ALGUNAS DESIGUALDADES ENTRE LOS ELEMENTOS DE UN TRIANGULO

I. — Desigualdades entre el perímetro y la suma de las alturas, bisectrices o medianas de un triángulo.

En esta primera parte vamos a tratar el problema siguiente:

Se da el perímetro $2p = a + b + c$ *de un triángulo. Encontrar los límites inferior y superior de las sumas:* 1° $h_a + h_b + h_c$ *de las alturas,* 2° $\beta_A + \beta_B + \beta_C$ *de las bisectrices,* 3° $m_a + m_b + m_c$ *de las medianas.*

Este problema geométrico, que se relaciona analíticamente con el de hallar los valores extremos de funciones de varias variables, se propone en este mismo número en la sección de « Ejercicios y Problemas » por sugestión del Dr. Sergio Sispanov, Catedrático de la Facultad de Ciencias de Asunción (Paraguay) y, como el lector podrá darse cuenta, presenta dificultades para ser resuelto completamente por los métodos corrientes del cálculo infinitesimal. En esta pequeña nota vamos a mostrar cómo, encarando este y otros problemas análogos por medio de un análisis geométrico preliminar, puede obtenerse la completa solución sin el recurso de métodos analíticos, resultando, de paso, algunos teoremas interesantes.

1. Desigualdad entre el perímetro y la suma de las alturas. — Recordemos primero una desigualdad que será útil en lo sucesivo. Dados tres números positivos x, y, z se verifica

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{3(x + y + z)} \qquad [1]$$

valiendo el signo igual únicamente en el caso de ser $x = y = z$. En efecto, de la desigualdad evidente $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ se deduce $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, lo cual constituye el conocido teorema de que la media aritmética entre dos números es igual o mayor que la media geométrica, valiendo únicamente la igualdad cuando los dos números son iguales. Escribiendo esta desigualdad para todas las combinaciones entre x, y, z se tiene

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}, \quad \sqrt{yz} \leq \frac{y+z}{2}, \quad \sqrt{xz} \leq \frac{x+z}{2} \qquad [2]$$

de donde, sumando

$$\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{xz} \leq x + y + z.$$

Multiplicando ambos miembros de esta desigualdad por 2 y añadiendo la suma $x + y + z$ queda

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 \leq 3\,(x + y + z), \qquad [3]$$

de donde, extrayendo la raíz cuadrada, resulta [1].

Puesto que en [2] los signos de igualdad valen únicamente cuando x, y, z son iguales, de la demostración anterior se deduce que también en [1] el signo $=$ valdrá únicamente para el caso de ser $x = y = z$, como habíamos dicho.

Pasemos ahora al problema de hallar el máximo de la suma de las alturas dado el perímetro de un triángulo.

Es bien conocida la fórmula siguiente para el área S de un triángulo

$$S = \sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)} \qquad [4]$$

y como además

$$2\,S = ah_a = bh_b = ch_c\,,$$

resulta

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}\,. \qquad [5]$$

Pero

$$\begin{aligned} 4\,(p - b)\,(p - c) &= (2\,p - 2\,b)\,(2\,p - 2\,c) = \\ &= (a - (b - c))\,(a + (b - c)) = a^2 - (b - c)^2 \leq a^2, \end{aligned}$$

y por tanto, de [5] se deduce

$$h_a \leq \sqrt{p\,(p - a)}\,. \qquad [6]$$

Sumando las expresiones análogas para h_b y h_c se obtiene

$$h_a + h_b + h_c \leq \sqrt{p}\,(\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}) \qquad [7]$$

y según la desigualdad [1]

$$h_a + h_b + h_c \leq \sqrt{p}\,\sqrt{3\,(3\,p-a-b-c)} = \sqrt{3}\,p. \qquad [8]$$

El signo = valdrá únicamente, según se dijo para [1], cuando $p-a = p-b = p-c$, o sea, cuando el triángulo sea equilátero.

