PROPIEDADES DE LAS FIGURAS CONVEXAS SOBRE LA ESFERA

INTRODUCCIÓN.

Supongamos la superficie esférica de radio unidad. Una curva cerrada situada sobre esta superficie se dice que es una *curva convexa*, cuando no puede ser cortada por un círculo máximo en más de dos puntos.

Toda curva convexa puede estar contenida en una semiesfera. Para verlo basta, en efecto, considerar un círculo máximo tangente en un punto en que no atraviese a la curva; este círculo máximo, no pudiendo tener con la curva más de dos puntos comunes, no puede penetrar de nuevo en el interior de la misma y por lo tanto la deja toda ella en una semiesfera.

Por consiguiente, de las dos regiones en que una curva convexa divide a la superficie esférica, hay siempre una de área igual o menor que una semiesfera. Esta región, junto con la curva que la limita, se dice que constituye una *figura convexa*.

Se llama *círculo máximo de apoyo* de una figura convexa K a todo círculo máximo que tiene algún punto común con K sin atravesarla, es decir, dejándola toda de un mismo lado. Los círculos máximos tangentes al contorno de K son círculos máximos de apoyo, pero la definición de estos últimos es más general, pues comprende, por ejemplo, a los círculos máximos que pasan por los puntos angulosos del contorno de K sin atravesar a la figura. Por todo punto del contorno de K pasa, por lo menos, un círculo máximo de apoyo.

Interesan las siguientes definiciones, análogas a las comúnmente empleadas para las figuras convexas planas (1):

(1) Para lo referente a figuras convexas planas se puede ver BONNESEN-FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Berlín, 1934. A este libro nos referiremos en lo sucesivo con solo

Longitud o perímetro L de una figura convexa es la longitud de la curva que constituye su contorno. Suponiendo la esfera de radio unidad, la longitud de cualquier figura convexa sobre la misma es siempre igual o menor que un círculo máximo, o sea, $L \leqq 2\pi$.

Area F de una figura convexa es el área de la región limitada por una curva convexa. Se entiende siempre la región que es menor que una semiesfera y por tanto $F \leqq 2\pi$.

Diámetro D es la distancia máxima entre dos puntos de la figura convexa, medida por la longitud del arco de círculo máximo que los une. Esta distancia es siempre igual o menor que medio círculo máximo, o sea, $D \leqq \pi$.

Espesor E, es el elemento «dual» del diámetro. Consideremos el ángulo que forman dos círculos máximos que no cortan a la figura convexa y que forman un huso que contiene a la misma. El mínimo de todos estos ángulos, o sea, el ángulo correspondiente al huso esférico de abertura mínima que contiene a la figura convexa, se llama espesor de la misma. Es $E \leqq \pi$.

También utilizaremos en lo sucesivo el radio ρ del *círculo inscrito*, entendiendo por tal el círculo de mayor radio contenido totalmente en el interior de la figura convexa, y el radio R del *círculo circunscrito* o círculo de menor radio que puede contener a la misma. Ambos radios ρ, R se entienden radios esféricos, es decir, medidos como arcos de círculo máximo. Por tanto $\rho \leqq \frac{\pi}{2}$, $R \leqq \frac{\pi}{2}$.

Nuestro objeto va a consistir en estudiar ciertas relaciones entre los elementos anteriores de las figuras convexas esféricas. Todas ellas son generalización de relaciones conocidas entre los elementos análogos de las figuras convexas planas. Lo interesante en estudiarlas sobre la esfera es que ellas aparecen a pares, es decir, como veremos, a cada relación o propiedad corresponde una relación o propiedad «dual», de manera que con una sola demostración se obtienen dos proposiciones que en el plano aparecen a veces como diferentes y precisan una demostración para cada una.

Recordemos desde ahora que la longitud L_0 y el área F_0 de un círculo menor de radio esférico r valen

Observaciones sobre «dualidad» en la esfera. Recordemos brevemente lo que se entiende por «dualidad» sobre la esfera. Consideremos la transformación que a cada círculo máximo le hace corresponder su polo, o sea, uno de los extremos del diámetro perpendicular al mismo. En esta transformación a un «arco», conjunto de puntos contenidos en un círculo máximo, corresponderá un «ángulo», conjunto de círculos máximos que pasan por un punto. Al conjunto de círculos máximos que cortan a una figura convexa K, corresponde un conjunto de puntos que forman la figura «dual» K'. A los círculos máximos de apoyo de K corresponden los puntos del contorno de K' y recíprocamente. Siendo K convexa, también lo es K'. Para verlo basta observar que por todo punto P exterior a K pasan sólo dos círculos máximos de apoyo de la misma K, que se obtienen tomando por P un círculo máximo que corta a K y haciéndolo girar hacia un lado y hacia el otro. Por tanto el círculo máximo cuyo polo es P sólo puede cortar al contorno de K' en dos puntos, y como P es cualquier punto, resulta que K' es convexa.

Las relaciones entre los elementos de la figura convexa K y los de su dual K' son fáciles de establecer.

Al diámetro D de K, es decir, al mayor «arco» contenido en K, corresponderá el menor «ángulo» que contiene a K', o sea, el espesor de K'. Como ambos son suplementarios, resulta $E' = \pi - D$.

Al diámetro 2ρ del círculo inscrito a K, que es el mayor contenido en K, corresponderá el diámetro $2R'$ del círculo circunscrito a K', que es el menor que contiene a K'. Ambos son suplementarios, por tanto $2\rho = \pi - 2R'$.

Para ver las relaciones entre las áreas y longitudes de dos figuras convexas duales K y K', consideremos el caso de ser K un polígono esférico convexo de n lados. Sean a_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) sus lados y A_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) sus ángulos. Suponiendo la esfera de radio unidad, la longitud L y el área F valen

$$L = \sum_1^n a_i, \qquad F = \sum_1^n A_i - (n-2)\pi.$$

Por dualidad, a cada lado de K corresponde un vértice

K' es igual al suplemento del ángulo que forman los lados correspondientes de K. Por tanto K' será otro polígono convexo del mismo número n de lados, cuyos lados valen $a'_i = \pi - A_i$ y los ángulos $A'_i = \pi - a_i$. Por tanto la longitud L' y el área F' de K' valen, respectivamente,

$$L' = \sum_1^n (\pi - A_i) = 2\pi - F, \quad F' = \sum_1^n (\pi - a_i) - (n-2)\pi = 2\pi - L.$$

(Nótese que las dos fórmulas son substancialmente equivalentes, puesto que la figura dual de K' es nuevamente K).

Estas fórmulas, como no dependen del número de lados, subsisten para todos los polígonos de una sucesión que tienda a una figura convexa cualquiera K y por tanto valen también, en el límite, para ésta. Luego, entre las longitudes y las áreas de dos figuras convexas esféricas duales valen las relaciones simétricas

$$L' = 2\pi - F, \qquad F' = 2\pi - L.$$

§ 1. Figuras convexas de anchura constante sobre la esfera.

Antes de seguir adelante conviene recordar la definición y primeras propiedades de una clase muy importante de figuras convexas esféricas llamadas de anchura constante.

Recordemos primero brevemente la definición y propiedades inmediatas de las figuras convexas de anchura constante en el plano, llamadas también orbiformes (²).

Sea K una figura convexa plana. Se llama *recta de apoyo* de la misma a toda recta que tiene algún punto común con el contorno y no atraviesa a la figura, es decir, la deja toda de un mismo lado. En los puntos del contorno de K en que existe tangente, ésta es la recta de apoyo.

