L y el área F de toda figura plana convexa. Si la curva no es convexa, tomando la curva convexa cerrada de longitud mínima que la contiene, se obtiene inmediatamente que también la desigualdad (16) es válida.

Se tiene de esta manera un ejemplo de como a partir de la medida de ciertos conjuntos de figuras congruentes y de fórmulas relacionadas con la misma, se pueden obtener resultados clásicos de las figuras convexas, completamente desligados en apariencia de aquellos conceptos. Para más detalles referentes a la demostración anterior y para otras demostraciones análogas de la desigualdad isoperimétrica, basadas en conceptos de Geometría Integral, ver [16], [61]. Un camino análogo ha servido para obtener ciertas propiedades de las curvas esféricas [65] y de las curvas sobre las superficies de curvatura constante negativa [68].

Otra fórmula curiosa de fácil obtención [20], [16, pág. 32], es la siguiente: supuestas las mismas curvas cerradas anteriores K, K_1 sean o no convexas, y llamando f al área de la región de plano común a ambas figuras en cada posición de K, se verifica

$$\int f\, dK = 2\pi F\, F_1 \tag{17}$$

estando la integración extendida a todas las posiciones posibles de K, entendiendo que cuando las regiones de plano limitadas por K y K_1 no tienen punto común, es $f = 0$.

Si K es un círculo de radio r, tomando como punto x, y que figura en (8) el centro, en cada posición se puede integrar $d\theta$ de 0 a 2π sin que varíe f, y poniendo $F = \pi r^2$, la fórmula (17) queda

$$\int f \, dx \, dy = \pi r^2 F_1 \tag{18}$$

extendida la integración a todo el plano x, y.

Es de observar la gran generalidad de este tipo de fórmulas. Suponiendo, por ejemplo, un triángulo cualquiera de área F_1, y llamando f al área que en cada posición del centro x, y un círculo de radio r tiene común con dicho triángulo (área rayada en la fig. 5), tiene lugar la fórmula (18), la cual, directamente, llevaría a largos desarrollos para ser calculada.

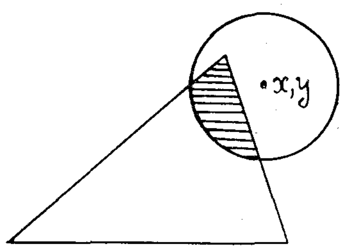

Fig. 5

La fórmula (13) supone que K y K_1 son curvas convexas. Se puede generalizar al caso en que K y K_1 son figuras cualesquiera, obteniéndose la llamada *fórmula fundamental de Blaschke*. Sean dos figuras simplemente conexas K, K_1 de áreas F, F_1 y limitadas por dos curvas cerradas únicas de longitudes L, L_1. Suponiendo a K_1 fija y a K móvil de manera indeformable, sea ν el número de regiones simplemente conexas de que se compone la intersección de ambas figuras para cada posición de K (en la fig. 6 es $\nu = 2$). La fórmula fundamental dice

$$\int \nu \, dK = 2\pi(F + F_1) + L L_1 \tag{19}$$

estando la integración extendida a todas las posiciones de K. Para el caso de ser K y K_1 convexas, es constantemente $\nu = 1$, y esta fórmula coincide con la (13).

Para la demostración de esta fórmula fundamental, que se puede escribir todavía de manera más general para figuras de cualquier conexión, ver Blaschke [16]. Para figuras limitadas por curvas cerradas con puntos dobles, hay que tener en cuenta ciertas convenciones de signo, pero también sigue siendo válida la (19); ver Ta-Jen Wu [42]. La fórmula fundamental (19) ha sido también generalizada para figuras situadas sobre la superficie de la esfera [16] y sobre las superficies de curvatura constante negativa o, lo que es equivalente, para la geometría no euclidiana hiperbólica [68].

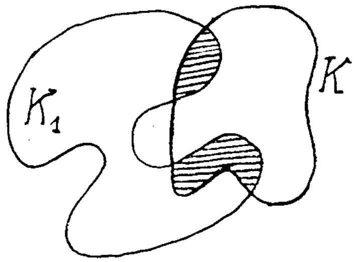

Fig. 6

Hemos pasado revista a algunos de los principales resultados de la Geometría Integral del plano. Todos ellos tienen su correspondiente generalización al espacio de 3 dimensiones y la mayoría también al espacio n-dimensional. Para lo primero citaremos nuestro trabajo [21]. Para la generalización de la fórmula fundamental (19) al espacio euclidiano de n dimensiones, ver [52].

