COMPLEMENTO A LA NOTA

SOBRE UN PROBLEMA DIOFANTICO

por

L. A. SANTALÓ

1. - ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. — En el número anterior de estas *Mathematicae Notae* (1) B. Levi resuelve el problema de hallar cuaternas de números enteros m, n, p, a, el a de una sola cifra, tales que los tres primeros verifiquen a la ecuación pitágórica

$$m^2 + n^2 = p^2 \tag{1.1}$$

y los números que se obtienen anteponiendo a cada uno de ellos la cifra a, sigan todavía verificando la misma ecuación (1.1).

Por ejemplo, para $m=5$, $n=12$, $p=13$ se cumple (1.1) y anteponiendo a cada uno de estos números la cifra $a=1$, se obtienen los números 15, 112, 113, que también satisfacen a la misma ecuación.

Demuestra B. Levi que el problema tiene infinitas soluciones, que clasifica en diferentes sucesiones infinitas correspondientes a los distintos casos que aparecen en el análisis del problema y después de estudiar varios de estos casos posibles, deja al cuidado del lector completar el estudio de los restantes.

Nos ha parecido interesante hacer este complemento, principalmente porque una simple observación nos ha permitido poner de manifiesto que puede prescindirse de la condición de que el número a sea de una sola cifra, llegándose al teorema general siguiente:

(1) B. LEVI, *Sobre un problema diofántico*, Mathematicae Notae, vol. V, pág. 108, 1945.

Indicando con a un entero positivo, para que existan tres números enteros m, n, p, que verifiquen la ecuación pitagórica (1. 1) *y cumplan la condición de que los números que se obtienen anteponiendo a cada uno de ellos el número a sigan verificando la misma ecuación* (1. 1), *es condición necesaria y suficiente que sea*

$$1 \leqq a \leqq 7, \tag{1.2}$$

en cuyo caso hay infinitas ternas m, n, p que cumplen las condiciones mencionadas.

Vamos a dividir la demostración en dos partes, probando primero que la condición es *necesaria* y luego que es *suficiente*.

1. *La condición es necesaria.* En la demostración de B. Levi la condición de que el número antepuesto a sea de una sola cifra se utiliza de una manera efectiva únicamente en el nº. 3, para demostrar que en la expresión (21) que se escribe

$$b = 5^{x-u}\, 2^{x-u-1+k}\, a_1 + 2^h\, m_2 \tag{1.3}$$

debe ser

$$x - u - 1 + k = h. \tag{1.4}$$

Ahora bien, vamos a demostrar que dicha condición es superflua puesto que de fórmulas escritas precedentemente por el autor se puede deducir la acotación (1. 2).

En los casos 1º. y 2º. a) de B. Levi, sin utilizar la hipótesis de que a sea de una sola cifra, se encuentra que a solamente puede tomar los valores 1, 2, 3. Estamos, pues, dentro de la acotación (1. 2).

En el caso 2º. b) se llega a la igualdad

$$b = 5 \,.\, 10^{x-u-1}\, a + m_1. \tag{1.5}$$

Por otra parte, utilizando siempre las mismas notaciones de B. Levi, se tiene

$$\frac{m^2}{b} = p + n > 2 \,.\, 10^{x+u-1} \tag{1.6}$$

siendo

$$m = 10^u m_1 < 10^x. \qquad (1.7)$$

De (1.5), (1.6) y (1.7) se tiene

$$m^2 = 10^{2u} m_1^2 > 2 \,.\, 10^{x+u-1} (5 \,.\, 10^{x-u-1} a + m_1)$$

o sea

$$m_1^2 > 10^{2(x-u)-1} a + 2 \,.\, 10^{x-u-1} m_1$$

que se puede escribir en la forma

$$(m_1 - 10^{x-u-1})^2 > 10^{2(x-u-1)} (10 a + 1).$$

Pero siendo $m_1 < 10^{x-u}$, de esta desigualdad se deduce

$$10^{2(x-u-1)} 9^2 > 10^{2(x-u-1)} (10 a + 1)$$

de donde

$$a < 8 \qquad (1.8)$$

lo que prueba la acotación (1.2).