Se llama *anchura* de K según una determinada dirección a la distancia entre las dos rectas de apoyo paralelas a esta

---

(²) Bibliografía sobre estas curvas se puede ver, por ejemplo, en Bonnesen-Fenchel, loc. cit., pág. 130.

dirección. Cuando la anchura es la misma según todas las direcciones, se dice que K es *de anchura constante*, o también que es un *orbiforme*.

El ejemplo más simple, después del círculo, de figura convexa plana de anchura constante es el llamado *triángulo de* Reuleaux. Se forma tomando los vértices de un triángulo equilátero como centros y trazando con radio igual a los lados, arcos de circunferencia que unan los dos vértices opuestos. (Fig. 1). El triángulo curvilíneo resultante tiene anchura igual al lado del triángulo de partida según cualquier dirección. Si en lugar del triángulo equilátero se parte de otro polígono regular cualquiera de un número impar de lados y con centro en los vértices se trazan también arcos de circunferencia que unan los dos vértices opuestos, se tienen otras figuras también de anchura constante que se suelen llamar *polígonos de* Reuleaux [5]. La condición de que el polígono de partida sea regular no es necesaria (Fig. 2).

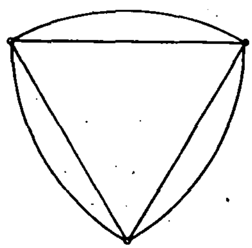

Fig. 1

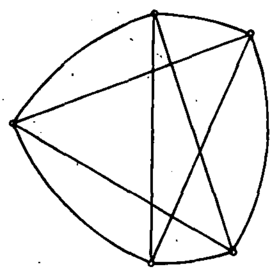

Fig. 2

La propiedad fundamental de las figuras planas convexas de anchura constante a es que la longitud de su contorno vale

$$L = \pi a \qquad (2)$$

es decir, es la misma para todas las figuras de la misma anchura.

([5]) Las figuras planas de anchura constante fueron ya estudiadas por Euler (*De curvis triangularibus*, Acta Acad. Sc. Petropolitanae, 1778) quien les dió el nombre de orbiformes. Euler considera ya el triángulo de la fig. 1 que luego se ha llamado triángulo de Reuleaux. Este último es quien por primera vez extiende la idea a los polígonos (F. Reuleaux, *Lehrbuch der Kinematik*, Braunschweig 1875).

Obsérvese que en toda figura convexa plana la mínima anchura es lo que se llama el *espesor*, y la máxima anchura es el *diámetro*. Por tanto en las figuras convexas planas de anchura constante el espesor es igual al diámetro, lo cual es característico de estas figuras.

Veamos ahora el equivalente sobre la esfera de las figuras planas de anchura constante. Sea K una figura convexa de la superficie esférica. Sea C un círculo máximo de apoyo de K y A el punto de apoyo del mismo (Fig. 3). Tomando $AO = \frac{\pi}{2}$

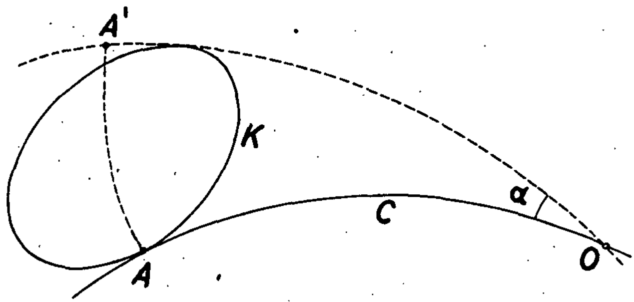

Fig. 3

y trazando por O el restante círculo máximo de apoyo OA', el ángulo $\alpha = AOA'$ se llama la *anchura* de K correspondiente al círculo máximo de apoyo C. Naturalmente que el ángulo α está también medido por el arco AA' perpendicular a la vez a OA y a OA'.

Cuando la anchura es la misma para todo C, se dice que K es de anchura constante. Evidentemente los círculos menores son figuras convexas de constante anchura.

Otra figura esférica convexa de constante anchura es la análoga al triángulo de Reuleaux del plano, que llamaremos triángulo de Reuleaux esférico (Fig. 4). Se construye, como en el plano, a partir de un triángulo esférico equilátero y uniendo cada dos vértices por arcos de círculos menores con centro en el tercer vértice. Estos triángulos de Reuleaux exigen que el lado a del triángulo equilátero de partida cumpla $a < \pi$

Si $a > \frac{\pi}{2}$ los arcos de círculo menor que unen cada dos vértices son interiores al triángulo equilátero y la figura deja de ser convexa. Por tanto: existen únicamente triángulos de Reuleaux esféricos del tipo mencionado, análogos a los del caso del plano, para anchuras menores que $\frac{\pi}{2}$.

Otras figuras de anchura constante $a < \frac{\pi}{2}$ se obtienen, análogamente como para el plano, partiendo de un polígono esférico regular de un número impar de lados y uniendo cada dos vértices consecutivos por arcos de círculos menores con centro en el vértice opuesto. Aún sin ser el polígono regular, mientras las diagonales convenientes tengan igual longitud (Fig. 2), se obtienen también polígonos curvilíneos de anchura constante. Los llamaremos, como en el plano, polígonos de Reuleaux.

Sobre la esfera, el contorno de las figuras de la misma anchura constante no tiene para todas ellas la misma longitud, como ocurría para el plano. Basta observar, por ejemplo, que las longitudes del círculo menor de anchura α y del triángulo de Reuleaux de la misma anchura valen, respectivamente,

$$L_C = 2\pi \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}, \qquad L_R = 3A \operatorname{sen} \alpha \tag{3}$$

siendo A el ángulo del triángulo equilátero esférico de lado α y cumpliéndose por tanto $\operatorname{sen} \alpha : 1 = \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} : \operatorname{sen} \frac{A}{2}$, de donde

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{A}{2}}. \tag{4}$$

De (3) y (4) se deduce

$$\frac{L_R}{L_C} = \frac{3A}{2\pi \operatorname{sen} \frac{A}{2}}. \tag{5}$$

Como en todo triángulo esférico equilátero es $A \geqq \frac{\pi}{3}$, el cociente anterior es mayor que uno, y por consiguiente $L_R \geqq L_C$ (4).

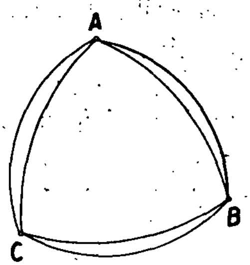

Fig. 4

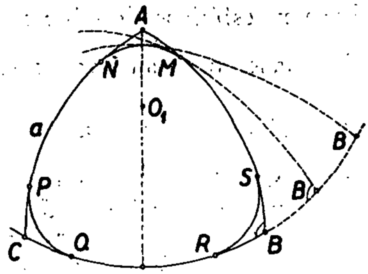

Fig. 5

El área F_R del triángulo esférico de Reuleaux se calcula inmediatamente como suma de 3 sectores circulares de abertura A (cada uno, por tanto, de área igual a $A(1 - \cos \alpha)$), menos dos veces el área del triángulo equilátero de ángulo A. Por tanto

$$F_R = 2\pi - 3A(1 + \cos \alpha).$$

Comparando L_R con las longitudes de otros polígonos de Reuleaux de la misma anchura, se observa que L_R es también mayor que ellas. Aplicando entonces un teorema que Blaschke ha demostrado para el plano, y que vale con la misma demostración también para la esfera, de que toda figura

(4) Es de observar que supuesto definido, análogamente a como para el plano y la esfera, el triángulo de Reuleaux sobre las superficies de curvatura constante negativa igual a —1, su longitud L_R y la longitud L_c del círculo geodésico de la misma anchura valen

$$L_R = 3A \operatorname{sh} \alpha \quad , \quad L_c = 2\pi \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \cdot$$

Como $\operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sen} \frac{A}{2}$, de estas expresiones se deduce la misma igualdad (5) del texto, pero sobre las superficies de curvatura constante negativa es $A \leqq \frac{\pi}{3}$ y por tanto $L_R \leqq L_c$.