En resumen, como las alturas son siempre números positivos, se puede escribir

$$0 \leq h_a + h_b + h_c \leq \sqrt{3}\,p. \qquad [9]$$

La igualdad $h_a + h_b + h_c = 0$ vale para cualquier triángulo reducido a un segmento y un punto interior como tercer vértice. La igualdad $h_a + h_b + h_c = \sqrt{3}\,p$ vale únicamente para el triángulo equilátero. De otra manera: *entre todos los triángulos de perímetro dado, el equilátero es el que tiene máxima suma de alturas.*

2. Desigualdades entre el perímetro y la suma de las bisectrices. — El valor de la bisectriz β_A en función de los lados es

$$\beta_A = \frac{2}{b+c}\sqrt{pbc\,(p-a)} \qquad [10]$$

y como ya recordamos que la media aritmética es siempre igual o mayor que la geométrica, o sea $\dfrac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$, resulta

$$\beta_A \leq \sqrt{p\,(p-a)}.$$

Se tiene pues

$$\beta_A + \beta_B + \beta_C \leq \sqrt{p}\,(\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}),$$

que es análoga a la [7]. Como antes, vale por tanto la desigualdad

$$\beta_A + \beta_B + \beta_C \leq \sqrt{3}\,p \qquad [11]$$

donde la igualdad vale únicamente para $a = b = c$, o sea, para el triángulo equilátero.

Para obtener una acotación inferior de la suma de las bisectrices observemos que llamando a_1, a_2 a los dos segmentos en que divide al lado a y escribiendo que en todo triángulo un lado es igual o mayor que la diferencia entre los otros dos, se tiene:

$$\beta_A \geq b - a_1 \quad , \quad \beta_A \geq c - a_2, \qquad [12]$$

de donde, sumando,

$$2\,\beta_A \geq b + c - a.$$

Escribiendo las desigualdades análogas para β_B y β_C y sumando, se obtiene

$$2\,(\beta_A + \beta_B + \beta_C) \geq a + b + c = 2\,p. \qquad [13]$$

Para que valga el signo igual es necesario que en [12] sea $\beta_A = b - a_1$ y $\beta_A = c - a_2$, lo cual exige que el triángulo se reduzca al caso límite de un triángulo isósceles cuyo ángulo desigual A se reduce a cero. En este caso la longitud de la bisectriz del ángulo A es gual a p y las otras dos son cero; por tanto sale efectivamente la igualdad en [13].

Juntando [11] y [13] se obtiene

$$p \leq \beta_A + \beta_B + \beta_C \leq \sqrt{3}\,p, \qquad [14]$$

que se puede enunciar: *entre todos los triángulos de perímetro dado el triángulo equilátero es el que tiene máxima suma de bisectrices interiores y el caso límite de un triángulo isósceles cuyo ángulo desigual se reduce a cero es el que tiene mínima dicha suma.*

Ocurre preguntar qué ocurrirá si en lugar de las bisectrices interiores se consideran las exteriores. Desde luego, dado el perímetro, la suma de las bisectrices exteriores no puede estar acotada superiormente, pues basta tomar un triángulo equilátero o tan sólo isósceles para obtener una suma infinita.

En cuanto al límite inferior, es fácil ver que es cero. En efecto, consideremos el triángulo aplastado formado por 3 puntos en línea recta; sea C el vértice interno al segmento $A\,B$. Las longitudes de las bisectrices exteriores correspondientes a los vértices externos A, B han tendido a cero, puesto que su dirección límite es perpendicular a $A\,B$. En cuanto a la bizectriz exterior correspondiente al vértice C, su pie C' tiende al punto conjugado armónico de C respecto al par A, B; su longitud es, pues, CC', la cual puede hacerse tan pequeña como se quiera con hacer que C tienda a B.

3. Desigualdades entre el perímetro y la suma de las medianas. — Observemos que prolongando la mediana $MA = m_a$ de un segmento $MA' = m_a$ resulta un paralelogramo $ABA'C$ (fig. 1), Siendo $AA' = 2m_a$, $AC = b$ y $CA' = c$, se tendrá

$$2\, m^a \leq b + c. \qquad [15]$$

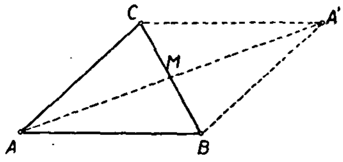

Fig. 1.