Como confirmación de este resultado se observa que la afirmación contenida en la pág. 117 de la nota de B. Levi de que k puede tomar los valores 0, 1, 2, 3 (lo que equivale a decir que a puede tomar los valores 1, 2, 4, 8) debe modificarse excluyendo el valor $k = 3$. En efecto, para $k = 3$ se comprueba inmediatamente que los dos extremos de las desigualdades (37) se hacen iguales, lo que demuestra la no existencia de ningún valor de l intermedio entre ellos.

2º. *La condición es suficiente*. Una vez demostrado que la condición (1.2) es *necesaria*, nos falta probar que ella es *suficiente*, es decir, que para cada valor de $a \leqq 7$, existen infinitas ternas de números enteros m, n, p satisfaciendo las condiciones del teorema.

Para $a = 1$, 2, 3 han sido dados ejemplos por B. Levi y el caso $a = 4$ cae también dentro de los casos por él estudiados. Pero como al llegar a la pág. 115 B. Levi pasa a considerar particularmente el caso $a_1 = c = d = 1$, quedan de lado los casos $a = 5$, 6, 7. Para considerar estos casos partiremos de las fórmulas siguientes, obtenidas en la pág. 115:

$$b = 2^{h+l} c, \qquad u \geqq \frac{l-h+1}{2} \tag{1.9}$$

$$5^{h-k+1} a_1 + m_2 = 2^l c, \qquad p + n = 5^{2u} 2^{2u+h-l} \frac{m_2^2}{c} \tag{1.10}$$

$$5^{h-k} 2^{-k} \leqq m_2 < 5^{h-k+1} 2^{1-k} \tag{1.11}$$

$$5^{h-k} 2^{l-k+1} < \frac{m_2^2}{c} < 5^{h-k+1} 2^{l-k+2} \tag{1.12}$$

siendo además

$$m = 10^u m_1 = 10^u 2^h m_2. \tag{1.13}$$

La desigualdad (1.12) se puede escribir

$$5^{\frac{h-k}{2}} 2^{\frac{l-k+1}{2}} \sqrt{c} \leq m_2 < 5^{\frac{h-k+1}{2}} 2^{\frac{l-k+2}{2}} \sqrt{c}. \tag{1.14}$$

Para reunir (1.11) y (1.14) en una única sucesión de dos desigualdades, basta observar que

$$5^{h-k} 2^{-k} < 5^{\frac{h-k}{2}} 2^{\frac{l-k+1}{2}} \sqrt{c}, \quad 5^{h-k+1} 2^{1-k} < 5^{\frac{h-k+1}{2}} 2^{\frac{l-k+2}{2}} \sqrt{c}.$$

En efecto, ambas desigualdades, por simples transformaciones se ve que serán verificadas siempre que sea

$$5^{h-k+1} < 2^{k+l} c$$

y esta desigualdad es evidente teniendo en cuenta la primera igualdad (1.10).

Podemos por tanto reunir (1.11) y (1.14) en la expresión única

$$5^{\frac{h-k}{2}} 2^{\frac{l-k+1}{2}} \sqrt{c} < m_2 < 5^{h-k+1} 2^{1-k}. \tag{1.15}$$

Teniendo en cuenta la primera igualdad (1. 10) estas desigualdades equivalen a las siguientes

$$2^l c > 5^{\frac{h-k}{2}}\, 2^{\frac{1-k}{2}}\, 2^{\frac{l}{2}} \sqrt{c} + 5^{h-k+1} a_1 \qquad (1.16)$$

$$2^l c < 5^{h-k+1} (a_1 + 2^{1-k}). \qquad (1.17)$$

La (1. 16) equivale a

$$2^{\frac{l}{2}} > \frac{1}{2\sqrt{c}}\, 5^{\frac{h-k}{2}} (2^{\frac{1-k}{2}} + \sqrt{2^{1-k} + 20 a_1})$$

y la (1. 17) se puede escribir

$$2^{\frac{l}{2}} < \frac{1}{\sqrt{c}}\, 5^{\frac{h-k+1}{2}} \sqrt{a_1 + 2^{1-k}}.$$