Otras direcciones en que la Geometría Integral se ha desarrollado, junto con diversas aplicaciones, se pueden ver siguiendo los trabajos que citamos en la Bibliografía. Se han obtenido, por ejemplo, notables propiedades de las líneas y figuras planas o del espacio con respecto a determinadas redes de líneas que cubren el espacio o el plano respectivamente [55], [60], [62]. Este orden de ideas fué utilizado por Hadwiger [56] para la obtención de un límite superior del número de cuadrados o círculos de dimensión fijada, necesarios para cubrir una determinada región del plano, resultado que se ha generalizado también a E_n [69].

El estudio de las posiciones diversas de las figuras planas respecto redes de líneas del mismo plano, ha dado lugar a curiosos problemas de probabilidades geométricas y valores medios [31], [60]. Citemos, por ejemplo, el caso siguiente, que puede considerarse como una generalización del problema de la aguja de Buffon o del de Laplace [9, pág. 366].

Supongamos el plano dividido por dos haces de rectas paralelas, perpendiculares entre sí, formando rectángulos de lados a, b. Arrojando al azar sobre el plano un hilo de longitud constante L, pero cuya forma variará en general cada vez que se arroje sobre el plano, el *valor medio* del número de puntos de intersección del hilo con las rectas de la red de rectángulos vale

$$\bar{n} = \frac{2(a+b)L}{\pi ab}$$

En particular, si $a = b$, red de cuadrados, y se toma por ejemplo $L = 5a$, resulta $\bar{n} = 20 : \pi$. Como $\bar{n}$ se puede hallar experimentalmente, realizando la experiencia un número creciente de veces y dividiendo la suma total de puntos de intersección por el número de veces que se realiza la experiencia, se tiene, pues, un método para la determinación del número π al azar. Naturalmente que no es necesario que el hilo sea flexible, lo cual es el caso más general, sino que si se trata de un alambre indeformable o de una poligonal articulada, la fórmula anterior para el valor medio $\bar{n}$ sigue siendo válida.

Si se consideran los *vértices* de la red anterior de rectángulos y se arroja al azar sobre el plano una figura plana de forma cualquiera y área F, el *número medio* de vértices que quedan cubiertos por dicha figura es

$$\bar{n} = \frac{F}{ab}$$

Por ejemplo, si se consideran en el plano todos los puntos de coordenadas enteras correspondientes a un sistema cartesiano rectangular, y se arroja al azar un disco circular de radio unidad, el valor medio del número de puntos cubiertos por este disco, resulta ser $n = \pi$. También este es un método para la determinación por el azar del número π.

7. Conclusión. En contraposición a la Geometría Infinitesimal, que estudia las propiedades infinitesimales o "en pequeño" de las figuras geométricas, por Geometría Integral debe entenderse la reunión de razonamientos y propiedades referentes a las figuras geométricas consideradas en su totalidad o "en grande". Sin embargo, en la serie de trabajos en que Blaschke y su escuela han introducido y utilizado la denominación de Geometría Integral, ésta tiene un sentido más restrictivo. Podríamos decir, que se ha entendido por Geometría Integral el sistema de propiedades derivadas de la idea de "medida" de conjuntos de elementos geométricos. Si la "medida" de conjuntos es el fundamento de la teoría de la integral, cuando de esta medida se puedan deducir propiedades de índole geométrica, parece bien justificado dar, al conjunto de éstas, el nombre mixto de Geometría Integral.

Respecto a las perspectivas y relaciones con las demás ramas de la matemática, el recorrido precedente, si bien a grandes pasos, puede dar una idea. Teniendo en cuenta la elementalidad de los recursos puestos en juego y la parquedad de conocimientos necesarios, los resultados obtenidos no son despreciables: tal vez esta simplicidad misma en los métodos, que contrasta con la generalidad de los resultados, es la causa principal de la belleza de sus resultados y lo que más atrae y mueve la curiosidad para dedicarse a esta incipiente rama de la Geometría.

