UN INVARIANTE AFIN PARA LAS CURVAS CONVEXAS DEL PLANO

POR

L. A. Santaló

1. *Introducción.* Una recta G del plano puede determinarse por su distancia h a un punto fijo O, más el ángulo φ que la normal a la recta forma con una dirección fija del plano (la del eje Ox por ejemplo). En la teoría de probabilidades geométricas, para medir conjuntos de rectas se toma la integral, extendida al conjunto, de la forma diferencial $dh\,d\varphi$. Esta elección está justificada por ser esta medida la única, salvo un factor constante, que es invariante con respecto el grupo de los movimientos del plano (¹). A la expresión $dh\,d\varphi$ se le llama *densidad* para conjuntos de rectas. Si con esta densidad se calcula la *medida* del conjunto de rectas que cortan a una curva convexa cerrada, se obtiene la *longitud*, es decir, el invariante métrico más simple de la curva.

Si en lugar del grupo de los movimientos, consideramos otro grupo de transformaciones, la densidad anterior para conjuntos de rectas ya no es invariante; para cada grupo se presenta el problema que consiste en hallar una densidad de la forma $f(h, \varphi)\,dh\,d\varphi$ que sea invariante respecto las operaciones del grupo, densidad que a veces existirá y otras no.

Por ejemplo, respecto el grupo de las afinidades unimodulares del plano no existe una densidad invariante para conjuntos de rectas (²); por este camino no se puede, por tanto, generalizar el resultado métrico mencionado para obtener un invariante

(¹) R. Deltheil, *Probabilités géométriques*, Paris, 1926.

(²) S. S. Chern, *Sur les invariants intégraux en géométrie*, The Science Reports of National Tsiung Hua University, Serie A. Vol. IV, 1940.

afin de las curvas convexas correlativo a la longitud ordinaria. En cambio, si se considera el grupo de las centro-afinidades unimodulares del plano, es decir, de las afinidades de módulo uno que dejan un punto fijo, entonces existe una densidad para conjuntos de rectas, como veremos en n. 2. Con esta densidad, la medida de las rectas exteriores a una curva convexa que contiene al punto fijo, da un invariante centro-afin de la misma. De esta invariante se puede pasar a un invariante por afinidades unimodulares generales como veremos en los n. 4 y 5.

En el n. 6 se obtienen las desigualdades (6.8) y (6.9) que relacionan este invariante con el área ordinaria limitada por la curva convexa y la longitud afin de la misma.

2. *Densidad de rectas respecto el grupo centro-afin unimodular.* El grupo centro-afin unimodular es el representado por las ecuaciones

$$x' = a x + b y, \quad y' = p x + q y, \tag{2.1}$$

con la condición

$$a q - b p = 1. \tag{2.2}$$

Una recta G de ecuación

$$u x + v y + 1 = 0$$

se transformará por (2.1) en la recta G' de ecuación (poniendo el lugar de x', y' las coordenadas generales x, y)

$$u(q x - b y) + v(a y - p x) + 1 = 0$$

o sea

$$(q u - p v) x + (a v - b u) y + 1 = 0.$$

Es decir, los coeficientes u, v se transforman según las fórmulas

$$u' = qu - pv, \quad v' = av - bu.$$

Por tanto, teniendo en cuenta (2. 2),

$$du' \, dv' = \left| \frac{\partial(u',v')}{\partial(u,v)} \right| du \, dv = du \, dv.$$

Esto nos dice que la expresión diferencial $du\,dv$ es invariante por el grupo (2. 1). Como este grupo es transitivo respecto las rectas del plano (que no pasan por O), no puede existir otra expresión de la forma $f(u,v)\,du\,dv$ que goce de la misma propiedad, a no ser $f(u,v)$ =constante.

Por tanto, *la densidad de rectas respecto el grupo centro-afín unimodular es*

$$dG = du \, dv. \tag{2. 3}$$

En lugar de u, v, conviene introducir las coordenadas de recta h, φ, mencionadas en la introducción. Es

$$u = -\frac{\cos\varphi}{h}, \quad v = -\frac{\operatorname{sen}\varphi}{h}$$

de donde

$$du \, dv = \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(h,\varphi)} \right| dh \, d\varphi = \frac{dh \, d\varphi}{h^3}.$$

La densidad de rectas puede por tanto escribirse en la forma

$$dG = \frac{dh \, d\varphi}{h^3}. \tag{2. 4}$$

3. *Medida de las rectas exteriores a una figura convexa que contiene el origen.* Sea K una figura convexa que contiene el punto O en su interior. Utilizando la densidad (2. 4) vamos a hallar la medida de las rectas exteriores a K. Para cada dirección $\varphi(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$, sea $h = h(\varphi)$ la distancia de O a la recta de apoyo de K normal a la dirección φ ($h(\varphi)$ es la llamada *función de apoyo* de K con respecto el punto interior O). Integrando (2. 4) se tiene

$$\int\limits_{G.K=0} dG = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_h^{\infty} \frac{dh}{h^3} = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^2}. \tag{3.1}$$

Este resultado se puede enunciar:

Dada una figura convexa K y un punto interior $O(\xi, \eta)$, la medida de las rectas exteriores a K, invariante con respecto las afinidades unimodulares que dejan fijo el punto O, esta dada por la integral

$$I(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^2} \tag{3.2}$$

siendo $h = h(\varphi)$ la función de apoyo de K con respecto O.