Escribiendo las desigualdades análogas para m_b, m_c y sumando se obtiene, después de dividir por 2,

$$m_a + m_b + m_c \leq 2\, p. \qquad [16]$$

Para que valga el signo igual es necesario, según [15], que B y C estén sobre AM, es decir, que los 3 vértices estén en línea recta. En este caso, si suponemos por ejemplo que C es interno al segmento AB y seguimos llamando a, b, c a los lados, es $c = a + b$, y suponiendo que $b > a$, las medianas valen $m_a = b + \frac{a}{2}$, $m_b = a + \frac{b}{2}$, $m_c = b - \frac{c}{2} = \frac{b - a}{2}$. Por tanto, $m_a + m_b + m_c = 2\, b + a = b + c$ y para que esta suma sea igual a $2p$ es necesario que $a = 0$. Es decir, la igualdad en [16] vale únicamente para el caso límite de un triángulo isósceles cuyo ángulo no igual tiende a cero.

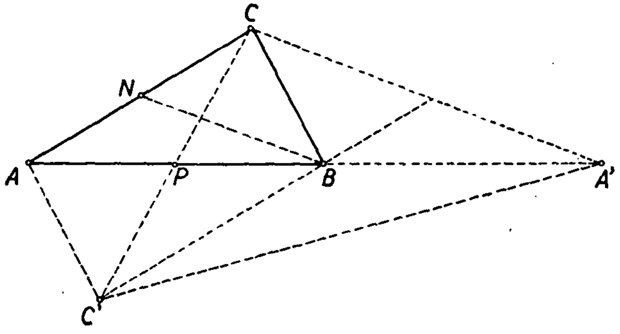

Fig. 2.

Para hallar una acotación inferior de la suma de las medianas, recordemos una construcción muy utilizada en la resolución de problemas de geometría elemental. Si a partir del triángulo ABC trazamos CA' paralela a la mediana $m_b = BN$ y prolongamos la mediana $CP = m_c$ un segmento $PC' = m_c$ (fig. 2) tendremos el triángulo $CC'A'$ que tiene la propiedad de tener por lados $2m_a$, $2m_b$, $2m_c$ y por medianas $\frac{3}{2}c$, $\frac{3}{2}b$, $\frac{3}{2}a$. Aplicando a este nuevo triángulo la desigualdad [16] se tiene

$$\frac{3}{2}(a+b+c) \leq 2(m_a+m_b+m_c), \qquad [17]$$

y por tanto, simplificando y juntando con [15],

$$\frac{3}{2}p \leq m_a+m_b+m_c \leq 2p. \qquad [18]$$

La igualdad $m_a+m_b+m_c = \frac{3}{2}p$, según lo dicho para la desigualdad [16], valdrá únicamente cuando el triángulo $CC'A'$ se reduzca al caso límite de un triángulo isósceles cuyo ángulo desigual tiende a cero, lo cual significa que el triángulo ABC se reduce al caso límite de un triángulo isósceles en que el ángulo desigual tiende a 180°.

En resumen: *entre todos los triángulos de perímetro dado la máxima suma de medianas corresponde al caso límite de un triángulo isósceles cuyo ángulo desigual tiende a cero, y la mínima suma de medianas al caso límite de un triángulo isósceles cuyo ángulo desigual tiende a* 180°.

II. — Desigualdades entre el área y la suma de los lados, medianas o alturas.

1. Desigualdad entre el perímetro y el área. — De la expresión [4] y recordando que el producto de 3 factores de suma constante es máximo cuando los 3 factores son iguales [1], se deduce la propiedad bien conocida de que para un perímetro dado el área máxima corresponde al triángulo equilátero.

Llamando $2p$ al perímetro y S al área, para el triángulo equilátero es $S = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2p}{3}\right)^2$; por tanto, en general, será

$$\frac{\sqrt{3}}{36}(a+b+c)^2 \geq S, \qquad [19]$$

valiendo el signo $=$ únicamente para el triángulo equilátero.

[1] Ver, por ejemplo, *Mathematicae Notae*, Año 1°, pág. 153

2. Desigualdad entre la suma de las medianas y el área. — En la construcción indicada en la fig. 2, el triángulo $CC'A'$, cuyos lados son $2m_a$, $2m_b$, $2m_c$, tiene por área $3S$, puesto que, en efecto, el triángulo primitivo ABC es equivalente a cada uno de los triángulos BCC', $BC'A'$, y BCA'. Por tanto, dada la suma de las medianas del triángulo ABC y por tanto el perímetro del triángulo $CC'A'$, el área de este último $3S$ será máxima cuando sea equilátero, o sea, cuando $m_a = m_b = m_c$. Luego el área S será también máxima para $m_a = m_b = m_c$, o sea, cuando el triángulo ABC sea equilátero. Es decir: *dada la suma de las medianas, el triángulo de mayor área es el equilátero.*

Para el triángulo equilátero se calcula fácilmente que es $S = \frac{\sqrt{3}}{3} m_a^2$. Por tanto, en general será

$$\frac{\sqrt{3}}{27}(m_a + m_b + m_c)^2 \geq S, \qquad [20]$$

donde el signo = vale únicamente para el triángulo equilátero.