Instituto de Matemáticas,
Facultad de Ciencias Matemáticas
de la Universidad Nacional del Litoral.
Rosario, Rep. Argentina.

Luis A. SANTALÓ.

BIBLIOGRAFIA

Como obras y memorias clásicas citaremos:

[1] G. L. L. BUFFON: *Essai d'arithmétique morale*. Supplement à l'Histoire Naturelle, IV. París, 1777.

[2] A. CAUCHY: *Mémoire sur la rectification des courbes et la quadrature des surfaces courbes*. Mémoires de l'Académie des Sciences, t. XXII, pág. 3. París, 1850. (Oeuvres complètes, série I, t. II, pág. 167. París, 1908).

[3] M. W. CROFTON: *On the theory of local probability*. Transactions of the Royal Society of London, vol. 158, pág. 181-199. 1868.

[4] M. W. CROFTON: *Geometrical theorems related to mean values*. Proceedings of the London Mathematical Society, vol. 8, pág. 304-309. 1877.

[5] M. W. CROFTON: Artículo correspondiente a la palabra "*Probability*" en la Enciclopedia Británica, novena edición, vol. 19. 1885.

[6] J. A. SERRET: *Sur un problème de calcul intégral*. Annales de l'École Normal Supérieure, vol. 6, pág. 177-185. París, 1869.

[7] E. CARTAN: *Le principe de dualité et certaines intégrales multiples de l'espace tangentiel et de l'espace reglé*. Bulletin de la Société Mathématique de France, vol. 24, pág. 140-177. París, 1896.

[8] H. LEBESGUE: *Exposition d'un mémoire de M. W. Crofton*. Nouvelles Annales de Mathématiques, 4e. série, vol. 12, pág. 481-502. París, 1912.

Como libros que hacen referencia a la teoría de Probabilidades Geométricas citaremos como principales:

[9] P. S. LAPLACE: *Théorie analytique des probabilités*. París, 1812. (Oeuvres complètes, tomo VII).

[10] E. CZUBER: *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte*. Leipzig, 1884.

[11] J. BERTRAND: *Calcul des Probabilités*. París, 1889.

[12] H. POINCARÉ: *Calcul des Probabilités*, Cap. VII. París, 1912.

[13] G. CASTELNUOVO: *Calcolo delle Probabilitá*, Cap. VIII. Milano-Roma-Napoli, 1919.

[14] R. DELTHEIL: *Probabilités Géométriques*. París, 1926.

[15] J. V. USPENSKY: *Introduction to Mathematical Probability*, Cap. XII. New York and London, 1937.

Bajo el título de Geometria·Integral, la obra fundamental es

[16] W. BLASCHKE: *Vorlesungen über Integralgeometrie*. Hamburger Mathematische Einzelschriften, Vol. 20 y 22. Leipzig-Berlin, 1936-1937.

y las memorias aparecidas bajo el mismo título son:

[17] W. BLASCHKE: *Integralgeometrie 1, Ermittelung der Dichten für lineare Unterräume im E_n*. Actualités Scientifiques et Industrielles Nº 252. Hermann & Cie., París, 1935.

[18] W. BLASCHKE: *Integralgeometrie 2, Zur Ergebnissen von M. W. Crofton*, Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences, vol. 37, pág. 3-11, 1935.

[19] O. VARGA: *Integralgeometrie 3, Croftons Formeln für den Raum*. Mathematische Zeitschrift, 40, pág. 387-405. 1905.

[20] L. A. SANTALÓ: *Geometría Integral 4, Sobre la medida cinemática en el plano*. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität, 11, pág. 222-236. 1936.

[21] L. A. SANTALÓ: *Integralgeometrie 5, Ueber das kinematische Mass im Raum*. Actualités Scientifiques et Industrielles. Nº 357. Hermann & Cie., París, 1936.

[22] B. PETKANTSCHIN: *Integralgeometrie 6, Zusammenhänge zwischen den Dichten der linearen Unterräume im n-dimensionalen Raum*. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität, 11, pág. 249-319. 1936.

[23] L. A. SANTALÓ: *Geometría Integral 7, Nuevas aplicaciones del concepto de medida cinemática en el plano y en el espacio*. Revista de la Academia de Ciencias. Madrid, 1936.