Esto nos dice que $I(\xi, \eta)$ tendrá el mismo valor para todas las figuras transformadas de K por una afinidad unimodular que deje fijo $O(\xi, \eta)$. Por ejemplo, si K es una elipse y O siempre el centro, la integral (3.2) tendrá el mismo valor para todas las elipses de la misma área, en particular, para el círculo de igual área. Si los semiejes de la elipse son a, b resulta por tanto $I = \pi/ab$.

4. *Estudio de la función* $I(\xi, \eta)$. El valor de $I(\xi, \eta)$, dado por (3.2) depende evidentemente del punto $O(\xi, \eta)$. Cuando O está sobre el contorno de K vale infinito, mientras que para todo punto O interior tiene un valor finito y positivo. Vamos a buscar los puntos interiores $O(\xi, \eta)$ para los cuales $I(\xi, \eta)$ toma un valor estacionario (es decir, se anulan sus derivadas parciales primeras).

Sea O_0 un punto fijo interior a K que tomamos como origen de coordenadas; sea $H = H(\varphi)$ la función de apoyo de K respecto O_0. La función de apoyo $h = h(\varphi)$ respecto $O(\xi, \eta)$ será

$$h = H - \xi \cos \varphi - \eta \operatorname{sen} \varphi \tag{4.1}$$

y por tanto

$$I(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(H - \xi \cos \varphi - \eta \operatorname{sen} \varphi)^2}.$$

Para que $I(\xi, \eta)$ tenga un valor estacionario debe ser

$$\frac{\partial I}{\partial \xi} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{(H - \xi\cos\varphi - \eta\operatorname{sen}\varphi)^3} = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial \eta} = \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\varphi \, d\varphi}{(H - \xi\cos\varphi - \eta\operatorname{sen}\varphi)^3} = 0, \tag{4.2}$$

o sea, deben cumplirse las condiciones

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{h^3} = 0, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\varphi \, d\varphi}{h^3} = 0. \tag{4.3}$$

Observemos que es

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} = 3 \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi \, d\varphi}{(H - \xi\cos\varphi - \eta\operatorname{sen}\varphi)^4} = 3 \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi \, d\varphi}{h^4} \tag{4.4}$$

y análogamente

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \xi \, \partial \eta} = 3 \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \, d\varphi}{h^4}, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial \eta^2} = 3 \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi}{h^4} \tag{4.5}$$

y por tanto, según la desigualdad de *Schwarz* (en la cual el signo $=$ no puede valer en este caso pues las funciones $\operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi$ no difieren en un factor constante), es

$$\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \xi \, \partial \eta}\right)^2 - \frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 I}{\partial \eta^2} < 0. \tag{4.6}$$

Esto nos dice que *todos los puntos estacionarios de la función* $I(\xi, \eta)$ *son mínimos.*

La superficie $z = I(\xi, \eta)$ definida en el interior de K tiene una sola hoja (puesto que $I(\xi, \eta)$ es uniforme) que se extiende al infinito únicamente sobre el contorno de K. Por tanto si ella tuviera más de un mínimo relativo, debería tener también otros puntos estacionarios no mínimos, contra lo que acabamos de demostrar (3).

En consecuencia:

Existe un solo punto interior a K para el cual $I(\xi, \eta)$ toma un valor mínimo (que será el mínimo absoluto), el cual está caracterizado por cumplirse en él las condiciones (4. 3) (4).

Por ejemplo, si K tiene centro de simetría las condiciones (4. 3) se cumplen evidentemente para él y por tanto: *para las figuras convexas con centro de simetría, el mínimo de $I(\xi, \eta)$ corresponde al centro de simetría.*

5. *Un invariante afin de las figuras convexas planas.* Si en vez de considerar afinidades que dejen fijo el punto O consideramos afinidades unimodulares generales (5), el valor de $I(\xi, \eta)$ correspondiente a K será igual al valor $I(\xi', \eta')$ correspondiente a la figura transformada K', si ξ', η' es el punto transformado de ξ, η. Por tanto el mínimo de $I(\xi, \eta)$ para K, coincidirá con el mínimo de $I(\xi', \eta')$ para K'. Es decir:

El mínimo de $I(\xi, \eta)$, que representaremos por I_m, es un invariante de K con respecto el grupo de las afinidades unimodulares.

Para el caso de las figuras convexas con centro de simetría, I_m se calcula inmediatamente por (3. 2) tomando co-

(3) La superficie $s = I(\xi, \eta)$, supuesta cerrada en el infinito tiene la conexión de la esfera. Por tanto entre el número de sus mínimos relativos m, máximos relativos M y puntos de ensilladura (*sattelpunkts*) s, existe la relación

$$-m + s - M = -2.$$

Como, según lo demostrado, debe ser $s = 0$ y $M = 1$ (en el infinito) resulta $m = 1$ como afirmamos. Ver, por ej. M. Morse, *Relations between the critical points of a real function of n independent variables*, Transactions on the American Mathematical Society, vol. 27, 1925.