Tomando logaritmos podemos escribir estas desigualdades en la forma más simple

$$l > (h-k)\frac{\log 5}{\log 2} + 2\frac{\log (2^{\frac{1-k}{2}} + \sqrt{2^{1-k} + 20 a_1})}{\log 2} - 2 - \frac{\log c}{\log 2} \qquad (1.18)$$

$$l < (h-k)\frac{\log 5}{\log 2} + \frac{\log 5 + \log (a_1 + 2^{1-k}) - \log c}{\log 2}. \qquad (1.19)$$

Escribiendo que estas dos desigualdades (1. 18) y (1. 19) deben ser compatibles, se tiene,

$$2\frac{\log (2^{\frac{1-k}{2}} + \sqrt{2^{1-k} + 20 a_1})}{\log 2} - 2 < \frac{\log 5 + \log (a_1 + 2^{1-k})}{\log 2}$$

o sea,

$$\frac{1}{4} (2^{\frac{1-k}{2}} + \sqrt{2^{1-k} + 20 a_1})^2 < 5 (a_1 + 2^{1-k})$$

que equivale a

$$2^k a_1 < 8. \qquad (1.20)$$

y como $a = 2^k a_1$, se comprueba de nuevo la acotación (1.8).

Siempre que sean dados dos valores k y a_1 que cumplan la condición (1.20), el hecho de que $\log 5 : \log 2$ sea un número irracional permite afirmar (como observó B. Levi en el artículo originario) que existirán infinitos valores enteros de h, l, c para los cuales se verifiquen al mismo tiempo las desigualdades (1.18) y (1.19).

Recordemos que h, l pueden ser cualesquiera mayores que 1; en cambio c debe ser impar, no múltiplo de 5 y divisor de a_1^2.

Una vez obtenidos h, l, c, mediante (1.10) se obtendrá m_2. Tomando para u un valor cualquiera que satisfaga a la desigualdad (1.9) conoceremos m por (1.13). Con el valor de $p-n=b$ deducido de (1.9) y el de $p+n$ dado por (1.10) calcularemos p y n. Como u, con tal de verificar la desigualdad (1.9), puede ser cualquiera, resultan infinitas soluciones para cada a y cada terna h, l, c de valores.

2. - Ejemplos. — Para $a=1$, 2, 3 han sido dadas varias sucesiones infinitas de ejemplos por B. Levi. Reproduciremos las más simples:

Caso $a=1$. Se tiene el ejemplo más simple ya citado

$$m=5, \quad n=12, \quad p=13 \qquad (2.1)$$

y la serie infinita que se obtiene dando a v valores enteros $\geqq 0$ en las expresiones

$$m=5 \,.\, 10^{v+1}, \quad n=125 \,.\, 10^{2v}-5, \quad p=125 \,.\, 10^{2v}+5.$$

Caso $a=2$. Se obtiene, para todo valor de $v \geqq 0$,

$$m=6 \,.\, 10^{v+2}, \quad n=18 \,.\, 5^4 \,.\, 10^{2v}-8, \quad p=18 \,.\, 5^4 \,.\, 10^{2v}+8;$$

así, para $v=0$ resulta

$$m=600, \quad n=11242, \quad p=11258. \qquad (2.2)$$

Caso $a=3$. Se obtiene para todo $v \geqq 0$,

$$m=9 \cdot 10^{v+2}, \quad n=27 \cdot 5^4 \cdot 10^{2v}-12, \quad p=27 \cdot 5^4 \cdot 10^{2v}+12$$

que para $v=0$ dan

$$m=900, \quad n=16863, \quad p=16887 \qquad (2.3)$$

Para $a=4$, 5, 6, 7 utilizaremos, como hemos dicho, las desigualdades (1.18) y (1.19). Se tiene:

Caso $a=4$. Es $a_1=1$, $k=2$. Como c debe ser divisor de a_1^2 debe ser $c=1$. Sustituyendo estos valores en (1.18) y (1.19) y haciendo los cálculos se obtienen las desigualdades

$$2{,}3219(h-2)+2{,}776<l<2{,}3219(h-2)+2{,}906.$$

El mínimo valor de h para el cual l puede ser entero es

$$h=12, \quad l=26.$$

De (1.9) se deduce entonces que debe ser $u \geqq 15/2$; pongamos $u=v+8$, siendo v un número entero cualquiera $\geqq 0$. Se tendrá, según (1.9), (1.10) y (1.13),

$$m_2=2^{26}-5^{11}, \quad m_1=(2^{26}-5^{11}) \cdot 2^{12}, \quad m=(2^{26}-5^{11}) \cdot 2^{12} \cdot 10^{v+8}.$$

$$b=p-n=2^{38}$$

$$p+n=(2^{26}-5^{11})^2 \cdot 2 \cdot 5^{15} \cdot 10^{2v+1}.$$

Resulta por tanto la sucesión infinita de soluciones

$$m=(2^{26}-5^{11}) \cdot 2^{12} \cdot 10^{v+8}$$

$$n=(2^{26}-5^{11})^2 \cdot 5^{15} \cdot 10^{2v+1}-2^{37}$$

$$p=(2^{26}-5^{11})^2 \cdot 5^{15} \cdot 10^{2v+1}+2^{37}.$$

Para $v=0$ resulta

$$m=7\ 487\ 790\ 694\ 400\ 000\ 000$$

$$n=101\ 985\ 296\ 138\ 342\ 452\ 893\ 077\ 778 \qquad (2.4)$$

$$p=101\ 985\ 296\ 138\ 342\ 727\ 770\ 984\ 722.$$

Caso $a=5$. Es $a_1=5$, $k=0$. Como c debe ser divisor de a_1^2 y no ser múltiplo de 5 únicamente puede ser $c=1$. Las desigualdades (1. 18) y (1. 19) se escriben

$$2{,}3219 \,.\, h + 5{,}051 < l < 2{,}3219 \,.\, h + 5{,}129.$$

El mínimo valor de h para el cual l puede ser entero es

$$h=6, \; l=19.$$

De (1. 9) se deduce que debe ser $u \geqq 7$; pongamos $u=v+7$, siendo $v \geqq 0$.

Según (1. 9), (1. 10) y (1. 13) se tendrá

$$m_2 = 2^{19} - 5^8, \quad m_1 = (2^{19} - 5^8) \,.\, 2^6, \quad m = (2^{19} - 5^8) \,.\, 2^6 \,.\, 10^{v+7}$$

$$b = p - n = 2^{25}$$

$$p + n = (2^{19} - 5^8)^2 \,.\, 2 \,.\, 5^{14} \,.\, 10^{2v}.$$

Se tiene así la sucesión infinita de soluciones

$$m = (2^{19} - 5^8) \,.\, 2^6 \,.\, 10^{v+7}$$

$$n = (2^{19} - 5^8)^2 \,.\, 5^{14} \,.\, 10^{2v} - 2^{24}$$

$$p = (2^{19} - 5^8)^2 \,.\, 5^{14} \,.\, 10^{2v} + 2^{24}.$$

Para $v=0$ resulta

$$m = 85\ 544\ 320\ 000.000$$

$$n = 109\ 044\ 174\ 615\ 461\ 738\ 409 \qquad (2.\ 5)$$

$$p = 109\ 044\ 174\ 615\ 495\ 292\ 841.$$

Caso $a=6$. Es $a_1=3$, $k=1$; c puede tomar los valores 1, 3, 9. Las desigualdades (1. 18) y (1. 19) se escriben

$$2{,}3219\,(h-1) + 4{,}278 - \frac{\log c}{\log 2} < l < 2{,}3219\,(h-1) + 4{,}322 - \frac{\log c}{\log 2}$$