3. Caso de dar la suma de las alturas. — Dado el perímetro o bien dada la suma de las medianas hemos visto que el área S quedaba acotada; ¿ocurrirá lo mismo al dar la suma de las alturas? Vamos a ver que no. Se verifica: *para una suma de alturas dada, el área del triángulo puede ser tan grande como se quiera.*

En efecto, tomemos un triángulo isósceles cuyo ángulo desigual valga $\pi - \theta$, y los lados iguales sean a. La suma de las 3 alturas vale

$$h_a + h_b + h_c = 2a \operatorname{sen} \theta + a \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$$

y, según esto, el área S se puede escribir en la forma

$$S = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sen} \theta = \frac{(h_a + h_b + h_c)^2 \operatorname{sen} \theta}{2\left(2 \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}\right)^2}.$$

Esta expresión, manteniendo fija la suma $h_a + h_b + h_c$, tiende a infinito cuando θ tiende a cero.

III. — Otras desigualdades.

1. Desigualdad entre la suma de los cuadrados de las alturas y la suma de los cuadrados de los lados. — Queremos demostrar que en todo triángulo se verifica

$$\frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \geq h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \qquad [21]$$

valiendo el signo $=$ únicamente para el triángulo equilátero.

Sea AH la altura h_a y pongamos $a_1 = HB$, $a_2 = HC$ tomados ambos segmentos en valor absoluto. Será

$$h_a^2 = b^2 - a_2^2 \ , \ h_a^2 = c^2 - a_1^2$$

de donde

$$2\,h_a^2 = b^2 + c^2 - (a_1^2 + a_2^2). \qquad [22]$$

Si el punto H cae dentro del lado $B\,C$, tengamos en cuenta la desigualdad

$$a_1^2 + a_2^2 \geq \frac{1}{2}(a_1 + a_2)^2 = \frac{1}{2}a^2 \qquad [23]$$

que equivale a $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$ y en la cual, por tanto, solamente vale el signo igual para el caso de ser $a_1 = a_2$.

Si H cae fuera del lado $B\,C$, con mayor razón

$$a_1^2 + a_2^2 \geq \frac{1}{2}(a_1 - a_2)^2 = \frac{1}{2}a^2. \qquad [24]$$

En ambos casos, de [22] se deduce

$$2\,h_a^2 \leq b^2 + c^2 - \frac{1}{2}a^2.$$

Escribiendo las desigualdades análogas para h_b, h_c y sumando se obtiene la desigualdad [21] que queríamos demostrar. Según lo dicho, el signo $=$ valdrá únicamente cuando los pies de las alturas dividan a los 3 lados en partes iguales, lo cual exige que el triángulo sea equilátero.

2. DESIGUALDAD ENTRE EL ÁREA Y LA SUMA DE LOS CUADRADOS DE LOS LADOS O DE LAS MEDIANAS. — Queremos demostrar las desigualdades

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\, S \qquad [25]$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geqq 3\sqrt{3}\, S, \qquad [26]$$

para las cuales el signo = vale únicamente para el triángulo equilátero.

La primera es una desigualdad muy conocida llamada de WEITZENBOCK (1). Ambas desigualdades se deducen inmediatamente de [19] y [20], respectivamente, observando que la desigualdad [1], poniendo $x = \xi^2$, $y = \eta^2$, $z = \zeta^2$ se puede escribir

$$(\xi + \eta + \zeta)^2 \leq 3\,(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2), \qquad [27]$$

valiendo el signo = únicamente cuando $\xi = \eta = \zeta$.

Aplicando [27] a [19] resulta [25] y aplicándola a [20] resulta [26].

LUIS A. SANTALÓ.

---

(1) WEITZENBOCK: « Ueber eine Ungleichung in der Dreiecksgeometrie », *Mathematische Zeitschrift*, 5 (1919). Para una generalización de esta desigualdad ver: D. PADOE: « An inequality for two triangles », *Proc. Cambridge Philosophical Soc.*, Vol. 38 (1942).