[24] O. VARGA: *Integralgeometrie 8, Ueber Masse von Paaren linearer Mannigfaltigkeiten im projektiven Raum P_n*. Revista Matemática Hispano-Americana, 10. Madrid, 1936.

[25] W. BLASCHKE — O. VARGA: *Integralgeometrie 9, Ueber Mittelwerte an Eikörpern*. Mathematica, 12. Bukarest, 1936.

[26] W. BLASCHKE: *Integralgeometrie 10, Eine isoperimetrische Eigenschaft der Kugel*. Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences, 37, pág. 3-7. Bukarest, 1936.

[27] W. BLASCHKE: *Integralgeometrie 11, Zur Variationsrechnung*. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität, 11, pág. 359-366. 1936.

[28] W. BLASCHKE: *Integralgeometrie 12, Vollkommene optische Instrumente*. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität, 11, pág. 409-412. 1936.

[29] W. BLASCHKE: *Integralgeometrie 13, Zur Kinematik*. Mathematische Zeitschrift, vol. 41. 1936.

[30] W. BLASCHKE: *Integralgeometrie 14, Ein Gegenseitigkeitsgesetz der Optik*. Mathematische Annalen, vol. 113. 1936.

[31] L. A. SANTALÓ: *Geometria Integral 15, Fórmula fundamental de la medida cinemática para cilindros y planos paralelos móviles*. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität, vol. 12. 1936.

[32] A. MÜLLER: *Integralgeometrie 16, Dichten linearer Mannigfaltigkeiten im euklidischen und nichteuklidischen R_n*. Mathematische Zeitschrift, vol. 42, 1937.

[33] W. BLASCHKE: *Integralgeometrie 17, Ueber Kinematik*. Deltion. Atenas, 1937.

[34] W. MAAK: *Integralgeometrie 18, Grundlagen der ebenen Integralgeometrie*. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität, vol. 12. 1937.

[35] O. VARGA: *Integralgeometrie 19, Ueber Mittelwerte an Durchschnitten bewegter Flächen*. Mathematische Zeitschrift, vol. 41. 1936.

[36] W. BLASCHKE: *Integralgeometrie 20, Zur Elliptischen Geometrie*. Mathematische Zeitschrift, vol. 41. 1936.

[37] W. BLASCHKE: *Integralgeometrie 21, Ueber Schiebungen.* Mathematische Zeitschrift, vol. 42. 1937.

[38] W. BLASCHKE: *Integralgeometrie 22, Geschlossene Kurven und Flächen in der elliptischen Geometrie.* Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität, vol. 12, 1937.

[39] H. GERICKE: *Integralgeometrie 23, Ueber eine Ungleichung für gemischte Volumina.* Deutsche Mathematik, vol. 2. 1937.

[40] L. BERWALD — O. VARGA: *Integralgeometrie 24, Ueber Schiebungen im Raum.* Mathematische Zeitschrift, vol. 42. 1937.

[41] L. BERWALD: *Integralgeometrie 25, Ueber die Körper konstanter Helligkeit.* Mathematische Zeitschrift, vol. 42. 1937.

[42] TA-JEN WU: *Integralgeometrie 26, Ueber die kinematische Hauptformel.* Mathematische Zeitschrift, vol. 43. 1937.

[43] W. MAAK: *Integralgeometrie 27, Ueber stetige Kurven.* Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität, vol. 12. 1938.

[44] TA-JEN WU: *Integralgeometrie 28, Ueber elliptische Geometrie.* Mathematische Zeitschrift, vol. 43. 1938.

[45] W. MAAK: *Integralgeometrie 29, Oberflächenintegral und Stokes Formel im gewöhnlichen Raum.* Mathematische Annalen, vol. 116. 1939.

[46] W. BLASCHKE: *Geometria Integrale 30, Densitá negli spazi di Hermite.* Rendiconti Accademie Lincei, vol. 29. 1939.

[47] L. A. SANTALÓ: *Geometría Integral 31, Sobre valores medios y probabilidades geométricas.* Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität, vol. 13. 1940.