Se tiene por tanto: *La longitud del triángulo de Reuleaux de anchura α es igual a la del círculo de la misma anchura sobre el plano (geometría euclídea), mayor que ésta sobre la esfera (geometría elíptica) y menor sobre la pseudoesfera (geometría hiperbólica).*

convexa de anchura constante $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ se puede aproximar en tanto como se quiera por polígonos de Reuleaux (5), se tiene:

a) *Entre las figuras convexas esféricas de constante anchura* $\alpha < \frac{\pi}{2}$ *el triángulo de* Reuleaux *tiene longitud máxima.*

Comparando las áreas en lugar de las longitudes, el mismo teorema de Blaschke aplicado a la esfera nos dice:

b) *Entre las figuras convexas esféricas de constante anchura* $\alpha < \frac{\pi}{2}$ *el triángulo de* Reuleaux *es el que tiene mínima área.*

Para anchuras $\alpha > \frac{\pi}{2}$ existen también sobre la esfera figuras convexas de anchura constante, pero ya no se pueden dar como ejemplo los polígonos de Reuleaux. Hay que proceder dualmente.

Sea ABC un triángulo equilátero de lado $a > \frac{\pi}{2}$ y por tanto también $A > \frac{\pi}{2}$ (Fig. 5). La anchura de este triángulo correspondiente al lado BC, no es, como antes la altura AH (siendo H el pie de la altura correspondiente al vértice A), sino el ángulo B, es decir, $\alpha = B$. Fijo BC, la envolvente de los círculos máximos que forman con este lado un ángulo $\alpha = B$ es un círculo menor de centro O_1 tal que $O_1H = \frac{\pi}{2}$. Tomando de este círculo menor el arco MN que redondea el vértice A y trazando los arcos análogos para los otros vértices, se tiene una figura convexa, contenida en el triángulo equilátero de partida, y que tiene también la anchura constante $\alpha = B$. Esta figura es el *triángulo dual de* Reuleaux.

En lugar de un triángulo equilátero se puede partir de un polígono de un número impar de lados, cuyos lados opuestos se corten todos bajo un mismo ángulo $\alpha > \frac{\pi}{2}$. Redondeando

(5) W. Blaschke, *Konvexe Bereiche gegebener konstanter Breite und kleinsten Inhalts*, Mathematische Annalen, vol. 76, pp. 504-513, 1915.

entonces interiormente los vértices como en el caso del triángulo se tienen *polígonos duales de* Reuleaux, que son tambien figuras convexas de anchura constante $\alpha > \frac{\pi}{2}$.

El área del triángulo dual de Reuleaux de anchura $\alpha > \frac{\pi}{2}$, se calcula sin dificultad y resulta que vale

$$F'_R = 2\pi - 3(\pi - a) \operatorname{sen} A \tag{6}$$

siendo a el lado y A el ángulo del triángulo equilátero de partida, que es también igual a la anchura α.

Este valor F_R' se puede calcular directamente, o bien aplicando la fórmula $F' = 2\pi - L$ que, según vimos en la Introducción relaciona la longitud de una figura convexa con el área de su dual. En este caso, L está dada por la segunda igualdad (3); teniendo en cuenta que al pasar al triángulo dual el lado a se convierte en el suplemento del ángulo A y recíprocamente, en la segunda ecuación (3) deberemos sustituir α por $\pi - A$ y A por $\pi - a$. Con estas sustituciones y aplicando $F_R' = 2\pi - L_R$ se obtiene (6).

Comparando con el área del círculo de igual anchura ($F_C = 2\pi(1 - \cos\frac{\alpha}{2})$), o con el área de otros polígonos duales de Reuleaux también de la misma anchura, se observa que el triángulo tiene mayor área que todos ellos. Por el mismo teorema de Blaschke recordado antes, se tiene pues ahora la propiedad dual de la b):

b′) *Entre las figuras convexas esféricas de anchura constante* $\alpha > \frac{\pi}{2}$, *el triángulo dual de* Reuleaux *es el que tiene menor área.*

En cuanto a la longitud del triángulo dual de Reuleaux, vale

$$L'_R = 3(\pi - a)(1 - \cos A) \tag{7}$$

y la propiedad dual de la a) se enuncia:

a′) *Entre las figuras esféricas convexas de anchura constante* $\alpha > \frac{\pi}{2}$, *el triángulo dual de* Reuleaux *es la que tiene máxima longitud.*

El valor (7) de L_R' se puede calcular directamente o bien, como para el área F_R', podemos aplicar la fórmula $L_R' = 2\pi - F_R$ que da la longitud de una figura convexa en función del área de su dual. Como hemos visto que $F_R = 2\pi - 3A(1+\cos\alpha)$, haciendo la substitución de A por $\pi - a$ y de α por $\pi - A$, se obtiene la fórmula (7).

Si en los segundos miembros de (6) y (7) se quiere hacer intervenir únicamente la anchura α, basta sustituir $A = \alpha$ y deducir a de la relación

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{A}{2}}.$$

§ 2. Relaciones inmediatas entre ρ, R, L, F, D, E.

Observemos, sin necesidad de demostración, las proposiciones inmediatas siguientes entre los diversos elementos de las figuras esféricas convexas.

(1.1) *Dado el radio ρ del círculo inscrito, la figura convexa de máxima longitud es el huso esférico de abertura 2ρ. La de longitud mínima es el círculo de radio ρ.*

Por tanto, según (1) para toda figura convexa esférica vale

$$2\pi \operatorname{sen}\rho \leqq L \leqq 2\pi. \tag{8}$$

(1.2) *Dado ρ, el máximo de F corresponde al huso esférico de abertura 2ρ y el mínimo de F al círculo de radio ρ.* Es decir

$$2\pi(1-\cos\rho) \leqq F \leqq 4\rho. \tag{9}$$

(1.3) *Dado ρ, el máximo del diámetro D corresponde al huso esférico de abertura 2ρ y el mínimo al círculo de radio ρ.* Por tanto, para cualquier figura esférica convexa vale

$$2\rho \leqq D \leqq \pi. \tag{10}$$

Como relaciones duales de las anteriores tienen lugar:

(1.4) *Dado el radio $R < \pi$ del círculo circunscrito, la má-*

xima área corresponde al círculo de radio R y la mínima a un arco de longitud 2R considerado como una figura convexa aplastada. Por tanto

$$0 \leqq F \leqq 2\pi\,(1-\cos R). \tag{11}$$

(1. 5) *Dado R, el máximo de la longitud L corresponde al círculo de radio R y el mínimo al segmento de longitud $2R$ considerado como una figura convexa aplastada de longitud $4R$.* Por tanto

$$4R \leqq L \leqq 2\pi \operatorname{sen} R. \tag{12}$$

(1. 6) *Dado R, el máximo espesor E corresponde al círculo de radio R y el mínimo al segmento de longitud $2R$ considerado como una figura convexa aplastada.* Es decir

$$0 \leqq E \leqq 2R. \tag{13}$$

Después de estas relaciones triviales quedan por estudiar otras más complicadas que exigen un estudio más detenido. De algunas de ellas nos vamos a ocupar en los números sucesivos.