Probando valores enteros de h y los posibles de c, se obtiene que los valores mínimos para h y l resultan al tomar

$$h=5, \quad c=3, \quad l=12.$$

De (1.9) se deduce entonces que debe ser $u \geqq 4$; pongamos $u=v+4$. Según (1.9), (1.10) y (1.13) se tendrá

$$m_2=(2^{12}-5^5) \,.\, 3, \quad m_1=(2^{12}+5^5) \,.\, 3 \,.\, 2^5,$$

$$m=(2^{12}-5^5) \,.\, 3 \,.\, 2^5 \,.\, 10^{v+4}$$

$$b=p-n=2^{17} \,.\, 3$$

$$p+n=(2^{12}-5^5)^2 \,.\, 5^8 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 10^{2v}.$$

Dando a v todos los valores $\geqq 0$ se obtiene así la sucesión de soluciones siguiente

$$m=(2^{12}-5^5) \,.\, 3 \,.\, 2^5 \,.\, 10^{v+4}$$

$$n=(2^{12}-5^5)^2 \,.\, 5^8 \,.\, 3 \,.\, 10^{2v}-2^{16} \,.\, 3$$

$$p=(2^{12}-5^5)^2 \,.\, 5^8 \,.\, 3 \,.\, 10^{2v}+2^{16} \,.\, 3.$$

Para $v=0$ resulta

$$m=932\ 160\ 000$$

$$n=1104\ 891\ 600\ 267 \qquad (2.6)$$

$$p=1104\ 891\ 993\ 483.$$

Caso $a=7$. Es $a=7$, $k=0$; c puede tomar los valores 1, 7, 49. Las desigualdades (1.18) y (1.19) se escriben

$$2{,}3219\,h+5{,}46-\frac{\log c}{\log 2}<l<2{,}3219\,h+5{,}49-\frac{\log c}{\log 2}.$$

Probando valores enteros de h y los posibles de c se obtiene que los valores mínimos para h y l resultan al tomar

$$h=1, \quad c=7, \quad l=5.$$

De (1.9) se deduce entonces que debe ser $u \geqq 5/2$; pongamos $u = v + 3$, con $v \geqq 0$. Según (1.9), (1.10) y (1.13) se tendrá

$$m_2 = (2^5 - 5^2) . 7, \; m_1 = (2^5 - 5^2) . 7 . 2, \; m = (2^5 - 5^2) . 2 . 7 . 10^{v+3}$$

$$b = p - n = 2^6 . 7$$

$$p + n = (2^5 - 5^2) . 7 . 5^5 . 2 . 10^{2v+1}.$$

Se obtiene así la sucesión infinita de soluciones

$$m = (2^5 - 5^2) . 2 . 7 . 10^{v+3}$$

$$n = (2^5 - 5^2)^2 . 5^5 . 7 . 10^{2v+1} - 2^5 . 7$$

$$p = (2^5 - 5^2)^2 . 5^5 . 7 . 10^{2v+1} + 2^5 . 7$$

Para $v = 0$ resulta

$$m = 98000, \quad n = 10718526, \quad p = 10718974. \tag{2.7}$$

Observemos finalmente que, por la manera como han sido obtenidos, los ejemplos numéricos (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) *son, en cada caso, los de mínimo número de cifras.*

Se observa también que las sucesiones obtenidas de soluciones no son, evidentemente, las únicas, puesto que las desigualdades (1.18) y (1.19), en cada caso, pueden verificarse para infinitos valores de h y l.

ROSARIO, INSTITUTO DE MATEMÁTICA.