SOBRE LA LONGITUD DE UNA CURVA DEL ESPACIO COMO VALOR MEDIO DE LAS LONGITUDES DE SUS PROYECCIONES ORTOGONALES

POR

L. A. Santaló

Sea C una curva del espacio de longitud L. Si L_ω es la longitud de la proyección de C sobre un plano normal a la dirección ω, en el n. 1 demostramos que la longitud L se expresa en función del *valor medio* $\overline{L}_\omega$ de las longitudes L_ω de las proyecciones respecto todas las direcciones, por la relación simple

$$L = \frac{4}{\pi} \overline{L}_\omega. \tag{1}$$

Para aplicar prácticamente esta fórmula se puede, por ejemplo, proyectar C sobre tres planos ortogonales y tomar como valor aproximado de $\overline{L}_\omega$, la media aritmética de las longitudes de las tres proyecciones obtenidas. Interesa entonces conocer los límites del error que se comete al aplicar la fórmula (1) para obtener L. Esto es lo que hacemos en el n. 2.

En lugar de tomar la media aritmética de las proyecciones según tres direcciones, se puede, mas generalmente, proyectar C según un mayor número de direcciones, por ejemplo, según las doce direcciones normales a las caras de un dodecaedro regular, o bien según las veinte de un icosaedro regular y tomar en cada caso la media aritmética de las longitudes de las proyecciones como valor aproximado de $\overline{L}_\omega$ para aplicar (1). También en estos casos hay que acotar el error posible. Para estos casos, estudiados en el n. 3, aplicaremos los resultados obtenidos por P. A. P. Moran al tratar el problema análogo, no para curvas, sino para cuerpos convexos (¹).

1. Consideremos un segmento de recta de longitud u. Para determinar una dirección en el espacio, tomaremos el punto ω en que el radio de una esfera fija E de radio unidad, corta a la superficie de la misma. Siendo ϑ, φ las coordenadas esféricas del punto ω (colatitud y longitud respectivamente) el elemento de área correspondiente al mismo lo expresaremos abreviamente por $d\omega = \operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$.

Suponiendo el segmento dado coincidente con la dirección origen de los ángulos ϑ, la longitud de su proyección sobre un plano normal a la dirección ω vale

$$u_\omega = u \operatorname{sen}\vartheta$$

y por tanto, multiplicando por $d\omega$ ambos miembros e integrando a toda la esfera unidad E resulta

$$\int_E u_\omega d\omega = \int_E u \operatorname{sen}^2\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = u \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\vartheta\, d\vartheta = \pi^2 u. \qquad (2)$$

El valor medio de la proyección u_ω vale por consiguiente,

$$\overline{u}_\omega = \frac{\int_E u_\omega d\omega}{\int_E d\omega} = \frac{\pi}{4} u \qquad (3)$$

que nos prueba que la relación (1) vale para segmentos.

Para una línea poligonal, aplicando (2) a cada uno de sus lados y sumando, resulta que la misma (3), y por tanto (1), vale también para líneas poligonales. Para una curva rectificable cualquiera, basta considerarla como límite de las poligonales inscritas y observar que el límite de las longitudes de las poligonales proyectadas es igual a la longitud de la proyección

(¹) P. A. P. Moran, *Measuring the surface area of a convex body*, The Annals of Mathematics, vol. 45, 1944, págs. 793-799.

de la curva, para toda dirección de proyección, para tener demostrada la validez general de (1).

Consecuencia. Puesto que el valor medio de una función está siempre comprendido entre los valores máximo y mínimo de la misma, como corolario de la fórmula (3) resulta:

Dada una curva fija C de longitud L, siempre existen direcciones ω del espacio, tales que la longitud L_ω de la proyección de C sobre un plano normal a ω cumpla la desigualdad

$$L_\omega \geqq \frac{\pi}{4} L$$

y otras direcciones ω_1 para las cuales se verifica

$$L_{\omega_1} \leqq \frac{\pi}{4} L.$$

2. Consideremos ahora un segmento de recta de longitud u y tres planos ortogonales entre sí; por ejemplo los tres planos $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ de un sistema de coordenadas x_1, x_2, x_3.

Llamando u_{12}, u_{13}, u_{23} a las longitudes de las proyecciones del segmento dado sobre los tres planos coordenados (de manera que u_{ij} es la longitud de la proyección sobre el plano x_i, x_j), la fórmula (1) nos dice que un valor aproximado de u será

$$u^* = \frac{4}{\pi} \frac{u_{12} + u_{13} + u_{23}}{3}. \tag{4}$$

Queremos ver entre que límites puede estar contenida la razón u^*/u entre la longitud así calculada y la verdadera.

Llamando u_i a la proyección del segmento sobre el eje x_i, es

$$u_{12}^2 = u_1^2 + u_2^2, \quad u_{13}^2 = u_1^2 + u_3^2, \quad u_{23}^2 = u_2^2 + u_3^2 \tag{5}$$

y además

$$u^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2. \tag{6}$$

Por tanto, sumando las igualdades (5), se tiene,

$$u_{12}^2 + u_{13}^2 + u_{23}^2 = 2\,u^2. \tag{7}$$

Debemos hallar los valores máximo y mínimo de la suma $u_{12} + u_{13} + u_{23}$ sabiendo que los tres números u_{ij} son positivos, iguales o menores que u y cumplen la relación (7).

La acotación superior se obtiene inmediatamente recordando que entre tres números positivos ξ, η, ζ cualesquiera existe siempre la relación

$$(\xi + \eta + \zeta)^2 \leqq 3 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

donde el signo de igualdad vale únicamente para el caso de ser $\xi = \eta = \zeta$ (²).

En nuestro caso, poniendo $\xi = u_{12}$, $\eta = u_{13}$, $\zeta = u_{23}$ y aplicando (7), será,

$$u_{12} + u_{13} + u_{23} \leqq \sqrt{6}\, u. \tag{8}$$

Para encontrar la acotación inferior, observemos que para cualquier valor fijo de u_{23}, según (7), es

$$(u_{12} + u_{13})^2 = 2\,u^2 - u_{23}{}^2 + 2\,u_{12}\,u_{13}$$

y por tanto, siendo los u_{ij} positivos, la suma $u_{12} + u_{13}$ es mínima cuando uno de los sumandos se anula. Suponiendo, por ejemplo, $u_{13} = 0$, entonces la igualdad $u_{12}{}^2 + u_{23}{}^2 = 2\,u^2$ nos dice que debe ser $u_{12} = u_{23} = u$. Se tiene por tanto

$$u_{12} + u_{13} + u_{23} \geqq 2\,u. \tag{9}$$

De (4), (8) y (9) se deduce

$$\frac{8}{3\pi} \leqq \frac{u^*}{u} \leqq \frac{4\sqrt{6}}{3\pi}$$

o sea

$$0{,}848\ldots \leqq \frac{u^*}{u} \leqq 1{,}039\ldots \tag{10}$$

(²) Ver por ej. la nota L. A. SANTALÓ, *Algunas desigualdades entre los elementos de un triángulo*, Mathematicae Notae, vol. III, 1943, pág. 65.

Estas acotaciones no se pueden mejorar, pues el signo de igualdad se obtiene, en la acotación inferior, para un segmento paralelo a uno de los ejes coordenados, y en la superior para un segmento paralelo a la recta $x_1 = x_2, x_1 = x_3$.

Si se trata de una curva C *cuyas proyecciones sobre los tres planos coordenados no tengan arcos múltiples*, o sea, arcos en los cuales se proyecten varios arcos de la curva, considerando su longitud como límite de la suma de las longitudes de los lados de poligonales inscritas, resulta que la acotación (10) vale también para C.

3. Consideremos ahora el mismo segmento de longitud u y supongamos que lo proyectamos sobre las doce caras de un dodecaedro regular. Llamando $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{12}$ a las longitudes de las doce proyecciones, aplicando (1) se obtiene el siguiente valor aproximado de u

$$u^* = \frac{4}{\pi} \frac{1}{12} \sum_1^{12} u_i. \tag{11}$$

Queremos ver también en este caso cuales son los valores extremos del cociente u^*/u entre la longitud así calculada y la verdadera.

Un método directo como el seguido en el caso anterior, no parece fácil en este caso. Vamos a seguir un camino indirecto, que si bien no da acotaciones precisas (pues los valores que obtendremos pueden seguramente mejorarse) sirve también para acotar el error posible de cometer.

Debemos recordar el siguiente resultado de P. A. P. Moran[1]. Sea K una superficie convexa cerrada de área F. Proyectando K ortogonalmente sobre las doce caras de un dodecaedro regular y llamando $F_1, F_2, F_3, \ldots F_{12}$ a las áreas de las proyecciones obtenidas, se puede tomar como valor aproximado de F la expresión

$$F^* = \frac{4}{12} \sum_1^{12} F_i, \tag{12}$$

teniendo lugar las acotaciones

$$0{,}918 \ldots \leq \frac{F^*}{F} \leq 1{,}079 \ldots \tag{13}$$

Para aplicar este resultado al caso actual de las curvas en lugar de las superficies convexas, consideremos el segmento de longitud u dado envuelto por un cilindro de revolución de radio ε, cuyo eje sea el mismo segmento, y el cual termine en los dos extremos por semiesferas del mismo radio ε. Tendremos así un cuerpo convexo K cuya superficie tiene el área

$$F = 2\pi\varepsilon u + 4\pi\varepsilon^2.$$

Al proyectar K sobre las caras del dodecaedro, entre el área F_i y la longitud u_i de las proyecciones de K y del segmento dado respectivamente, se verifica para cada proyección

$$F_i = 2\varepsilon u_i + \pi\varepsilon^2$$

Por tanto, según (12),

$$F^* = \frac{2}{3}\varepsilon\sum_1^{12} u_i + 4\pi\varepsilon^2.$$

Aplicando entonces (13) y pasando al límite para ε tendiendo a cero, se tiene

$$0{,}918\ldots \leqq \frac{\sum_1^{12} u_i}{3\pi u} \leqq 1{,}079\ldots$$

y recordando (11) se tiene finalmente que entre las magnitudes u^* y u vale la misma acotación (13) correspondiente a las superficies de los cuerpos convexos, o sea,

$$0{,}918\ldots \leqq \frac{u^*}{u} \leqq 1{,}079\ldots \qquad (14)$$

La única diferencia estriba en que en (13) las acotaciones no pueden mejorarse, puesto que hay superficies convexas particulares para las cuales, en determinadas posiciones, valen los signos de igualdad, mientras que en (14) las acotaciones deben poder mejorarse, puesto que los signos de igualdad no son alcanzados.

Como siempre, si en lugar de un segmento se tiene una curva C, *tal que sus proyecciones sobre las doce caras del dodecaedro regular carezcan de arcos múltiples*, considerándola como límite de poligonales inscritas, resulta que las acotaciones (14) valen también para ella.

Exactamente el mismo razonamiento sirve para el caso de considerar la media aritmética de las longitudes de las proyecciones de una curva C de longitud L sobre las veinte caras de un icosaedro regular; en este caso, Moran [1] ha probado que para las superficies de los cuerpos convexos vale la acotación

$$0{,}957\ldots \leqq \frac{F^*}{F} \leqq 1{,}048\ldots \tag{15}$$

siendo

$$F^* = \frac{4}{20} \sum_{1}^{20} F_i.$$

Para las curvas, llamando u_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, 20)$ a las longitudes de las proyecciones sobre las 20 caras y tomando como valor aproximado de la longitud u de la curva, la expresión,

$$u^* = \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{20} \sum_{1}^{20} u_i.$$

resulta válida la misma acotación (15), o sea,

$$0{,}957\ldots \leqq \frac{u^*}{u} \leqq 1{,}048\ldots. \tag{16}$$

Como siempre, esta acotación (16) supone que las proyecciones de la curva sobre las caras del icosaedro carecen de arcos múltiples.