§ 3. Relación entre el radio del círculo inscripto ρ y el espesor E.

Dado ρ, el valor mínimo del espesor E es evidentemente 2ρ, valor que es alcanzado por ejemplo por el círculo de radio ρ y además por cualquier otra figura convexa comprendida entre el círculo de radio ρ y un huso circunscrito al mismo de abertura 2ρ. Por consiguiente

$$2\rho \leqq E. \tag{14}$$

Queda ahora el problema, más complicado, siguiente: dado ρ hallar el máximo de E. Es decir, *entre todas las figuras convexas esféricas que tienen un mismo radio ρ del círculo inscrito, hallar las que tienen un máximo espesor.*

Empezaremos por demostrar dos lemas:

LEMA I: *Para un triángulo esférico, el espesor es igual, o bien a la altura mínima, o bien al ángulo mínimo.*

Al hablar de triángulos esféricos entendemos siempre triángulos convexos, es decir, con los lados y ángulos menores o iguales que π.

Obsérvese que puede ocurrir que la altura mínima sea menor que el ángulo mínimo y sin embargo que el espesor sea este último. Basta considerar un triángulo formado por un huso del cual se ha separado un pedazo en un extremo: la altura mínima puede ser tan pequeña como se quiera, pero el espesor es igual a la abertura del huso primitivo.

Demostración. Notemos que dado un huso de abertura E (Fig. 6), si se hace girar uno de los lados alrededor de su punto medio un ángulo suficientemente pequeño, tanto si se gira en un sentido como en otro, la abertura E aumenta si $E < \frac{\pi}{2}$, permanece invariable si $E = \frac{\pi}{2}$ y disminuye si $E > \frac{\pi}{2}$.

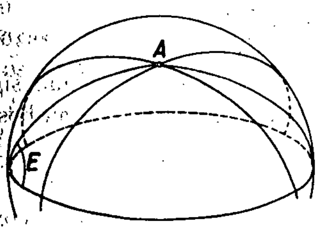

Fig. 6

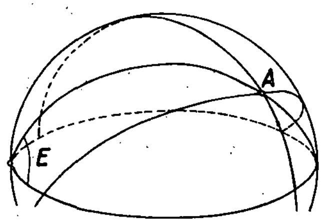

Fig. 7

En cambio si el giro se hace alrededor de un punto A que no sea el punto medio del lado (Fig. 7), la abertura E aumenta o disminuye según se gire en un sentido o en otro.

Sentado esto, sea un triángulo $T \equiv ABC$. Sea H un huso de abertura mínima, igual al espesor E, que lo contiene. Sobre cada lado de H debe haber por lo menos un vértice. Si sobre un lado de H hay sólo un vértice A, debe estar en el punto medio, pues si no, girando el lado alrededor de A como centro, según lo dicho, habría un sentido según el cual E disminuiría. Lo mismo sobre el otro lado: si solamente contiene un vértice B del triángulo, éste debe estar en el punto medio del lado del huso. En este caso E sería igual al lado AB, lo cual no es posible, pues cualquier altura del triángulo, desde A o desde B, es menor que AB. Por tanto, si el vértice A está sólo sobre un lado del huso H, sobre el otro lado debe estar todo el lado BC del triángulo y E será igual a la altura correspondiente a este lado.

Si ningún lado del huso contiene un único vértice, quiere decir que dos lados del triángulo coinciden con los lados del huso y, por tanto, que el espesor E es igual a un ángulo del triángulo. Naturalmente que en tal caso el ángulo del triángulo que es igual a E debe ser el menor, pues cualquier otro ángulo también es vértice de un huso que contiene al triángulo. Queda con esto demostrado el lema I.

Apliquemos este lema a estudiar el espesor de los triángulos equiláteros. Para formar un triángulo equilátero basta suponer sobre la esfera un círculo menor y trazar los tres círculos máximos tangentes en puntos distantes 120°. Llamando A al ángulo y h a la altura, se verifica

$$\cos h = \frac{\cos A}{\operatorname{sen}(A:2)}.$$

De aquí deducimos que $\cos h$ y $\cos A$ tienen el mismo signo y por tanto h y A son al mismo tiempo ambos $>$ o ambos $<$ que $\frac{\pi}{2}$. Para $A < \frac{\pi}{2}$, es $\cos h > \cos A$ y por tanto $h < A$. Para $A > \frac{\pi}{2}$ es $|\cos h| > |\cos A|$ y por tanto $h > A$. Por consiguiente: *Para los triángulos equiláteros, si* $A < \frac{\pi}{2}$, *el espesor es igual a la altura; si* $A > \frac{\pi}{2}$, *el espesor es igual al ángulo* A.

Si se quiere expresar el espesor E del triángulo equilátero en función del radio ρ del círculo inscrito, según lo anterior, será

$$E = \rho + \operatorname{arc\,sen} \frac{\operatorname{sen}\rho}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}\cos^2\rho}} \qquad \text{para } \rho \leqq \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{15}$$

$$E = 2 \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\rho\right) \qquad \text{para } \rho \geqq \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}, \tag{16}$$

siendo $\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}$ el radio del círculo inscrito en el triángulo trirrectángulo.

LEMA II. *El círculo inscrito c de una figura convexa K, o bien tiene dos puntos diametralmente opuestos comunes con el contorno de K, o bien tiene por lo menos 3 puntos comunes con el mismo contorno, los cuales no son todos puntos interiores de una misma semicircunferencia de c.*

Demostración. En efecto, de no cumplirse el lema, habría toda una semicircunferencia de c de puntos interiores a K, o sea, a cierta distancia finita del contorno de K. Se podría trazar una semicircunferencia concéntrica y exterior a ella a distancia suficientemente pequeña para que tampoco tuviera puntos exteriores a K. Entonces existiría un círculo totalmente contenido en el interior del recinto formado por c más la franja contenida entre las dos semicircunferencias concéntricas y el diámetro común y de radio mayor que c. Este círculo estaría también contenido en K, lo cual no es posible por haber supuesto que c era el círculo inscrito, o sea, el de mayor radio contenido en K.

Sentados estos dos lemas, vamos a resolver el problema de hallar una acotación superior para el espesor E de las figuras convexas esféricas en función del radio ρ de su círculo inscrito. Vamos a demostrar:

Dado ρ, el máximo espesor E corresponde al triángulo equilátero circunscrito al círculo de radio ρ. Por tanto, según (15), (16), *para toda figura convexa esférica se verifica*

$$E \leqq \rho + \operatorname{arc\,sen} \frac{\operatorname{sen} \rho}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}\cos^2 \rho}} \qquad \textit{para } \rho \leqq \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{17}$$

$$E \leqq 2 \arccos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \rho \right) \qquad \textit{para } \rho \geqq \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{18}$$

El signo de igualdad en (17) *vale únicamente para el triángulo equilátero; en* (18) *vale además para ciertas figuras de espesor constante que estudiaremos.*

Demostración. Sea una figura convexa K y sea c el círculo inscrito de la misma, de radio ρ.

Puede ocurrir que c tenga únicamente dos puntos comunes con el contorno de K; en este caso, según el lema II, estos puntos son diametralmente opuestos. El espesor de K valdrá 2ρ y evidentemente se satisfacen (17) y (18).

Si c tiene tres o más puntos comunes con el contorno de K, según el mismo lema II, se pueden elegir tres de estos puntos que no estén en una misma semicircunferencia de c. Tracemos los círculos máximos tangentes a c en estos puntos. Resultará un triángulo T circunscrito a K y por lo tanto el espesor de K es menor o igual que el de T. Tracemos también el triángulo equilátero T_e circunscrito a c. Vamos a demostrar que el espesor de T_e es mayor que el de T. Sea E el espesor de T y E_e el de T_e. El espesor de T_e, según el lema I, o bien es una altura, o bien es un ángulo. En el caso en que E_e sea igual al valor de los ángulos de T_e, observemos que en el triángulo T siempre habrá por lo menos un ángulo menor que E_e (en efecto, siempre habrá dos lados de T cuyos puntos de tangencia con c disten entre sí un arco de c mayor de 120°, y estos lados formarán un ángulo menor que los arcos tangentes a distancia de 120°) y por tanto T podrá colocarse completamente en el interior de un huso de abertura E_e; su espesor será, por tanto, menor que E_e.

Consideremos ahora el caso de ser E_e igual a las alturas de T_e. Sea $T_e \equiv ABC$, $T \equiv A'B'C'$ (Fig. 8). De los tres pun-

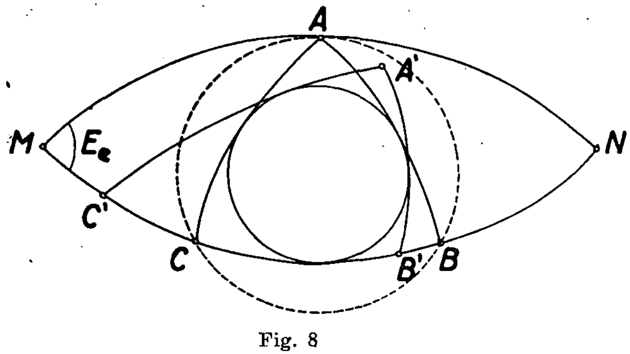

Fig. 8

tos de contacto de los lados de T con c, habrá dos distantes entre sí un arco menor que 120°. Supongamos que los lados correspondientes sean los concurrentes en A'. El ángulo A' será mayor que el A de T_e. Por un giro alrededor del centro de c, podemos colocar T de manera que su lado $B'C'$ esté sobre el lado BC de T_e. En esta posición por ser el ángulo A' mayor que el A, el vértice A' cae dentro de la corona circular comprendida entre c y el círculo circunscrito a T_e; por tanto A' cae también interiormente al huso de abertura E_e, cuyo arco que une los puntos medios de los lados es la altura de T_e correspondiente al vértice A. Por consiguiente T queda interior a este huso y por tanto el espesor de T, y en consecuencia el de K, será menor que el E_e de T_e.

Queda así demostrada la primera parte del teorema. Falta ahora establecer si el triángulo equilátero es la *única* figura para la cual, dado ρ, el espesor alcanza su máximo valor.

Ya hemos observado que trazando los círculos máximos tangentes al círculo inscrito c en tres puntos no interiores a una misma semicircunferencia del mismo, el triángulo circunscrito que resulta contiene a K. Por tanto, como ya hemos visto últimamente que entre los triángulos que tienen el mismo ρ, el equilátero es el de máxima anchura, para que el espesor de K sea igual al del triángulo equilátero cuyo círculo inscrito tiene el mismo radio ρ, es necesario que la figura K pueda estar totalmente contenida en T_e y tener igual espesor.

Mientras el espesor de T_e es igual a la altura (desigualdad (15)), esto no es posible. En efecto, toda figura K convexa que contenga los vértices de T_e contiene todo el triángulo; por tanto debe haber por lo menos un vértice de T_e exterior a K, y por consiguiente el huso de abertura mínima E_e cuyo arco central es la altura correspondiente a este vértice se podría cerrar más, es decir, el espesor de K resulta menor que el de T_e.

Cuando el espesor de T_e es igual a sus ángulos (desigualdad (16)), la cuestión cambia. Entonces hay otras figuras contenidas en T_e y que sin embargo tienen igual espesor. En efecto, sea el triángulo equilátero ABC (Fig. 5), con sus ángulos mayores que $\frac{\pi}{2}$. Los círculos máximos, como AB, que forman con CB un ángulo constante B envuelven un círculo menor tangente a los lados AB y AC en los puntos M y N respectivamente. De la misma manera se pueden redondear los demás vértices y resulta así la figura convexa $MNPQRS$, ya estudiada en § 1, y que allí llamamos *triángulo dual de* R e u l e a u x. Esta figura convexa tiene el mismo círculo inscrito c de radio ρ que $T_e = ABC$ y también el mismo espesor E_e. Naturalmente que no hay sólo esta figura de anchura constante que con el mismo ρ

tenga el mismo espesor E_e que el triángulo equilátero: cualquier otra figura convexa contenida entre $MNPQRS$ y el triángulo $T_e = ABC$ goza de la misma propiedad.

Por tanto:

Para $\rho \leqq \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{2}}{2}$, *el triángulo equilátero es la única figura a la cual, para un* ρ *dado, corresponde un máximo espesor.*

Para $\rho > \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{2}}{2}$ *hay toda una infinidad de figuras con la propiedad de tener el mismo* ρ *y el mismo espesor* E_e *que el triángulo equilátero. Estas figuras están comprendidas entre el triángulo equilátero y el triángulo dual de* Reuleaux *que de él se deduce.*

Paso al caso del plano. Hemos desarrollado lo anterior suponiendo figuras sobre la esfera de radio unidad. Si se trata de una esfera de radio a, las conclusiones subsisten, puesto que se puede considerar esta esfera como la transformada por homotecia de una esfera de radio unidad concéntrica a ella.

El caso del plano se puede obtener como caso límite de una esfera cuyo radio tiende a infinito. En este caso, para obtener figuras de área finita, debemos considerar figuras que vistas desde el centro de la esfera tengan magnitudes que tiendan a cero al crecer el radio de la esfera, es decir, debemos considerar únicamente el caso en que ρ tiende a cero, o sea, aplicar (17).

La desigualdad (17), para una esfera de radio a, se escribe

$$\frac{E}{a} \leqq \frac{\rho}{a} + \operatorname{arc\,sen} \frac{\operatorname{sen} \frac{\rho}{a}}{\sqrt{1 - \frac{3}{4} \cos^2 \frac{\rho}{a}}}.$$

Multiplicando ambos miembros por a y haciendo $a \to \infty$, resulta

$$E \leqq 3\rho.$$

Esta es la desigualdad entre el espesor y el radio del círculo inscrito para las figuras convexas planas. La igualdad vale únicamente, como en (17), para el triángulo equilátero ([6]).

([6]) Ver Bonnesen-Fenchel, loc. cit., pág. 79.

§ 4. Un teorema de R. M. Robinson.

Sea, sobre la esfera de radio unidad, una figura convexa cualquiera K; sea E su espesor y ρ el radio de su círculo inscrito. La figura K puede estar contenida en un huso esférico de abertura E y por tanto habrá el huso suplementario de abertura $\pi - E$ que no contiene ningún punto de K ni de la figura simétrica de K respecto del centro de la esfera. En este huso se puede inscribir un círculo de radio $\rho_1 = \frac{1}{2}(\pi - E)$.

Según el teorema del apartado anterior, enunciado en sentido inverso, dado E, el mínimo de ρ corresponde al valor que convierte en igualdad alguna de las expresiones (17) o (18). Este valor mínimo de ρ aumenta con E, al mismo tiempo que ρ_1 disminuye. Un valor máximo para el que se pueda estar seguro de que, cualquiera que sea K, siempre estará comprendido entre los valores ρ y ρ_1 correspondientes, se obtendrá resolviendo la ecuación $\rho = \rho_1$. Observemos que siendo $E = \pi - 2\rho_1$ si $E < \frac{\pi}{2}$ es $\rho < \frac{\pi}{4}$ y $\rho_1 > \frac{\pi}{4}$, luego para que sea $\rho = \rho_1$ debe ser $E \geqq \frac{\pi}{2}$ y por tanto aplicaremos (18). Resulta así, tomando el valor máximo de E dado por (18), sustituyendo $E = \pi - 2\rho_1$ y haciendo $\rho_1 = \rho$,

$$\pi - 2\rho = 2 \arccos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \rho \right).$$

Dividiendo por 2 y tomando el coseno de ambos miembros resulta $\operatorname{sen} \rho = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \rho$, de donde

$$\rho = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{19}$$

Se tiene así, indirectamente, demostrado un teorema de R. M. Robinson (7):

Siendo K una figura convexa esférica cualquiera, siempre

(7) R. M. Robinson, *Note on convex regions on the sphere*, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 44, pp. 115-116, 1938.

existe una circunferencia de radio esférico $\rho = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(40^{\circ}\,53' < \rho < 40^{\circ}\,54')$ *la cual se puede colocar enteramente en el interior de K o bien exteriormente a K de manera que no tenga punto común ni con K ni con la figura simétrica de K respecto el centro de la esfera. El valor de* ρ *que cumple esta propiedad no puede aumentarse.*

§ 5. Relación entre el radio del círculo circunscrito R y el diámetro D.

Se trata de la cuestión dual de la tratada en § 3. En efecto, recordando la definición de «dualidad» dada en la introducción, al círculo inscrito de K corresponde el círculo circunscrito de K' y la relación entre los radios es

$$\rho = \frac{\pi}{2} - R'.$$

Al espesor E de K corresponde el diámetro D' de K' y la relación entre ambos es

$$E = \pi - D'.$$

Según esto, y escribiendo R, D en lugar de R', D' las relaciones (17) y (18) se escriben

$$D \geqq \frac{\pi}{2} + R - \operatorname{arc\,sen}\frac{\cos R}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 R}} \quad \text{para}\ \frac{\pi}{2} \geqq R \geqq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{20}$$

$$D \geqq \pi - 2\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} R\right) \quad \text{para} \quad R \leqq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{21}$$

De aquí, enunciando por dualidad el teorema de § 3, se tiene:

Dado el radio R del círculo circunscrito a una figura convexa K situada sobre la superficie de la esfera de radio unidad, el valor mínimo del diámetro D es el correspondiente al triángulo equilátero inscrito en el círculo de radio R. De aquí se deducen las desigualdades (20) *y* (21). *El signo de igualdad vale en* (20) *únicamente para el triángulo equilátero. En cam-*

bio, en (21) *el signo de igualdad vale también para cualquier otra figura de diámetro D que pueda contener en su interior al triángulo equilátero de lado D.*

El triángulo de Reuleaux, Fig. 4, es un ejemplo de figura que cumple las últimas condiciones y para la cual vale, por tanto, el signo de igualdad en (21). Además, cualquier otra figura comprendida entre el triángulo equilátero ABC y el triángulo de Reuleaux de él derivado, tiene los mismos R y D que el triángulo equilátero y verifica, por tanto, la igualdad en (21).

Paso al caso del plano. Análogamente a como se procedió en § 3, para pasar al plano como caso límite de una esfera cuyo radio tiende a infinito, debemos tomar el caso en que R tiende a cero, o sea, el caso de la desigualdad (21). Escribiendo esta desigualdad para una esfera de radio a se tiene

$$\frac{D}{a} \geqq \pi - 2 \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \frac{R}{a}\right)$$

o bien

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \frac{R}{a}\right) \geqq \frac{\pi}{2} - \frac{D}{2a};$$

y tomando el coseno de ambos miembros, con lo cual se invierte la desigualdad, queda

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \frac{R}{a} \leqq \operatorname{sen} \frac{D}{2a}. \tag{22}$$

Multiplicando por a y haciendo $a \to \infty$ resulta finalmente

$$D \geqq \sqrt{3} R$$

que es la relación que liga el diámetro con el radio del círculo circunscrito de las figuras convexas planas. La igualdad tiene lugar no sólo para el triángulo equilátero, si no también, como hemos dicho hablando de la esfera, para todas las figuras convexas comprendidas entre el triángulo equilátero de lado D y el triángulo plano de Reuleaux correspondiente [8].

---

[8] Ver Bonnesen-Fenchel, loc. cit., pág. 78.

§ 6. Teorema dual del de R. M. Robinson.

Obsérvese que dada una figura convexa K de diámetro D, siempre hay un círculo de radio $R_1 = \frac{1}{2}(\pi - D)$ que tiene punto común al mismo tiempo con K y con su figura simétrica respecto el centro de la esfera. Cuando D crece, el mínimo de R aumenta y en cambio R_1 disminuye; cuando ambos valores de R y R_1 coincidan tendremos el mínimo valor permisible de R para asegurar que, cualquiera que sea K, un círculo de radio R siempre puede o bien comprender en su interior a K o bien tener punto común al mismo tiempo con K y su simétrica respecto el centro de la esfera.

Para que el mínimo de R, dado por la igualdad en (20) o en (21), sea igual a $R_1 = \frac{1}{2}(\pi - D)$ debemos tomar el caso en que $R \leqq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{2}}{2}$ y por tanto siendo $D = \pi - 2R_1$, si $R = R_1$, de (21) se deduce la ecuación

$$\pi - 2R = \pi - 2 \operatorname{arc\,cos} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} R\right)$$

de donde

$$R = \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{22}$$

De aquí deducimos, por tanto, el siguiente teorema, dual del de R. M. Robinson de § 4:

Siendo K una figura convexa esférica cualquiera, siempre se puede colocar un círculo de radio esférico $R = \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{\sqrt{3}}$ ($49^\circ 6' < R < 49^\circ 7'$) de manera que, o bien contenga en su interior a la figura K, o bien tenga puntos comunes al mismo tiempo con K y con la figura simétrica de K respecto el centro de la esfera. El valor de R que cumple esta propiedad no se puede disminuir.

§ 7. Relación entre el diámetro y la longitud.

En el plano, entre la longitud L de una figura convexa K y el diámetro D de la misma existe la siguiente acotación, fácil de establecer,

$$L \leqq \pi D, \tag{23}$$

valiendo el signo igual para todas las figuras convexas planas de anchura constante ([9]).

Vamos a estudiar el problema análogo sobre la esfera, es decir, se trata de *buscar las figuras esféricas convexas que para un diámetro dado tienen máxima longitud.*

Observemos el siguiente lema:

LEMA. *Si una figura esférica K tiene diámetro $D < \frac{\pi}{2}$, ningún extremo de un diámetro de K puede ser punto interior de algún arco de círculo máximo que pertenezca al contorno.*

La demostración es inmediata. Si AB fuera un diámetro de K y B perteneciera a un arco de círculo máximo PQ del contorno de K, siendo $AB < \frac{\pi}{2}$, al moverse B sobre el arco PQ habría un sentido en que AB aumentaría y por tanto AB no sería un diámetro.

Es interesante notar que la condición de ser $D < \frac{\pi}{2}$ es imprescindible. Para diámetros $D \geqq \frac{\pi}{2}$ el lema deja de ser cierto. Por ejemplo, para un triángulo equilátero de lado mayor que $\frac{\pi}{2}$, cualquier altura es un diámetro y sin embargo el extremo de la misma que no es un vértice es el punto medio de un lado, que es un arco de círculo máximo.

Sentado este lema, sea una figura convexa esférica K de diámetro $D < \frac{\pi}{2}$. Vamos a demostrar que *si K no es de anchura constante, se puede aumentar su longitud sin modificar el diámetro.*

([9]) Ver por ejemplo Bonnesen-Fenchel, loc. cit., pág. 77.

Sea A un punto de K y B el punto de K más distante de A. Si AB es un diámetro cualquiera que sea A, quiere decir que los círculos máximos perpendiculares a AB en los extremos A y B son círculos máximos de apoyo y por tanto que K tiene anchura constante e igual al diámetro D.

Si K no es de anchura constante, hay por lo menos un punto A de su contorno tal que, siendo B el punto de K más distante de A, es $AB < D$ (Fig. 9). Prolonguemos el arco BA de una longitud AA' tal que $BA' = D$. Tracemos por A' los círculos máximos de apoyo de K. Resulta así una nueva figura que tiene longitud *mayor* que K, pues arco $CAE <$ arco $CA'E$. Además el diámetro de la nueva figura no es mayor que D, puesto que los puntos de los arcos $A'C$, $A'E$ según el lema anterior no pueden ser extremos de diámetros y en cuanto a A' su distancia a cualquier punto M de K cumple $A'M \leqq A'A + AM \leqq A'A + AB = D$.

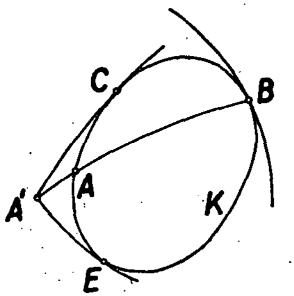

Fig. 9

Luego, al añadir los arcos $CA'E$ no se ha aumentado el diámetro y sí la longitud. En consecuencia:

Si para un diámetro dado, $D < \frac{\pi}{2}$, existen figuras convexas esféricas de longitud máxima, ellas deben encontrarse entre las figuras de anchura constante. Naturalmente que la anchura constante de estas figuras es igual a D.

Falta demostrar la *existencia* de tales figuras convexas de diámetro dado y longitud máxima. La demostración, simple pero un poco larga, podría ser exactamente la misma a la dada por A. Rosenthal y O. Szász para el caso análogo del plano ([10]). Por esta razón prescindiremos de ella, suponiendo admitida esta propiedad de existencia.

La figura convexa esférica que con un diámetro dado tiene máxima longitud hay que buscarla, por tanto, entre las fi-

([10]) A. Rosenthal y O. Szász, *Eine Extremaleigenschaft der Kurven konstanter Breite*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Vol. 25, págs. 278-282, 1916.

guras de anchura constante. Pero entre éstas ya vimos, § 1, que el triángulo de Reuleaux es el de máxima longitud. Luego:

Dado el diámetro $D < \frac{\pi}{2}$, *la figura convexa esférica de longitud máxima es el triángulo de* Reuleaux.

Calculando la longitud del triángulo de Reuleaux en función del diámetro D, que es igual a la anchura, resulta que para toda figura convexa esférica con $D < \frac{\pi}{2}$ es

$$L \leqq 6 \operatorname{sen} D \,.\, \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{2 \cos (D:2)}. \tag{24}$$

Observemos que es esencial la limitación $D < \frac{\pi}{2}$. Para valores mayores de D, veremos más adelante, § 9, que la figura de mayor longitud no es ya el triángulo de Reuleaux, sino el triángulo equilátero. Esperemos, sin embargo, demostrar este caso como dual del problema que vamos a tratar en el apartado siguiente.

Paso al caso del plano. Procediendo como al final de § 3, para una esfera de radio a, la desigualdad (24) se escribe

$$\frac{L}{a} \leqq 6 \operatorname{sen} \frac{D}{a} \,.\, \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{2 \cos (D:2a)}.$$

Multiplicando ambos miembros por a y haciendo $a \to \infty$, queda

$$L \leqq \pi D$$

que es la relación (23) que ya dijimos liga la longitud con el diámetro para las figuras convexas planas.

La diferencia es que la igualdad en (24) tiene lugar únicamente para el triángulo de Reuleaux, mientras que en (23) vale, como ya dijimos, para toda figura convexa plana de anchura constante, igual a D.

§ 8. Relación entre el área y el espesor.

Para establecer la relación entre el área F y el espesor E y hallar la figura que para un espesor dado E tiene mínima área, seguiremos un camino análogo al seguido para el caso del plano por Pàl [11]:

Sea K una figura convexa cualquiera sobre la esfera de radio unidad. Consideremos el círculo inscrito a la misma, o sea, según la definición, el círculo de mayor radio contenido en K. Distinguiremos dos casos:

1º. Supongamos que el círculo inscrito c de radio ρ tenga comunes con el contorno de K únicamente dos puntos. En este caso, como ya observamos en el lema II, § 3, estos dos puntos son diametralmente opuestos. Entonces el espesor E de K es igual a 2ρ y el área F de K será igual o mayor que el área de c, o sea

$$F \geqq 2\pi(1-\cos\rho) = 2\pi\left(1-\cos\frac{E}{2}\right). \tag{25}$$

La igualdad vale únicamente cuando K coincida con su círculo inscrito c.

2º. Si el círculo inscrito c tiene con el contorno de K más de dos puntos comunes, según el lema II, § 3, hay tres de ellos que no son interiores a una misma semicircunferencia, es decir, que son vértices de un triángulo esférico que contiene el centro de c; sean M, N, P estos puntos (Fig. 10). El con-

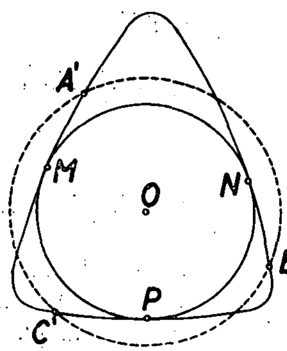

Fig. 10

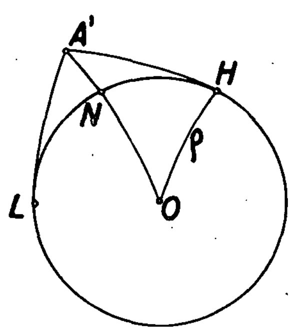

Fig. 11

torno de K queda dividido en tres arcos MN, NP, PM. Tracemos un círculo c' concéntrico con c de radio $E-\rho$. Por ser

(11) J. PÀL, *Ein minimumproblem für Ovale*, Mathematische Annalen, vol. 83, págs. 311-319, 1921. También BONNESEN-FENCHEL, loc. cit., pág. 76.

$E \geqq 2\rho$, es $E-\rho \geqq \rho$, es decir, este círculo es exterior a c. Este círculo c' debe cortar a cada uno de los arcos MN, NP, PM del contorno de K; en efecto, si no cortase por ejemplo al arco MN, el círculo máximo tangente a c en P y el círculo máximo tangente a c' en el punto de intersección con la prolongación de PO, que forma con él un ángulo $\rho+(E-\rho)=E$, formarían un huso que contendría a K totalmente en su interior y por tanto podría disminuirse su abertura, contra lo supuesto de ser E el espesor.

Sean A', B', C' tres puntos en que c' corta respectivamente a los arcos MN, NP, PM. Desde A', B', C' tracemos los arcos tangentes a c. Estos arcos, junto con c, determinan una figura convexa formada por c más tres triángulos curvilíneos, la cual está totalmente contenida en K. Queremos calcular el área de esta figura. Se compone del área de c más tres triángulos curvilíneos iguales, como el $A'LH$ de la Fig. 11.