[48] L. A. SANTALÓ: *Géométrie Intégrale 32, Quelques formules intégrales dans le plan et dans l'espace.* Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität, vol. 13. 1940.

[49] H. RODE: *Integralgeometrie 33, Unitäre Integralgeometrie.* Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität, vol. 13, pág. 295-318. 1940.

Otras memorias relacionadas con las ideas de la Geometría Integral son:

[50] M. BALANZAT: *Généralisation de quelques formules de Géométrie Intégrale.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, tomo 210, pág. 596. Paris, 1940.

[51] M. BALANZAT: *Fórmulas integrales para la intersección de conjuntos.* Revista de la Unión Matemática Argentina, Publicación Nº 14. 1940.

[52] SHIING-SHEN CHERN — CHIH-TA YIEN: *Sulla formula principale cinematica dello spazio ad n dimensioni.* Bolletino della Unione Matematica Italiana, Serie II, Año II, pág. 434. 1940.

[53] SHIING-SHEN CHERN: *On Integral Geometry in Klein spaces.* Annals of Mathematics, Serie 2, vol. 43, pág. 178-189. 1942.

[54] E. GASPAR: *Fórmulas integrales referentes a la intersección de una figura plana con bandas variables.* Publicaciones del Instituto de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional del Litoral, vol. II, Nº 6. Rosario, 1940.

[55] H. HADWIGER: *Ueber Mittelwerte im Figurengitter.* Commentarii Mathematici Helvetici, vol. XI. 1939.

[56] H. HADWIGER: *Ueberdeckung ebener Bereiche durch Kreise und Quadrate.* Commentarii Mathematici Helvetici, vol. XIII. 1941.

[57] H. HADWIGER: *Bemerkungen über Gitter und Volumen.* Mathematica, vol. 18, pág. 97-103. 1942.

[58] ERNST PREISIG: *Ueber Bewegungsmittelwerte konvexer Körper in Gittern,* Commentarii Mathematici Helvetici, vol. XV. 1942.

[59] L. A. SANTALÓ: *Unos problemas referentes a probabilidades geométricas.* Revista Matemática Hispano-Americana, vol. XI. 1936.

[60] L. A. SANTALÓ: *Geometría integral de figuras ilimitadas.* Publicaciones del Instituto de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional del Litoral, vol. I, Nº 2. Rosario, 1939.

[61] L. A. SANTALÓ: *Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo*. Publicaciones del Instituto de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional del Litoral, vol. II, Nº 3. 1940.

[62] L. A. SANTALÓ: *Sur quelques problèmes de probabilités géométriques*. Tohoku Mathematical Journal, vol. 47. 1940.

[63] L. A. SANTALÓ: *Un esquema de valores medios en la teoría de probabilidades geométricas*. Revista de Ciencias, Año XLII. 1940.

[64] L. A. SANTALÓ: *A theorem and an inequality referring to rectifiable curves*. American Journal of Mathematics, vol. 63, pág. 635-644. 1941.

[65] L. A. SANTALÓ: *Algunos valores medios y desigualdades referentes a curvas situadas sobre la superficie de la esfera*. Revista de la Unión Matemática Argentina, vol. VIII. 1942.

[66] L. A. SANTALÓ: *Integralformulas in Crofton's style on the sphere and some inequalities referring to spherical curves*. Duke Mathematical Journal, vol. 9, pág. 707-722. 1942.

[67] L. A. SANTALÓ: *La desigualdad isoperimétrica sobre las superficies de curvatura constante negativa*. Revista de Matemáticas y Física teórica, vol. 3, pág. 243-259. Tucumán. 1942.

[68] L. A. SANTALÓ: *Integral Geometry on surfaces of constant negative curvature*. Duke Mathematical Journal, vol. 10, pág. 687-704. 1943.

[69] L. A. SANTALÓ: *Acotaciones para la longitud de una curva o para el número de puntos necesarios para cubrir aproximadamente un dominio*. Anais da Academia Brasileira de Ciencias, tomo XVI, pág. 111-121. 1944.

[70] O. VARGA: *Ueber die Integralinvarianten die zu einer Kurve in der Hermiteschen Geometrie gehören*. Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Iosephinae, Sectio Mathematicarum, tomo IX, pág. 88-102. 1938-1940.