4. Las acotaciones (14) y (16), aun siendo bastante buenas, ya hemos dicho que deben poder mejorarse.

Por simples razones de simetría parece evidente, que tanto en el caso del dodecaedro como en el del icosaedro, los valores máximo y mínimo del cociente u^*/u para el caso de un segmento, deben corresponder a las posiciones del mismo en que, supuesto colocado con un extremo en el centro del poliedro es normal a una cara, o es normal a una arista o tiene la dirección que pasa por uno de los vértices.

Como en estas posiciones es fácil calcular directamente los valores correspondientes de u^*, se tienen acotaciones que, si bien no quedan demostradas con todo rigor, parece muy probable que sean efectivamente las verdaderas.

Para el caso del dodecaedro se calcula que el valor de u^* para un segmento colocado con un extremo en el centro del poliedro y con la dirección normal a una cara, vale

$$u^* = u \, . \, 0{,}949 \ldots$$

y para la dirección de una diagonal que une dos vértices opuestos, vale

$$u^* = u \, . \, 1{,}011 \ldots .$$

Para la dirección normal a una arista el valor de u^* está comprendido entre los dos anteriores. Por tanto, la verdadera acotación para segmentos y por tanto para curvas rectificables cualesquiera, cuyas proyecciones carezcan de arcos múltiples, en el caso del dodecaedro parece que debe ser

$$0{,}949 \ldots \leqq \frac{u^*}{u} \leqq 1{,}011 \ldots . \tag{17}$$

En el caso del icosaedro, colocando el segmento con un extremo en el centro y en la dirección normal a una cara, es

$$u^* = u \, . \, 0{,}975 \ldots$$

y en la dirección de uno de los vértices es

$$u^* = u \, . \, 1{,}011 \ldots$$

Este valor es el mismo que se obtiene para el dodeacedro, lo cual es natural que sea así, puesto que los ángulos que forma un radio del icosaedro con sus caras son iguales a los que forma un radio del dodecaedro con las suyas.

En la dirección normal a una arista, el valor de u^* está comprendido entre estos dos. Por tanto, para segmentos y en consecuencia para curvas rectificables cualesquiera cuyas proyecciones sobre las caras del icosaedro carezcan de arcos múltiples, la verdadera acotación en el caso del icosaedro parece que debe ser

$$0{,}975\ldots \leqq \frac{u^*}{u} \leqq 1{,}011\ldots \tag{18}$$

Las suposiciones anteriores tienen en su apoyo el hecho de que es fácil calcular que los primeras derivadas parciales de u^* respecto los cosenos directores del segmento, son efectivamente nulas en las posiciones consideradas. Faltaría, sin embargo, probar que estas anulaciones corresponden efectivamente a máximos y mínimos absolutos.

ROSARIO, INSTITUTO DE MATEMÁTICA.

RESULTADO DEL CONCURSO ENTRE SOLUCIONISTAS DE PROBLEMAS PROPUESTOS EN EL AÑO QUINTO (1945)

En aplicación de lo dispuesto en el art. 4º de la Ordenanza de institución del Boletín del Instituto de Matemática *Mathematicæ Notæ,* el director del Instituto ha tomado en consideración las soluciones enviadas hasta el 1º de julio de 1946, haciendo al señor Delegado Interventor las propuestas correspondientes, que fueron aprobadas con Resolución fecha 25 de octubre de 1946, Exp. Nº 1183 - I - 1946 en la forma siguiente:

1º Adjudicar al estudiante Adolfo Daghetto del 6º año de la Escuela Industrial Anexa el premio correspondiente al año 1945.

2º Declarar desierto el concurso entre solucionistas no pertenecientes a la Facultad.

3º Encargar al Director del Instituto de Matemática la elección de uno o más libros de matemática o de física para entregarlos como premio al Sr. Adolfo Daghetto.