En el triángulo esférico rectángulo $A'HO$, se tiene $OA'= E-\rho$, $OH=\rho$. Por tanto

$$\cos HOA' = \frac{\operatorname{tg}\rho}{\operatorname{tg}(E-\rho)}, \quad \operatorname{sen} OA'H = \frac{\operatorname{sen}\rho}{\operatorname{sen}(E-\rho)}. \tag{26}$$

De aquí se deduce que el área del triángulo esférico OHA' vale

$$\operatorname{arc\,cos}\frac{\operatorname{tg}\rho}{\operatorname{tg}(E-\rho)} + \operatorname{arc\,sen}\frac{\operatorname{sen}\rho}{\operatorname{sen}(E-\rho)} - \frac{\pi}{2}$$

y restando de esta área la del sector ONH que vale

$$(1-\cos\rho)\operatorname{arc\,cos}\frac{\operatorname{tg}\rho}{\operatorname{tg}(E-\rho)},$$

tendremos el área del triángulo curvilíneo NHA'. Sumando al área de c el área de 6 triángulos iguales al NHA' tendremos el área buscada:

$$f(\rho, E-\rho) = 6\operatorname{arc\,sen}\frac{\operatorname{sen}\rho}{\operatorname{sen}(E-\rho)}$$

$$+6\cos\rho \,.\, \operatorname{arc\,cos}\frac{\operatorname{tg}\rho}{\quad} - \pi - 2\pi\cos\rho. \tag{27}$$

Vamos a ver que este valor $f(\rho, E-\rho)$ es una función *creciente* de ρ. En efecto, siendo $0 \leqq \rho \leqq \frac{\pi}{2}$, $\rho \leqq E-\rho \leqq \frac{\pi}{2}$ (esta última desigualdad se deduce inmediatamente de (17), (18)), la derivada $\frac{df}{d\rho}$ consta de dos sumandos positivos, más la diferencia $\operatorname{sen} \rho\,(2\pi - 6$ áng. $A'OH)$ (téngase en cuenta (26)), la cual también es positiva, pues los triángulos curvilíneos de vértices A', B', C' no se cubren unos a otros. De aquí $\frac{df}{d\rho}>0$, y por tanto, supuesto E fijo, el mínimo valor de $f(\rho, E-\rho)$ se obtendrá para el valor mínimo posible de ρ. Es decir, si F es el área de K, es

$$F \geqq f(\rho, E-\rho) \geqq f(\rho_{\min}, \; E-\rho_{\min}). \tag{28}$$

Según § 3, fijo el espesor E, el valor mínimo de ρ es el correspondiente al triángulo equilátero de espesor E. Poniendo en (28) en lugar de $\rho_{\min}$ su valor en función de E deducido de (15) o (16) tendríamos la acotación inferior de F en función de E.

Veamos las conclusiones a que se llega a partir de estos dos casos 1º. y 2º. estudiados.

Observemos primeramente que, siempre sobre la esfera, el área del círculo menor de diámetro E es mayor que el área del triángulo equilátero de altura E. Esto se puede demostrar simplemente comparando las fórmulas que dan una y otra. Luego, en el caso 1º., F es mayor que el área del triángulo equilátero de altura E.

Por otra parte, para $E \leqq \frac{\pi}{2}$, el espesor del triángulo equilátero es igual a la altura (§ 3) y en tal caso el área del triángulo es la misma $f(\rho, E-\rho)$ de (27), pues los puntos A', B', C' coinciden con los vértices del triángulo. Además, para $E \leqq \frac{\pi}{2}$, es $\rho \leqq \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{2}}{2}$ y según vimos en § 3, en este caso el triángulo equilátero es la *única* figura que para un E dado, el radio ρ tiene el valor mínimo. Por tanto:

Dado el espesor E de una figura convexa esférica, si

$E \leqq \frac{\pi}{2}$, *el valor mínimo del área corresponde al triángulo equilátero de altura E. Este triángulo es, además, la única figura para la cual este mínimo es alcanzado.*

Hallando el área del triángulo equilátero de altura E la anterior acotación se puede escribir

$$E \leqq \operatorname{arc\,cos} \frac{\cos \frac{1}{3}(\pi+F)}{\operatorname{sen} \frac{1}{6}(\pi+F)} \quad \left(\text{para } E \leqq \frac{\pi}{2}\right). \tag{29}$$

La demostración precedente no sirve para $E > \frac{\pi}{2}$. En efecto, en tal caso, el triángulo equilátero de espesor E, igual a uno de sus ángulos, no tiene el área igual a $f(\rho, E-\rho)$; este valor es menor que el área del triángulo y por tanto no podemos valernos de la limitación (28). Este caso $E > \frac{\pi}{2}$ quedará dilucidado en el apartado siguiente § 9.

Paso al caso del plano. Para una esfera de radio a la relación (29) se escribe

$$\frac{E}{a} \leqq \operatorname{arc\,cos} \frac{\cos \frac{1}{3}\left(\pi + \frac{F}{a^2}\right)}{\operatorname{sen} \frac{1}{6}\left(\pi + \frac{F}{a^2}\right)}.$$

Tomando el coseno de ambos miembros, con lo cual se invierte la desigualdad, queda

$$\cos \frac{E}{a} \geqq \frac{\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{F}{3a^2} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{F}{3a^2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cos \frac{F}{6a^2} + \cos \frac{\pi}{6} \operatorname{sen} \frac{F}{6a^2}}.$$

Desarrollando en serie y sustituyendo $\cos \frac{\pi}{3} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{\pi}{6} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, resulta

$$1-\frac{E^2}{2a^2}+\cdots \geqq \frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{F}{3a^2}+\cdots}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{F}{6a^2}+\cdots}$$

De aquí se deduce inmediatamente, para $a \to \infty$,

$$E^2 \leqq \sqrt{3}F.$$

Esta es la acotación entre E y F para las figuras planas ([12]). En ella la igualdad vale únicamente para el triángulo equilátero.

§ 9. Duales de los problemas estudiados en § 7 y § 8. casos $D \geqslant \frac{\pi}{2}$, $E > \frac{\pi}{2}$.

El dual del problema estudiado en § 7 es el tratado en § 8. Como ya observamos en la introducción, al pasar de una figura K a su dual, el diámetro D pasa a $\pi - E$ y en cuanto a la relación entre la longitud y el área, se verifica que si L es la longitud de K, el área F de su dual es $2\pi - L$.

Por tanto al caso $D < \frac{\pi}{2}$ de § 7 corresponde el $E > \frac{\pi}{2}$ de § 8, el cual precisamente es el que nos faltaba. Enunciando por dualidad el teorema final de § 8, se tiene pues:

Dado el espesor $E > \frac{\pi}{2}$ de una figura convexa esférica, el valor mínimo del área corresponde al triángulo dual de Reuleaux.

Análogamente, el dual del teorema final del § 8, que dice que el triángulo equilátero es la única figura que con un espesor dado tiene mínima área, será:

Dado el diámetro $D \geqq \frac{\pi}{2}$, la figura convexa esférica de longitud máxima es el triángulo equilátero de altura D.

Estos enunciados completan para los casos $E > \frac{\pi}{2}$, $D \geqq \frac{\pi}{2}$ los teoremas de § 7 y § 8.

Luis A. Santaló

Instituto de Matemática, Rosario.

([12]) Ver Bonnesen-Fenchel, loc. cit., pág. 77.