(4) Sería interesante ver si este punto único ξ, η para el cual $I(\xi, \eta)$ es mínimo coincide o no con el *centro de gravedad* de K supuesta esta figura cubierta con masa homogénea. No hemos podido delucidar este asunto.

(5) Es decir, definidas por las ecuaciones

$$x' = ax + by + c, \quad y' = px + qy + r$$

con $aq - bp = 1$.

mo origen $O(\xi, \eta)$ para definir la función de apoyo $h = h(\varphi)$ el centro de simetría. Se obtiene así, por ejemplo, que para un polígono regular de $2n$ lados el invariante I_m vale

$$I_m = \frac{2n}{R^2} \tan \frac{\pi}{2n} \tag{5.1}$$

siendo R el radio del círculo circunscripto. Si se quiere introducir el área F del polígono (que es también invariante por afinidades unimodulares) resulta

$$I_m = \frac{4n^2}{F} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2n}. \tag{5.2}$$

6. *Relaciones entre I_m y otros invariantes afines.* Los invariantes afines más simples de las figuras convexas son el *área ordinaria* F (6) y la *longitud afin* L_a de su contorno (7). Queremos ver que relaciones hay entre los invariantes I_m, F, L_a. Para ello es fundamental observar que el valor de I_m está dado por (3.2) cuando se satisfacen las relaciones (4.3). Esto permite utilizar el mecanismo empleado por Blaschke en cuestiones análogas (8).

Consideremos la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = \int_0^\varphi \frac{\cos\varphi}{h^3} d\varphi, \quad y = \int_0^\varphi \frac{\operatorname{sen}\varphi}{h^3} d\varphi \tag{6.1}$$

la cual será una curva cerrada, según (4.3). La curvatura $\varkappa$ de esta curva vale

$$\varkappa = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = h^3 \tag{6.2}$$

(6) Siempre que se habla de invariante afin, se entiende respecto a afinidades unimodulares, o sea, afinidades que conservan las áreas.

(7) Ver. W. Blaschke, *Differentialgeometrie* II, Cap. 1, Berlin, 1923.

(8) W. Blaschke, *Ueber affine Geometrie VII: Neue Extremeigenschaften von Ellipse und Ellipsoid*, Leipziger Berichte, 69. 1917.

y por tanto es en todo punto $\varkappa > 0$; por consiguiente la curva (6. 1) es convexa. La representaremos, indistintamente a ella y al recinto convexo que limita, por K^0. Su elemento de arco vale

$$ds^0 = (x'^2 + y'^2)^{1/2}\, d\varphi = \frac{1}{h^3}\, d\varphi. \tag{6. 3}$$

La longitud afin $L_a{}^0$ de K^0 es, por definición (9),

$$L_a{}^0 = \int \sqrt[3]{\varkappa}\; ds^0 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^2} = 2\, I_m. \tag{6. 4}$$

Por otra parte, el área mixta de Minkowski entre K^0 y K es también

$$F(K^0, K) = \frac{1}{2} \int h\, ds^0 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^2} = I_m. \tag{6. 5}$$

Entre el área F^0 y la longitud afin $L_a{}^0$ de K^0 vale la siguiente desigualdad de *Blaschke* (10)

$$8\,\pi^2 F^0 - (L_a{}^0)^3 \geqq 0 \tag{6. 6}$$

y entre el área mixta $F(K^0, K)$ y las áreas F^0, F de dos figuras convexas vale la desigualdad de Minkowski

$$(F(K^0, K))^2 - F F^0 \geqq 0. \tag{6. 7}$$

Teniendo en cuenta (6. 4) y (6. 5), eliminando F^0 entre (6. 6) y (6. 7) se obtiene

$$I_m F \leqq \pi^2 \tag{6. 8}$$

y aplicando la desigualdad general (6. 6) a K y teniendo en cuenta (6. 8) resulta

---

(9) Ver. BLASCHKE, *Differentialgeometrie II*, pág. 32.

(10) W. BLASCHKE, *Differentialgeometrie II*, pág. 61.

$$I_m L_a^3 \leqq 8\pi^4. \tag{6.9}$$

Es inmediato comprobar que para el caso de ser K un círculo (y por tanto para cualquier elipse) en (6.8) y (6.9) valen los signos de igualdad. Además se sabe que en (6.6) el signo de igualdad vale únicamente para las elipses. Por tanto se puede enunciar:

Entre el invariante I_m, el área ordinaria F y la longitud afin L_a de una figura convexa K tienen lugar las desigualdades (6.8) *y* (6.9), *en las cuales el signo* = *vale únicamente para el caso de ser K una elipse.*

BUENOS AIRES, INSTITUTO MATEMÁTICO DE LA UNIVERSIDAD.
LA PLATA, FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS.