SOBRE CIERTOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y SUS DETERMINANTES

1. — La resolución de un sistema de ecuaciones lineales con igual número de incógnitas es bien conocida. Sin embargo es interesante estudiar algunos tipos particulares que se presentan frecuentemente en las aplicaciones de física y de ingeniería, en los cuales se pueden dar condiciones simples para asegurar la solubilidad, determinar los signos de las soluciones y calcular éstas por aproximaciones sucesivas.

Cuando un sistema tiene una sola solución lo llamaremos determinado, teniendo en cuenta, si es homogéneo, la solución nula. En cualquier otro caso diremos que no es determinado, pudiendo ser indeterminado o incompatible.

Vamos a dar en primer término algunos criterios para reconocer si es determinado un sistema de la forma

$$\sum_l a_{il}\, x_l = b_i \qquad (i, l = 1, 2, \ldots, m)\,, \tag{1}$$

cuyos coeficientes verifican las desigualdades

$$a_{ii} \neq 0\,, \tag{2}$$

$$|a_{ii}| \geqq \sum_j |\, a_{ij} \,| \qquad (j \neq i)\,. \tag{3}$$

Como la propiedad no depende de los términos b_i podemos limitarnos a considerar el sistema

$$\sum_l a_{il}\, x_l = 0\,. \tag{4}$$

Designemos con $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ una de las soluciones y supongamos

$$|\, \xi_j \,| \leq |\, \xi_h \,| \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{5}$$

De $a_{hh}\,\xi_h = -\sum_j a_{hj}\,\xi_j$ se deduce

$$|a_{hh}\,\xi_h| \leq \sum_j |a_{hj}\,\xi_j| \leq |\xi_h| \sum_j |a_{hj}| \quad (j \neq h). \qquad [6]$$

2. — *Si en* [3] *está excluída la igualdad el sistema es determinado.* Basta probar que [4] sólo admite la solución nula. Si hubiera otra, sería $\xi_h \neq 0$ y de [6] resultaría $|a_{hh}| \leq \Sigma\,|a_{hj}|$, en tanto que por hipótesis debe ser $|a_{hh}| > \Sigma\,|a_{hj}|$. El resultado puede enunciarse así:

Un determinante cuyas filas satisfacen la condición

$$|a_{ii}| > \sum_j |a_{ij}| \quad (j \neq i), \qquad [7]$$

es distinto de cero (¹). Veremos más adelante (§ 8) que en el caso particular de elementos reales y $a_{ii} > 0$ el determinante es *positivo*, lo que generaliza un teorema de LUCIEN LÉVY según el cual un determinante con

$$a_{ii} < 0\,, \quad a_{ij} > 0\,, \quad |a_{ii}| > \sum_j a_{ij} \quad (j \neq i)$$

es positivo o negativo según que sea m par o impar (²).

3. — Diremos que el sistema es *simple* cuando no contiene como parte propia otro sistema con tantas ecuaciones como incógnitas.

Para que el sistema, supuesto simple, sea determinado, es suficiente que alguna de sus ecuaciones satisfaga la condición [7].

Basta probar que [4] sólo admite la solución nula. Si hubiera otra, sería $|a_{hh}| \leq \Sigma\,|a_{hj}|$ por las razones adelantadas en el § 2. Luego, por [3], $|a_{hh}| = \Sigma\,|a_{hj}|$. Pero esta igualdad sólo es compatible con

$$a_{hh}\,\xi_h = -\sum_j a_{hj}\,\xi_j \quad (j \neq h)$$

(¹) Reemplazando a_{ii} por $a_{ii} - \delta$ e igualando el determinante a cero, se tiene una ecuación en δ que desempeña un importante papel en diversas teorías. El teorema permite acotar sus raíces, pues éstas deberán verificar algunas de las desigualdades $|a_{ii} - \delta| \leq \Sigma\,|a_{ij}|$ $(j \neq i)$, de donde

$$\text{mín}\,(|a_{ii}| - \sum_j |a_{ij}|) \leq |\delta| \leq \text{máx}\,(|a_{ii}| + \sum_j |a_{ij}|) \quad (j \neq i)\,.$$

(²) L. LÉVY, *Sur la possibilité de l'équilibre électrique*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, París, CXIII, 1881, pp. 706-708.

cuando $a_{hj} = 0$ para toda incógnita x_j tal que $|\xi_j| < |\xi_h|$. Por lo tanto, si se toma el grupo de las incógnitas de mayor módulo, a cada una de ellas le corresponde una ecuación que sólo contiene esas incógnitas y cuyos coeficientes verifican la igualdad $|a_{hh}| = \Sigma\,|a_{hj}|$. Se formaría así un sistema parcial que debería coincidir con el propuesto, por ser éste simple, resultado absurdo porque el sistema dado contiene por hipótesis alguna ecuación que satisface la condición [7].

4. — Cuando todas las ecuaciones de un sistema simple homogéneo verifican la igualdad

$$|a_{ii}| = \sum_j |a_{ij}| \qquad (j \neq i)\,, \tag{8}$$

se prueba como en el § 3 que las incógnitas de mayor módulo determinan un sistema parcial que debe coincidir con el propuesto; por lo tanto todas las incógnitas tienen el mismo módulo, el cual, si es distinto de cero, podrá suponerse igual a la unidad. Considerando entonces la igualdad $\Sigma\, a_{pq}\, \xi_q = 0$, observemos que multiplicar a_{pq} por ξ_q es girar el vector representativo del primer complejo un cierto ángulo dado por el argumento del segundo. Como el vector a_{pp} tiene una longitud igual a la suma de las longitudes de los a_{pq} $(q \neq p)$, los giros deben ser tales que todos los $a_{pq}\xi_q$ queden situados en oposición al vector $a_{pp}\xi_p$.

Para calcular la eventual solución de módulo 1, podrá procederse como sigue: para cada p se abate a_{pp} sobre el semieje real negativo, y todos los a_{pq} $(q \neq p)$ sobre el semieje real positivo; estas rotaciones están representadas por los complejos

$$\xi_{pp} = -\,\overline{a}_{pp}/|a_{pp}|\ ,\quad \xi_{pq} = \overline{a}_{pq}/|a_{pq}| \qquad (q \neq p) \tag{9}$$

y tendrán que ser proporcionales (con factor de proporcionalidad de módulo 1) a ξ_p, ξ_q.

Por supuesto, para distintos valores de p deben encontrarse resultados concordantes; de lo contrario el sistema sólo admite la solución nula (¹).

(¹) El resultado puede expresarse así: la condición necesaria y suficiente para que haya una solución no nula es que siendo p, q, r tres índices distintos cualesquiera las razones

$$\frac{a_{pq}\, a_{qp}}{a_{pp}\, a_{qq}}\ ,\quad \frac{a_{pr}\, a_{qp}}{a_{pp}\, a_{qr}}$$

sean respectivamente reales positivas y reales negativas (o nulas).

Suponiendo en particular los coeficientes reales, para reconocer la existencia de soluciones no nulas basta cambiar los signos de los elementos principales en la matriz del sistema y *observar luego si en todas las filas las variaciones de signo se producen en los mismos lugares.*

5. — Cuando el sistema no es simple, contiene necesariamente uno o más sistemas simples sin incógnitas comunes dos a dos, separados los cuales puede quedar todavía un sistema residual. Éste tiene más incógnitas que ecuaciones y lo mismo sucede con cualquier sistema contenido en él.

Supongamos que en el residuo se atribuyen valores numéricos a las incógnitas de los sistemas simples. Se obtiene un sistema R_1 de tantas incógnitas como ecuaciones, el cual, como vamos a ver, posee una solución determinada que depende de los valores adoptados. En efecto, R_1 no puede contener ningún sistema simple cuyas ecuaciones verifiquen todas la igualdad [8] porque al atribuir un valor a una incógnita disminuye el segundo miembro de la desigualdad [3]. Luego, por el criterio del § 3 todos los sistemas simples de R_1 son determinados. Una vez resueltos y sustituídas las soluciones en el residuo de R_1, se obtiene un nuevo sistema R_2 que está en las mismas condiciones que R_1. El proceso termina cuando R_n es simple o sólo contiene sistemas simples, los cuales, como ya se explicó, son determinados.

El razonamiento precedente muestra que *el sistema es incompatible, indeterminado o determinado, según que sus sistemas simples verifiquen una de estas tres condiciones*: *a*) *alguno es incompatible*; *b*) *todos son compatibles, pero alguno es indeterminado*; *c*) *todos son determinados.* Cuando sólo interesa reconocer si el sistema es determinado o no, basta aplicar a los sistemas simples los criterios de los § 3 y 4.

Damos a continuación algunos ejemplos que pueden orientar al lector:

a) $5 x_1 - 3 x_5 + 2 x_7 = 7, \quad x_1 + x_2 = 5, \quad 4 x_8 + 2 x_4 - x_6 - x_9 = i,$

$3 x_3 + 6 x_4 + 2 x_6 + x_9 = 2, \quad 8 x_1 + 17 x_5 - 7 x_7 = 5, \quad 3 x_8 - 2 x_4 - 5 x_6 = 0,$

$5 x_1 - 7 x_5 - 12 x_7 = 0, \; 2 x_1 + x_2 - 4 x_4 + 7 x_8 = 4, \; x_3 - 2 x_4 + 2 x_6 - 5 x_9 = 11:$

incompatible.

b) $-x-2u+w=1, \quad 6y-5u+11v=3, \quad 5y-2z+3v=2,$

$4x+3y-7z=0, \quad -2x+3u+5w=4, \quad 5x+3u+2w=5:$

determinado.

c) $x+(-1+i\sqrt{3})y+iv=0, \quad ix+(\sqrt{3}+i)z-u=0,$

$4ix+(-\sqrt{3}-i)y+2v=0, \quad (1+i\sqrt{3})y+(\sqrt{3}-i)z+4u=0,$

$$2x+(1-i\sqrt{3})y-4iv=0:$$

indeterminado.

6. — El caso especial de un sistema cuyos coeficientes satisfacen las condiciones

$$a_{ii}>0\ , \quad a_{ij}\leq 0 \quad (i \neq j)\ , \quad \sum_l a_{il} \geq 0 \quad (i,j,l=1,2,\ldots,m) \qquad [10]$$

es interesante porque se presenta a menudo en las aplicaciones, por ejemplo, en electricidad, en el estudio de los estados de equilibrio de los conductores y en el cálculo de redes de distribución.

Para que un sistema simple del tipo [10] *sea determinado es necesario y suficiente que contenga alguna ecuación con* $\Sigma\, a_{ij}>0$. El criterio permite reconocer fácilmente si un sistema compuesto, del tipo [10], es determinado o no.

7. — Vamos a demostrar el teorema del § 3 por un procedimiento que, en el caso particular caracterizado por la fórmula [10], suministra informaciones adicionales que utilizaremos más adelante. Supongamos que los coeficientes del sistema [1] verifican las desigualdades [2] y [3], pero que es precisamente

$$|\,a_{ii}\,| > \sum_j |\,a_{ij}\,| \qquad (j \neq i) \qquad [11]$$

para algunos valores de i. Permutando los índices, si es preciso, puede admitirse que esto sucede en la primera ecuación. Para eliminar x_1 de las demás basta multiplicar por a_{11} toda ecuación que tenga $a_{i1} \neq 0$ y restarle la primera, previamente multiplicada por a_{i1}. Es de señalar que la ecuación transformada $\Sigma\, a'_{il}\, x_l = b_i$. satisface también la desigualdad [11]. En efecto, es

$$a'_{ij} = a_{ij}\, a_{11} - a_{1j}\, a_{i1}\ ,$$

de donde

$$\sum_j | a'_{ij} | \leqq | a_{11} | \sum_j | a_{ij} | + | a_{i1} | \sum | a_{1j} | \quad (j \neq 1, i) ;$$

pero

$$\sum | a_{ij} | \leqq | a_{ii} | - | a_{i1} | \quad \text{y} \quad \sum | a_{1j} | < | a_{11} | - | a_{1i} | \quad (j \neq 1, i);$$

por lo tanto

$$\sum_j | a'_{ij} | < | a_{ii} \, a_{11} | - | a_{i1} \, a_{1i} | \leqq | a'_{ii} | \neq 0. \qquad [12]$$

Como el sistema es simple hay algún $a_{i1} \neq 0$ $(i > 1)$ y por consiguiente, una vez eliminada x_1, el sistema formado por las $m - 1$ últimas ecuaciones contendrá alguna que verifique la desigualdad [11]. Esto permite reiterar el proceso y transformar el sistema en otro equivalente:

$$\sum_l A_{il} \, X_l = B_i \qquad (l \geq i) \qquad [13]$$

cuyas incógnitas son las primitivas, tomadas en cierto orden. Por [12] es $A_{ii} \neq 0$, lo que prueba que el sistema es determinado.

Queremos señalar que en el caso particular de un sistema a coeficientes reales que satisfacen las condiciones

$$a_{ii} > 0 \,, \quad a_{ii} \geq \sum_j | a_{ij} | \qquad (j \neq i), \qquad [14]$$

con exclusión de la igualdad para ciertos valores de i, se tiene $A_{ii} > 0$ porque en la igualdad $a'_{ii} = a_{ii} a_{11} - a_{i1} a_{1i}$ es $a_{ii} \geq |a_{i1}|$ y $a_{11} > |a_{1i}|$.

Por último, si se supone además $a_{ij} \leq 0$ $(i \neq j)$ y $b_i \geq 0$, se deduce $B_i \geq 0$ y, por lo tanto, $X_l \geq 0$.

8. — A continuación enunciaremos varias proposiciones sobre determinantes que vienen a expresar con otras palabras los resultados obtenidos más arriba al dar criterios para reconocer si un sistema posee una sola solución. Como es natural las propiedades pueden establecerse también directamente introduciendo algunos cambios sin importancia en las demostraciones.

Consideramos *exclusivamente* determinantes cuyos elementos satisfagan las desigualdades [2] y [3]. Puede suceder que sea $a_{ij} = 0$ cuando se atribuye a i ciertos valores especiales y a j los demás. En tal caso diremos que el determinante es compuesto, observando que por la regla de Laplace es un producto de dos menores complementarios, uno de los cuales es el menor principal definido por los valores que el índice i puede asumir. Cuando el determinante no es compuesto diremos que es simple.

Un determinante compuesto es un producto de menores principales, todos simples, salvo uno a lo sumo, que es ciertamente distinto de cero. Por lo tanto, para saber si el determinante es nulo basta examinar sus menores simples.

Para que un determinante simple sea distinto de cero basta que alguna de sus filas verifique la desigualdad [7]. Si esto no sucede, las normas indicadas en el § 4 permiten decidir si se anula.

En particular cuando los elementos de un determinante simple verifican las relaciones [10], la condición necesaria y suficiente para que se anule es que todas sus filas verifiquen las igualdades [8].

Observemos por último que un determinante a elementos reales que verifican las relaciones [14] *no puede ser negativo*. Precisamente: *es nulo o positivo según que contenga o no un menor principal cuyas filas verifiquen las igualdades* [8]. Estas conclusiones se aplican en particular al tipo [10].

9. — Volviendo a los sistemas lineales vamos a completar los resultados del § 6 y a dar algunas referencias sobre los signos de las soluciones, en la hipótesis que los coeficientes verifican las desigualdades [10] y los términos conocidos son números reales de un mismo signo. Para fijar las ideas tomemos

$$a_{ii}>0,\ a_{ij}\leq 0\quad (i\neq j),\quad \sum_l a_{il}\geq 0,\ b_i\geq 0\quad (i,j,l,=1,2,\ldots,m)\qquad [15]$$

Designemos con $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ una solución real y supongamos $\xi_h \leq \xi_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$. La ecuación

$$\sum_l a_{hl}\, x_l = b_h\,, \qquad [16]$$

da origen a la desigualdad

$$\xi_h \sum_l a_{hl} \geq b_h \geq 0. \qquad [17]$$

Si se supone que [16] contiene efectivamente alguna incógnita con valor mayor que ξ_h, la desigualdad se hace más estricta:

$$\xi_h \sum_l a_{hl} > b_h \geq 0. \qquad [18]$$

Estas fórmulas permiten distinguir si es indeterminado o incompatible un sistema simple cuyas ecuaciones verifican las igualdades

$$\sum_{l} a_{il} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad [19]$$

En el primer caso siempre hay alguna solución real. Por [17], debe ser $b_h = 0$; además [18] es absurda, lo que muestra que [16] sólo contiene incógnitas iguales a ξ_h. Así, pues, las ecuaciones correspondientes a las incógnitas mínimas forman un sistema homogéneo que debe coincidir con el propuesto, por ser éste simple. Recíprocamente, si el sistema dado es homogéneo, por lo visto en el § 4, es indeterminado, con todas las incógnitas iguales a un mismo número arbitrario. Resumiendo:

Un sistema simple del tipo [15] *cuyas ecuaciones verifican las igualdades* [19] *es indeterminado o incompatible según que sea homogéneo o no.*

Este criterio y el del § 6 permiten discriminar sin cálculos, por simple examen, si un sistema compuesto es incompatible, indeterminado o determinado.

Las fórmulas [17] y [18] también permiten reconocer los signos en la solución, forzosamente real, de un sistema simple y determinado. Supongamos que es $\xi_h \leq 0$. Por [17] es $b_h = 0$; además [18] es absurda y, como más arriba, se concluye que el sistema es homogéneo. Pero entonces todas las incógnitas son nulas. Resumiendo:

La solución de un sistema simple y determinado del tipo [15] *consta sólo de ceros o sólo de números positivos* (> 0), *según que el sistema sea homogéneo o no.*

Cuando el sistema se supone determinado y del tipo [15], pero compuesto, las soluciones de los sistemas simples componentes no contienen números negativos. En tal caso el sistema R_1, definido en el § 5, es también determinado y del tipo [15]. Las condiciones, pues, se repiten y la conclusión vale para $R_2, R_3, \ldots R_n$. Luego, *la solución del sistema dado no contiene números negativos* (1). Si alguno de ellos es nulo, las fórmulas [17] y [18] muestran, como más arriba, que existe un sistema parcial homogéneo con tantas incógnitas como ecuaciones. Por consiguiente: *cuando los sistemas simples son*

---

(1) Las últimas líneas del § 7 sugieren otra demostración de esta propiedad.

no-homogéneos, la solución consta exclusivamente de números positivos (> 0) (1).

10. — También se presentan con frecuencia sistemas que satisfacen la relación [2] y la desigualdad

$$|a_{ii}| \geq \sum_{i} |a_{ij}| \qquad (i \neq j\ ;\ i, j = 1, 2, \ldots m), \qquad [20]$$

que es análoga a [3]. Tales sistemas están vinculados a los que hemos considerado hasta ahora y, para averiguar si son determinados, basta aplicar los criterios que hemos dado más arriba al sistema que resulta de permutar a_{ij} con a_{ji}. Esta operación no hace perder a un sistema su carácter de simple, lo que permite establecer sin dificultad criterios análogos a los expuestos en los § 3 y 6. Sin embargo es de señalar que no todas las propiedades dadas anteriormente son susceptibles de una extensión semejante: así, por ejemplo, a un sistema indeterminado puede corresponder un sistema incompatible.

Aquí nos limitamos a dar una demostración de que la solución de un sistema simple y determinado que satisface las condiciones

$$a_{ii} > 0\ ,\ a_{ij} \leq 0 \quad (i \neq j)\ ,\quad \sum_{l} a_{lj} \geq 0,\ b_i \geq 0 \quad (i, j, l = 1, \ldots, m), \qquad [21]$$

---

(1) Es posible dar diversas interpretaciones físicas de las conclusiones precedentes. Un ejemplo interesante es el de las redes eléctricas a corriente continua. Designemos con x_h el potencial del nudo P_h y con g_{hk} la conductancia que vincula los nudos P_h y P_k. La corriente que se dirige del primero al segundo es $g_{hk}(x_h - x_k)$, y, si se supone que en P_h se consume una corriente de intensidad i_h, basta aplicar a ese nudo la primera ley de Kirchhoff para obtener $i_h + \sum_k g_{hk}(x_h - x_k) = 0$. En éste sistema simétrico del tipo [10] los coeficientes verifican las igualdades [19]. Para que sea simple es necesario y suficiente que la red no pueda descomponerse en dos redes desconectadas; en tal caso las corrientes consumidas deben ser nulas y las tensiones resultan indeterminadas e iguales (§ 9).

Si se suponen conocidos los potenciales de ciertos nudos que llamaremos puntos de alimentación, disminuye el número de incógnitas y también el de ecuaciones, pues basta tomar una de éstas para cada uno de los nudos restantes. Se tiene entonces $\Sigma\, a_{ij} > 0$, a menos que la ecuación corresponda a un nudo que no está unido directamente a ningún punto de alimentación. Decir que el sistema es simple equivale a decir que la red no puede ser descompuesta en partes que no tengan nudos comunes, salvo eventuales puntos de alimentación. En tal caso los potenciales están determinados, (§ 6); además, cuando los puntos de alimentación están al mismo potencial, basta consumir corriente en uno de los nudos para que baje en todos la tensión, pues, suponiendo por sencillez que dicho potencial es nulo, todas las ξ_j son negativas (§ 9).

consta sólo de ceros o sólo de números positivos, según que el sistema sea homogéneo o no (1).

Puede suponerse $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \ldots \leq \xi_p \leq 0 < \xi_{p+1} \leq \ldots \leq \xi_m$, con lo que, sumando las p primeras ecuaciones, resulta

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j} a_{ij}\, \xi_j = \sum_{j} \xi_j \sum_{i=1}^{p} a_{ij} = \sum_{i=1}^{p} b_i\,,$$

de donde

$$\sum_{j=1}^{p} \xi_j \sum_{i=1}^{p} a_{ij} = \sum_{i=1}^{p} b_i - \sum_{j=p+1}^{m} \xi_j \sum_{i=1}^{p} a_{ij}\,.$$

Examinando los signos de los dos miembros se observa que el primero no es positivo, en tanto que el segundo no es negativo. Por consiguiente ambos son nulos, lo que permite concluir que es

$$b_i = a_{ij} = 0 \qquad (i \leq p \;;\; j > p),$$

vale decir que las p primeras ecuaciones son homogéneas y sólo contienen las p primeras incógnitas. Tal cosa no puede suceder, a menos que sea $p = m$. Pero, por otra parte, si el sistema dado es homogéneo, todas las incógnitas son nulas.

11. — En determinados casos es conveniente buscar la solución de un sistema lineal con tantas ecuaciones como incógnitas por aproximaciones sucesivas, por ejemplo, cuando el número es grande y no es preciso conocer exactamente la solución (2). Si los coeficientes a_{ii} son distintos de cero, lo más simple es llevar el sistema a la forma

$$x_i = \sum_{j} \alpha_{ij}\, x_j + \beta_i \qquad (i\,, j = 1, 2, \ldots, m) \qquad [22]$$

poniendo $\alpha_{ii} = 0$, $\alpha_{ij} = -\, a_{ij}/a_{ii}$; adoptar luego la aproximación

(1) La demostración está inspirada en una análoga que, con otro objeto, da el Dr. B. Levi en su libro *Sistemas de ecuaciones analíticas en términos finitos, diferenciales y en derivadas parciales*, de inminente publicación.

(2) El problema, puesto de tal manera, pero con vistas diferentes de la nuestra, ha sido tratado en varias oportunidades por diversos autores. Ver, por ej.: H. Hotelling. *Some New Methods in Matrix Calculation.* Annals of Mathematical Statistics. Vol. XIV (1943).

inicial $(\xi_{10}, \xi_{20}, \ldots, \xi_{m0})$, y calcular las siguientes por medio de la fórmula

$$\xi_{i,n+1} = \sum_j \alpha_{ij}\, \xi_{jn} + \beta_i\,. \qquad [23]$$

Cuando se sabe que el proceso converge, basta pasar al límite para obtener una solución. Sólo hay interés en efectuar los cálculos cuando ella es única; en ese sentido puede ser útil el siguiente criterio:

Si el sistema [1] *satisface las condiciones* [2] [3] *o* [2] [20], *basta que sea distinto de cero el determinante*

$$\begin{vmatrix} |a_{11}| & -|a_{12}| & \ldots & -|a_{1m}| \\ -|a_{21}| & |a_{22}| & \ldots & -|a_{2m}| \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -|a_{m1}| & -|a_{m2}| & \ldots & |a_{mm}| \end{vmatrix} \qquad [24]$$

para que exista una solución determinada y hacia ella converjan las aproximaciones sucesivas, independientemente de los valores iniciales.

a) Supongamos que el sistema es homogéneo y satisface las condiciones [2], [3]. Tomemos $\eta_{i0} = \text{máx.}\ |\xi_{j0}|$, $\eta_{i,n+1} = \sum_j |\alpha_{ij}|\, \eta_{jn}$. Poniendo $\Delta\eta_{in} = \eta_{i,n+1} - \eta_{in}$ resulta

$$\Delta\eta_{in} = \sum_j |\alpha_{ij}|\, \Delta\eta_{j,n-1}\,. \qquad [25]$$

Pero $\eta_{i1} = \Sigma\, |\alpha_{ij}|\, \eta_{j0} = \eta_{i0}\, \Sigma\, |\alpha_{ij}| \leq \eta_{i0}$, por la condición [3]. Luego, $\Delta\eta_{i0} \leq 0$, y, por la fórmula [25], $\Delta\eta_{in} \leq 0$, de donde resulta la convergencia de η_{in}. Los límites son necesariamente nulos porque deben constituir una solución del sistema $y_i = \sum_j |\alpha_{ij}|\, y_j$, cuyo determinante es distinto de cero. Como por otra parte se tiene por inducción

$$|\xi_{in}| \leq \eta_{in}, \qquad [26]$$

resulta probada la convergencia del proceso. Además el sistema es determinado, pues si admitiera una solución propia, tomándola como punto de partida, todas las aproximaciones coincidirían con ella y ξ_{in} no tendría límite cero.

b) Supongamos que el sistema es homogéneo y satisface las condiciones [2], [20]. Poniendo $\alpha_j = 1 - \sum_i |\alpha_{ij}|$ y $\sigma_n = \sum_i \eta_{in}$, resulta

$$\sigma_{n+1} = \sum_i \sum_j |\alpha_{ij}| \eta_{jn} = \sum_j \eta_{jn} \sum_i |\alpha_{ij}| = \sum_j (1 - \alpha_j) \eta_{jn} = \sigma_n - \sum_j \alpha_j \eta_{jn}$$

De ahí $0 \leq \alpha_j \eta_{jn} \leq \sigma_n - \sigma_{n+1}$, lo que muestra que la sucesión σ_n es monótona decreciente. Existe entonces lím $\sigma_n \geq 0$ y por consiguiente es lím $\eta_{jn} = 0$, *siempre que* α_j *no sea nula.* Como el determinante [24] es distinto de cero, necesariamente hay algún valor de j con esa propiedad; para probar que *para todo* j es lím $\eta_{jn} = 0$, supongamos que sólo lo sea para $j \leq p < m$. Si en la desigualdad

$$\eta_{j,n+1} \geq |\alpha_{jh}| \eta_{hn} \geq 0$$

se supone $j \leq p$, $h > p$, como η_{jn} tiende a cero y η_{hn} no, se deduce $\alpha_{jh} = 0$. Como por otra parte para $j > p$ es necesariamente $\alpha_j = 0$, el menor principal formado por las últimas $m - p$ filas y columnas satisface la condición $|a_{hh}| = \sum_j |a_{jh}|$ lo que, en virtud de lo visto en el § 8, significaría que el determinante [24] es nulo. Este absurdo prueba que para todo j es lím $\eta_{jn} = 0$ y, como subsiste la desigualdad [26], también lím $\xi_{jn} = 0$. Demostrada de esta manera la convergencia del proceso, se prueba, como en el caso *a*), que el sistema es determinado.

c) Supongamos por último que el sistema no es homogéneo. Hay una solución única $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ porque ya se demostró en *a*) y *b*) que el sistema homogéneo correspondiente es determinado. Si se adopta arbitrariamente la aproximación de partida y se calculan las siguientes por la fórmula [23], resulta

$$\xi_i - \xi_{i;n+1} = \sum_j \alpha_{ij} (\xi_j - \xi_{jn})$$

y, por lo que se vió en *a*) y *b*), lím $(\xi_i - \xi_{i,n+1}) = 0$.

12. — Si se supone en particular que el sistema satisface una de estas dos condiciones:

$$|a_{ii}| > \sum_j |a_{ij}| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m) \qquad [27]$$

$$|a_{ii}| > \sum_i |a_{ij}| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m), \qquad [28]$$

es fácil probar directamente, sin apoyarse en las conclusiones de los apartes anteriores, que el sistema tiene una solución determinada hacia la cual convergen las aproximaciones sucesivas. Además es fácil acotar el error.

Consideremos en primer término el caso [27]. Si el sistema es homogéneo, poniendo $k = \text{máx} \sum_j |a_{ij}| < 1$, $\alpha_n = \text{máx} |\xi_{in}|$, se tiene $|\xi_{i,n+1}| \leq \sum_j |\alpha_{ij}\xi_{jn}| \leq k\alpha_n$, de donde $\alpha_{n+1} \leq k\alpha_n$. Por lo tanto $\text{lím}\, \xi_{in} = 0$. Esto prueba no sólo que el proceso converge, sino también, como se vió en el § 11, *a*) que el sistema es determinado. El caso del sistema no homogéneo puede tratarse como en el § 11, *c*) o de este modo: poniendo $\Delta\xi_{in} = \xi_{i,n+1} - \xi_{in}$ y $\beta_n = \text{máx} |\Delta\xi_{in}|$, es $\beta_{n+1} \leq k\beta_n$; la serie $\Sigma\beta_n$ es, pues, convergente, y también la sucesión de término general

$$\xi_{in} = \xi_{io} + \sum_{h=0}^{n-1} \Delta\xi_{ih}.$$

El error que se comete al detener el cálculo en $\Delta\xi_{i,n-1}$ está acotado por estas desigualdades:

$$|\xi_i - \xi_{in}| \leq \sum_{h=n}^{\infty} |\Delta\xi_{ih}| \leq \beta_{n-1}(k + k^2 + \ldots) = \frac{k}{1-k}\beta_{n-1}.$$

Sea ahora el caso [28]. Si el sistema es homogéneo, poniendo $k = \text{máx} \sum_i |\alpha_{ij}|$ y $\sigma_n = \sum_i |\xi_{in}|$, se tiene

$$\sigma_{n+1} = \sum_i |\xi_{i,n+1}| \leq \sum_i \sum_j |\alpha_{ij}\xi_{jn}| = \sum_j |\xi_{jn}| \sum_i |\alpha_{ij}| \leq k\sigma_n.$$

De ahí $\text{lím}\, \sigma_n = 0$ y por lo tanto $\text{lím}\, \xi_{in} = 0$, lo que prueba que el proceso converge y que el sistema es determinado. Si el sistema no es homogéneo se razona como en el § 11, *c*) o de esta manera: poniendo $\gamma_n = \sum_i |\Delta\xi_{in}|$ es $\gamma_{n+1} \leq k\gamma_n$, con lo que converge ξ_{in} y el error cometido, como más arriba, no supera à $\frac{k}{1-k}\gamma_{n-1}$.

RAFAEL LAGUARDIA.

UNA PROPIEDAD CARACTERISTICA DEL CIRCULO

1. PRELIMINARES. — Un conjunto de puntos del plano se llama *convexo*, cuando el segmento que une dos cualesquiera de ellos está formado por puntos pertenecientes al conjunto. Todo conjunto convexo está limitado por una curva tal que cualquier recta del plano sólo puede tener comunes con ella uno o dos puntos o todo un único segmento, lo cual puede tomarse como definición de curva convexa. A un conjunto de puntos convexo más la curva que lo limita lo llamaremos *figura convexa.*

Una figura convexa puede ser *limitada*, es decir, situada toda ella a distancia finita (por ejemplo un círculo), o *ilimitada*, extendiéndose hasta el infinito, por ejemplo la parte de plano comprendida entre los lados de un ángulo.

Un teorema notable sobre figuras convexas, enunciado por HELLY y demostrado por RADON (1) y KÖNIG (2), es el siguiente, que enunciamos sólo para el caso del plano, aunque es general para n dimensiones:

« *Si un número finito de figuras convexas del plano es tal que cada 3 de ellas tienen punto común, existe un punto común a todas ellas* ».

Este teorema, cuando las figuras convexas son limitadas, es válido también para un número infinito de ellas. Si son ilimitadas y en número infinito podría no ser cierto, debido a que los puntos comunes a todas las figuras estuviesen en el infinito. Por ejemplo, considerando todos los semiplanos situados a la derecha de las verticales trazadas por los puntos de abscisas 0, 1, 2, 3, . . . , que son figuras convexas, cada 3 de ellos tienen puntos comunes, y sin embargo no hay ningún punto común a todos los semiplanos. Sin embargo es fácil ver, y se deduce de las demostraciones citadas en (1)

(1) J. RADON, *Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten*, Mathematische Annalen, Vol. 83, 1921, p. 113.

(2) D. KÖNIG, *Ueber konvexe Körper*, Mathematische Zeitschrift, Vol. 14, 1922, p. 208.

y (2), que el teorema sigue siendo válido con tal de que *una sola* de las figuras convexas del conjunto sea limitada, aunque las infinitas restantes sean ilimitadas.

Aún suponiendo todas las figuras ilimitadas, si los puntos comunes a 3 particulares de ellas (por ejemplo K_1, K_2, K_3) están todos a distancia finita, el teorema todavía es válido. En efecto, basta añadir al conjunto considerado la figura D formada por estos puntos comunes, la cual es convexa, puesto que la intersección de figuras convexas sigue siendo convexa. Entonces, cada 3 figuras seguirán teniendo puntos comunes, puesto que si una de ellas es la D, se puede sustituir por las K_1, K_2, K_3 de las cuales es la intersección, y las 5 figuras resultantes tendrán punto común ya que el teorema es válido mientras el número sea finito.

El anterior teorema de HELLY ha sido utilizado por C. V. ROBINSON (3) para demostrar la siguiente propiedad característica del círculo:

« *El círculo es el único dominio simplemente conexo con el cual se podrá cubrir cualquier conjunto de puntos del plano siempre que se puedan cubrir cada 3 puntos del mismo* ».

Nuesto objeto en esta nota es demostrar un teorema que en cierto modo tiene un aspecto « dual » de éste de ROBINSON. Nos limitaremos a figuras convexas, tanto por simplicidad como por ser para ellas que el teorema puede tener un máximo interés.

2. ENUNCIADO DEL TEOREMA. — Sea K una figura convexa limitada. Se llama *recta de apoyo* de K, a toda recta que tiene por lo menos un punto común con K y deja a esta figura toda de un mismo lado. Las rectas de apoyo coinciden con las tangentes en los puntos en que éstas existen. Llamaremos triángulo que contiene a K a todo triángulo con el cual se pueda cubrir totalmente la figura K.

Con estas definiciones el teorema que queremos demostrar consta de las dos partes siguientes:

a) Si un círculo C puede estar contenido en todo triángulo que contiene a la figura convexa limitada K, puede también estar contenido en K.

b) La única figura del plano que goza de la propiedad anterior, es decir, que de la condición de poder estar contenida en todo triángulo

---

(3) C. V. ROBINSON, *A characterization of the disc*, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 47, pág. 818, 1941.

que contenga a una figura convexa K, cualquiera que ésta sea, se deduzca que puede también estar contenida en K, es el círculo.

3. Demostración. — *a*) Consideremos el contorno de K orientado, con lo cual las rectas de apoyo también quedarán orientadas; supongamos, por ejemplo, que esta orientación haga que la figura K quede siempre a la izquierda de las rectas de apoyo. Sea r el radio del círculo C que suponemos puede estar contenido en todo triángulo que contenga a K. A toda recta de apoyo asociemos la recta paralela a ella situada a distancia r y del mismo lado que K. Consideremos el conjunto de todos los semiplanos situados a la izquierda de estas rectas paralelas. Cada 3 de estos semiplanos tienen punto común. En efecto, si las 3 rectas de apoyo correspondientes forman un triángulo que contiene a K (fig. 1), el centro del círculo C de radio r que por hipótesis está contenido en él, dista de los 3 lados $\geq r$ y por tanto pertenece a los 3 semiplanos. Si el triángulo formado por las 3 rectas de apoyo correspondientes no contiene a K, los 3 semiplanos tienen todo un sector ilimitado de plano en común (fig. 2).

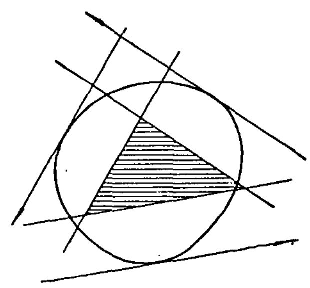


Fig. 1.

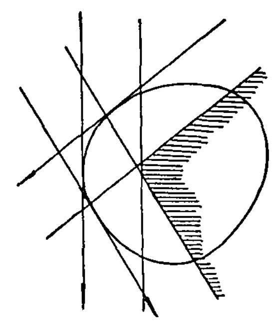


Fig. 2.

Consideremos 3 rectas de apoyo particulares que formen un triángulo que contenga a K (fig. 1). La intersección de los 3 semiplanos correspondientes será un triángulo situado a distancia finita. Por consiguiente, teniendo en cuenta el teorema de Helly y sus ampliaciones al caso de figuras ilimitadas recordadas en el n° 1, se deduce que todos los semiplanos considerados tendrán por lo menos un punto común. Este punto distará de *todas* las rectas de apoyo de K una distancia $\geq r$ y por tanto será centro de un círculo de radio r contenido en K. Queda, con esto, probada la primera parte del teorema.

b) Sea B una figura que goza de la propiedad anterior, es decir, que si puede estar contenida en todos los triángulos que contengan a cualquier figura convexa K, puede también estar contenida en K. Vamos a demostrar que B debe ser un círculo. Para ello vamos a demostrar que si B no fuera un círculo, existiría una figura convexa, precisamente un círculo, que no puede contener a B y que sin embargo todos los triángulos que la contienen pueden contener a B.

Si B no es un círculo, consideremos el círculo de menor radio que contiene a B; sea C este círculo y O su centro (fig. 3). Si B no coincide con C, habrá alguna recta de apoyo de B, por ejemplo la h', situada a menor distancia de O que la tangente paralela h al círculo C; sean M', M los pies de las perpendiculares trazadas desde O a h', h.

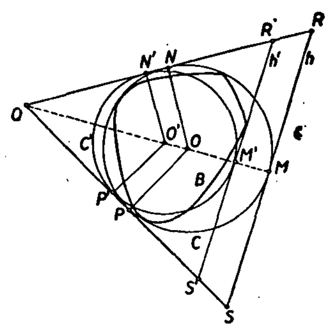


Fig. 3.

Sobre el círculo C tomemos dos puntos N, P simétricos respecto a la recta MO y tales que $NOP = 120°$. Tracemos por N y P las tangentes a C. Si R, S son los puntos en que estas tangentes cortan a la tangente en N quedará formado un triángulo equilátero QRS que contiene a C.

La recta de apoyo h', paralela a h, forma con las mismas tangentes a C en N y P otro triángulo equilátero $QR'S'$ cuyo círculo inscrito será de radio *menor* que el del círculo C. Sea C' este círculo y O' su centro. Si los puntos de tangencia de C' con los lados QN y QP son N' y P' el ángulo $N'O'P'$ valdrá también 120° y el arco N' P' queda exterior a C y por tanto sus puntos distan de O una distancia mayor que OM.

Supongamos ahora un triángulo cualquiera circunscrito a C' y que contenga a C' en su interior. Dos de los puntos de tangencia de sus lados deben distar un arco igual o menor que 120° y por tanto podremos colocarlos sobre el arco $N'P'$. El tercer lado distará de O una distancia igual o mayor que OM' (puesto que M' es el punto de C' más próximo a O). Por tanto podremos girar el conjunto de C' y su triángulo circunscrito alrededor de O de manera que el tercer lado mencionado pase a ser recta de apoyo de B o quede exterior a B. En cuanto a los dos primeros lados, por distar de O más que el radio OM de C, siempre quedan exteriores a B.

Por tanto B puede ser contenido en el interior del triángulo considerado. Como este triángulo es cualquier triángulo circunscrito a C', resulta que, según la hipótesis, B debe poder ser contenida en C'. Pero como C' tiene radio menor que C esto contradice el hecho de haber supuesto que C era el círculo de menor radio que contiene a B. Resulta, pues, que C no puede ser distinto de B, o sea, que esta última figura es un círculo.

4. Otros problemas. [4] — *a*) El teorema anterior lleva consigo, de manera natural, el preguntarse: si en lugar de un círculo consideramos otra figura convexa plana Q, ¿no será posible determinar para ella un número n tal que si Q puede estar contenida en todo polígono convexo de n lados que contenga a K, también Q pueda estar contenida totalmente en K? En el caso estudiado Q es un círculo y $n = 3$.

No sabemos si hay figuras especiales para las cuales esto sea posible. Hay, sin embargo, casos en que no existe ningún número n que cumpla la condición anterior. Consideremos, por ejemplo, el caso de ser Q un cuadrado. Vamos a demostrar que, cualquiera que sea n, siempre se puede construir una figura convexa K tal que el cuadrado Q pueda estar contenido en todo n-gono convexo que contenga a K, y que sin embargo no pueda estar contenido en K.

Para la demostración necesitamos un sencillo lema. Supongamos sobre una circunferencia n puntos. Supongamos también la misma circunferencia dividida en ν arcos iguales de amplitud α $\left(\text{será } \alpha = \dfrac{2\pi}{\nu}\right)$. Tomemos que ν sea múltiplo de 4 y consideremos cada arco como parte de un grupo formado por 4 de ellos, cuyos puntos medios estén situados en los extremos de dos diámetros perpendiculares. El número de estos grupos sera $\dfrac{\nu}{4}$. Entonces, con tal de que sea $\dfrac{\nu}{4} > n$ $\left(\text{o sea } \alpha < \dfrac{\pi}{2n}\right)$ estaremos seguros de que hay algún grupo de 4 arcos en las condiciones dichas, tal que ninguno de ellos contiene ningún punto de los n dados sobre la circunferencia. Es decir: dados n puntos cualesquiera sobre una circunferencia, siempre existen 4 arcos de amplitud $\alpha < \dfrac{\pi}{2n}$,

[4] Relacionado con estos problemas y el anterior, ver L. M. Blumenthal, "*Some imbedding theorems and characterization problems of distance geometry*" Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 40, pág. 321, 1943.

cuyos puntos medios son extremos de diámetros perpendiculares y que no contienen ninguno de los n puntos. Este es el lema que queríamos demostrar.

Sentado el lema, supongamos un cuadrado $A_1A_2A_3A_4$ que representaremos por Q. Tracemos una circunferencia C que tenga el mismo centro que Q y tal que deje a los vértices A_i exteriores y de manera que los puntos de contacto de las tangentes a C desde A_i determinen arcos de amplitud $\alpha < \dfrac{\pi}{2\,n}$. Decimos que el círculo C es el ejemplo buscado de figura convexa tal que no puede contener a Q en su interior y sin embargo Q puede colocarse en el interior de cualquier polígono convexo de n lados que contenga a C.

En efecto: 1° Que C no puede contener a Q es evidente. 2° De los polígonos convexos de n lados que contienen a C bastará considerar los circunscritos; cualquier n-gono circunscrito a C, según el lema, puede colocarse, por rotación alrededor del centro, de manera que sus puntos de contacto queden todos fuera de los 4 arcos α determinados por las tangentes a C desde los vértices A_i; en esta posición queda Q contenido en él.

b) Otra pregunta natural es la siguiente: ¿existe un número n tal que del hecho de saber que dos figuras convexas P y Q son tales que cada una de ellas pueda estar contenida en el interior de todo polígono convexo de n lados que contenga a la otra se pueda deducir que P y Q son congruentes?

Es fácil ver que la respuesta es negativa. Tomemos por P un círculo y por Q el mismo círculo más la parte de plano comprendida entre su circunferencia y dos tangentes tales que el arco comprendido entre sus puntos de contacto sea $\alpha < \dfrac{2\,\pi}{n}$. Es evidente que el círculo P puede colocarse en el interior de cualquier n-gono que que contenga a Q. Viceversa, dado un polígono de n lados que contenga a P, consideremos el homotético circunscrito; sobre la circunferencia de P tendremos los n puntos de contacto y por ser $\alpha < \dfrac{2\,\pi}{n}$ habrá un arco de amplitud α sin ninguno de ellos; colocando Q sobre P de manera que este arco coincida con el arco sobre el cual se construyó el triángulo curvilíneo que diferencia Q de P, resulta Q contenido en el interior del n-gono circunscrito. Sin embargo P y Q no son congruentes.

Luis A. Santaló.

VALORACIONES APROXIMADAS DE $n!$ PARA GRANDES VALORES DE n. APLICACIONES

Para el objeto indicado en el título sirve de costumbre la fórmula de STIRLING, la cual expresa que

$$\sqrt{2\pi}\,\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}\,e^{\frac{1}{12n}} > n! > \sqrt{2\pi}\,\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}.$$

Raramente la demostración de esta fórmula se encuentra en los tratados elementales de cálculo por la razón que de las muchas demostraciones que se poseen las unas, con resultados aun más completos, se vinculan con teorías analíticas más elevadas, otras más elementales exigen sin embargo algunos cálculos y algunos conocimientos sobre series (1). Nos proponemos ofrecer algunas consideraciones del todo elementales que llevan, si no a esta misma fórmula, a otras prácticamente equivalentes, dando a continuación alguna interesante aplicación de las mismas (2).

Se sabe que, para cualquier k fijo, que en lo sucesivo supondremos positivo,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+k} = e.$$

(1) Véase, por ej., PINCHERLE: *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche*, Cap. XVIII (Bologna — Zanichelli, 1932), donde la fórmula se vincula a las funciones eulerianas; GOURSAT: *Cours d'Analyse*, T. I, donde la fórmula se obtiene por una transformación de integrales; CESARO, *Corso d'analisi algebrica* (Torino — Bocca, 1894), donde se utilizan algunos simples cálculos con la serie logarítmica. Un cálculo muy parecido se encuentra también en H. C. PLUMMER: *Probability and frequency*, London, Macmillan,. 1940. Ver también B. LEVI: *Analisi algebrica e infinitesimale*, Cap. XIII (Bologna, Zanichelli, 1937).

(2) Tampoco pretendemos que, por su naturaleza elemental, las mismas o análogas consideraciones no se encuentren ya en la bibliografía que no está en nuestro conocimiento, ni creemos, por la misma razón, merezca el argumento una búsqueda bibliográfica más detenida.

Con mayor precisión notamos que

$$\frac{n+1}{n} - e^{\frac{1}{n+k}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} - \frac{1}{2\,(n+k)^2} - \frac{1}{6\,(n+k)^3} - \dots$$

$$= \frac{2\,k-1}{2\,(n+k)^2} + \frac{6\,k^2-1}{6\,(n+k)^3} + \dots$$

Evidentemente, al menos para grandes valores de n, esta serie tiene el signo del primer término no nulo y decrece en valor absoluto al crecer n; por lo tanto:

Para valores bastante grandes de n la expresión $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+k}$, *al crecer n, tiende monótonamente a e, decreciendo si $k \geq \frac{1}{2}$, y creciendo si $k < \frac{1}{2}$.*

Consideremos ahora la razón

$$\frac{(n+1)\,!}{(n+1)^{n+1+k}} : \frac{n\,!}{n^{n+k}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+k}; \qquad [1]$$

por lo dicho será

$$> e^{-1} \quad \text{para} \quad k < \frac{1}{2}$$

$$< e^{-1} \quad \text{»} \quad k \geq \frac{1}{2}$$

En otros términos:

Para $k < \frac{1}{2}$,

$$\frac{(n+1)\,!}{(n+1)^{n+1+k}} > \frac{n\,!}{n^{n+k}}\, e^{-1};$$

luego, por recurrencia,

$$\frac{(n+N)\,!}{(n+N)^{n+N+k}} > \frac{n\,!}{n^{n+k}} \cdot e^{-N}.$$

Para $k \geq \frac{1}{2}$,

$$\frac{(n+1)\,!}{(n+1)^{n+1+k}} < \frac{n\,!}{n^{n+k}}\, e^{-1}; \quad \text{luego} \quad \frac{(n+N)\,!}{(n+N)^{n+N+k}} < \frac{n\,!}{n^{n+k}}\, e^{-N}.$$

En los segundos miembros n tiene un valor fijo (bastante grande), mientras N se entiende positivo cualquiera; puede darse a las últimas fórmulas una forma más simple indicando con c_k un número tal que, en los dos casos respectivamente

$$\frac{n\,!}{n^{n+k}} \geq c_k\, e^{-n} \quad , \quad \frac{n\,!}{n^{n+k}} \leq c_k\, e^{-n}\ ;$$

si, después de esta posición, se llama n al anterior $n + N$, las desigualdades precedentes expresan que si

$$0 \leqq k_1 < \frac{1}{2} \leq k_2$$

$$c_{k_1}\, n^{n+k_1}\, e^{-n} < n\,! < c_{k_2}\, n^{n+k_2}\, e^{-n} \qquad [2]$$

donde c_{k_1}, c_{k_2} son constantes positivas determinables experimentalmente para un valor particular de n y válidas entonces para todos los valores mayores.

2. — Podemos enunciar el mismo resultado diciendo que las razones

$$\frac{n!\, e^n}{n^{n+k_1}} \,,\quad \frac{n!\, e^n}{n^{n+k_2}}$$

al crecer n, respectivamente crecen y decrecen, tendiendo luego a límites. Se ve inmediatamente que, excluyendo el caso $k = \frac{1}{2}$, estos límites son, respectivamente, ∞ y 0. En efecto, para $k > \frac{1}{2}$, de

$$c_{\frac{1}{2}}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n} > n!$$

se obtiene, dividiendo ambos miembros por $n^{n+k}\, e^{-n}$,

$$\frac{n!\, e^n}{n^{n+k}} < c_{\frac{1}{2}}\, n^{-\left(k-\frac{1}{2}\right)}\ ; \qquad [3']$$

para $k < \frac{1}{2}$, indiquemos con k' otro valor cualquiera tal que $k < k' < \frac{1}{2}$; de

$$c_{k'}\, n^{n+k'}\, e^{-n} < n!$$

dividiendo los dos miembros por $n^{n+k}\, e^{-n}$, se obtiene

$$\frac{n!\, e^n}{n^{n+k}} > c_{k'}\, n^{k'-k}. \qquad [3'']$$

Al tender n a ∞ los segundos miembros de [3′] y [3″] tienden respectivamente a 0 y ∞.

3. — Para $k = \frac{1}{2}$ sabemos solamente que $n\,!\, e^n : n^{n+\frac{1}{2}}$ tiende a un límite que podría ser finito o 0. La fórmula de Stirling enunciada al principio dice que este límite es $\sqrt{2\pi}$ y es claro que tal valor no puede obtenerse por consideraciones tan elementales como las anteriores. Pero, una vez que sabemos que el límite existe, podremos determinarlo teniendo en cuenta la fórmula de Wallis, siendo las dos afirmaciones del todo equivalentes (1). Esta fórmula dice en efecto que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^{4n+1}\, n!^4}{(2n)!^2\,(2n+1)} = \pi. \qquad [4]$$

Pongamos por brevedad

$$\frac{n!\, e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \varphi(n) \quad , \quad l = \lim_{n \to \infty} \varphi(n);$$

sustituyendo en [4]

$$n! = \varphi(n)\, e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}} \;,\; (2n)! = \varphi(2n)\, e^{-2n}\, (2n)^{2n+\frac{1}{2}},$$

se tiene

$$\pi = \lim_{n \to \infty} \frac{\varphi(n)^4}{\varphi(2n)^2} \cdot \frac{n}{2n+1} = l^2 \cdot \frac{1}{2}$$

luego

$$l = \sqrt{2\pi}.$$

(1) La deducción siguiente es conocida; ver, por ej.: B. Levi: *l. c.*; Plummer: *l. c.* — Wallis vivió de 1616 a 1703; Stirling de 1696 a 1770.

4. — Damos a continuación una interesante aplicación de las simples conclusiones del n. 2. Se trata de calcular [1]

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\left(1+n+\frac{n^2}{2}+\ldots+\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\right);$$

para eso notamos que

$$\begin{aligned} 1 = e^{-n}e^n = e^{-n}&\left(1+n+\frac{n^2}{2}+\ldots+\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\right)\\ &+e^{-n}\left(\frac{n^n}{n!}+\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}+\ldots+\frac{n^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)\\ &+e^{-n}\left(\frac{n^{2n}}{(2n)!}+\frac{n^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\right) \qquad [5]\end{aligned}$$

Indicaremos los tres términos en que hemos dividido el último miembro por A, B, C. El último se escribe

$$\begin{aligned} C = e^{-n}\frac{n^{2n}}{(2n)!}&\left(1+\frac{n}{2n+1}+\frac{n^2}{(2n+1)(2n+2)}+\ldots\right)<\\ &<\left(\frac{e}{4}\right)^n\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}(2n)!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right); \qquad [6]\end{aligned}$$

para $n\to\infty$, tiende a 0 porque tienden a 0 en el último miembro el primer factor y el segundo (por [3'']), mientras el tercero vale 2.

Comparemos ahora los términos A, B; cada uno de los paréntesis se compone de n términos, de valores crecientes en A y decrecientes en B; el último término en A es igual al primero en B. Poniendo además en factor este término se obtiene:

$$\begin{aligned} A = e^{-n}\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}&\left(1+\frac{n-1}{n}+\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}+\ldots\right.\\ &\left.+\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = e^{-n}\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}&\left(1+\frac{n}{n+1}+\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}+\ldots\right.\\ &\left.+\frac{n^{n-1}}{(n+1)\ldots(2n-1)}\right)\end{aligned}$$

---

[1] Este límite fué propuesto como tema para resolver en la Revista de la Unión Matemática Argentina. Una solución del mismo ha sido dada por J.

y se ve en seguida que los términos del segundo paréntesis son todos mayores que los homólogos del primero, siendo las diferencias crecientes (¹).

Se sigue

$$0 < B - A < ne^{-n}\left(\frac{n^{2n-1}}{(2n-1)!} - 1\right) < \frac{e^{-n}\,n^{2n}}{(2n-1)!} =$$

$$= 2n\left(\frac{e}{4}\right)^n \frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}\,(2n)!}. \qquad [7]$$

Nuevamente aquí $\left(\frac{e}{4}\right)^n$ tiende a 0 como un exponencial; por lo tanto también $2n\left(\frac{e}{4}\right)^n$ tiende a 0; el otro factor tiende a 0 por [8'']; tenemos luego, por [5], [6], [7]

$$1 = \lim_{n\to\infty}(A + B) \quad , \quad 0 = \lim_{n\to\infty}(B - A) \ ,$$

$$\text{lím.}\, A = \text{lím.}\, B = \frac{1}{2},$$

es decir

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\left(1 + n + \frac{n^2}{2} + \ldots + \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\right) = \frac{1}{2}.$$

Barral Souto en la Revista mencionada (Vol. IX, pág. 67, 1943). La demostración, sin embargo, es relativamente complicada, a comparación de los recursos elementales utilizados aquí. El límite considerado puede deducirse como caso particular de otros conocidos, pero siempre con procedimientos elevados. V. por ej. Polya y Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Bd. I. Absch. II, 210, p. 80. Berlín - Springer - 1925.

(¹) En efecto:

$$\frac{n}{n+i} - \frac{n-i}{n} = \frac{i^2}{n(n+i)} > 0.$$

Luego:

$$\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} > 0\ , \quad \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n} =$$

$$= \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}\right)\frac{n}{n+2} + \frac{n-1}{n}\left(\frac{n}{n+2} - \frac{n-2}{n}\right)$$

$$> \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n}{n+2} + \frac{n-1}{n}\right)$$

etc.

Las fórmulas precedentes permiten puntualizar algo más acerca del orden infinitesimal de la diferencia

$$\frac{1}{2} - e^{-n}\left(1 + n + \frac{n^2}{2} + \ldots + \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\right) = \frac{1}{2} - A\,.$$

En efecto, [5], [6], [7] pueden escribirse

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = 1 - 2\lambda \quad , \quad B - A = 2\mu$$

$$0 < \lambda < \left(\frac{e}{4}\right)^n \frac{(2\,n)^{2n}}{e^{2n}\,(2\,n)!} \quad 0 < \mu < n\left(\frac{e}{4}\right)^n \frac{(2\,n)^{2n}}{e^{2n}\,(2\,n)!}\;;$$

luego

$$A = \frac{1}{2} - (\lambda + \mu)$$

$$0 < \lambda + \mu < \left(\frac{e}{4}\right)^n \frac{(2\,n)^{2n}}{e^{2n}\,(2\,n)!}\,(n+1).$$

Por [3″] el último miembro tiende a 0 del mismo orden que

$$\left(\frac{e}{4}\right)^n n^{\frac{1}{2}+\varepsilon} < \left(\frac{e+\theta}{4}\right)^n;$$

donde ε y θ pueden elegirse arbitrariamente pequeños.

B. Levi.

SOLUCION DE LA CUESTION N° 6

El enunciado de la cuestión era el siguiente:

Extender la solución del problema N° 20 al caso en que, en lugar de un exágono se pidiera un n-gono regular (para n cualquiera) del cual cuatro lados consecutivos pasan por cuatro puntos dados, desarrollando la discusión aludida en la N. de la Red. (pág. 194 del fasc. 4, año II) para algún valor de n distinto de 4.

1. — La solución dada al problema N° 20 en la nota de la redacción se extiende a la construcción de un polígono regular de un número cualquiera de lados permitiendo inferir que *dados en el plano en un orden determinado* 4 *puntos existen siempre dos y sólo dos polígonos regulares de n lados tales que las rectas de* 4 *lados consecutivos pasan ordenadamente por los puntos dados.*

Sean, en efecto, $LMNP$ los puntos dados; suponiendo existir el polígono, los lados por M y por N forman entre sí el ángulo $\left(1-\frac{2}{n}\right)\pi$; los lados por L y por P forman el ángulo $\left(1-\frac{6}{n}\right)\pi$; además estos dos ángulos tienen misma bisectriz. Resulta que si si sobre los segmentos MN y LP se describen arcos capaces de los dichos ángulos bastará unir los puntos medios de los arcos que completan las respectivas circunferencias; la recta obtenida cortará ulteriormente la circunferencia sobre MN en el correspondiente vértice del polígono y la circunferencia sobre LS en el punto común a las prolongaciones de los lados por L y P.

Sin embargo es necesario agregar las observaciones siguientes: 1° Al desplazarse los puntos $LMNP$ sobre los lados respectivos puede ocurrir que, en sentido estricto, los ángulos considerados se transformen en sus suplementarios; por esta razón dijimos de cortar las circunferencias y no los arcos. 2° Sobre cada uno de los segmentos MN, LP pueden trazarse dos arcos capaces de los ángulos respectivos; combinándolos dos a dos se obtendrían 4 casos; pero es fácil ver que dos de estas combinaciones no resueleven el problema porque, elegido el arco sobre MN, habrá siempre que elegir el arco sobre LP en modo que los sentidos MN y LP determinen sobre las curvas cerradas formadas por ellos y los arcos respectivos el mismo sentido de rotación (1). A este respecto una consideración particular merecen los casos de $n = 5$ y $n = 4$ en los que $\left(1 - \frac{6}{n}\right)$ resulta negativo; para dar sentido geométrico a la construcción tendrá que sustituirse este ángulo por su valor absoluto, pero los sentidos de rotación pasarán a ser inversos.

2. — Vamos a resolver ahora el problema desde el punto de vista analítico discutiendo las condiciones de posibilidad en el sentido restringido, es decir, para que pueda encontrarse un polígono tal que los puntos dados sean efectivamente interiores a 4 lados consecutivos en un orden prefijado.

Consideraremos el caso del exágono; para cualquier otro valor de n podrá repetirse, salvo sencillas modificaciones, un razonamiento análogo.

Suponiendo por el momento conocido el polígono que resuelve el problema introduzcamos un sistema de ejes cartesianos ortogonales auxiliares, que llamamos $(x'\, y')$, del siguiente modo: se toma el eje de abscisas congruente con uno de los lados del exágono y como origen se toma el punto (dado) que se supone contenido en dicho lado. El sentido de los ejes se puede elegir de tal modo que los tres puntos restantes dados tengan ordenada positiva y por lo menos dos de ellos abscisa positiva o nula. Denominamos con P_1 el punto coincidente con el origen y con P_2, P_3 y P_4 los restantes de tal modo que

$$y_2' < y_3' < y_4'. \qquad [1]$$

Entonces las ecuaciones de las rectas coincidentes con los lados que pasan respectivamente por los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 son

$$\begin{aligned} &y' = 0, && y' - y_3' = -\sqrt{3}\,(x' - x_3'), \\ &y' - y_2' = \sqrt{3}\,(x' - x_2'), && y' - y_4' = 0. \end{aligned} \qquad [2]$$

(1) Puede reconocerse este hecho observando primero que (por lo menos para $n > 6$, en consecuencia de la observación que sigue) la regla vale cuando los puntos $LMNP$ son internos a los lados respectivos; si luego se hacen desplazar estos puntos, cada uno sobre la recta que le corresponde, se ve que un cambio en el sentido de rotación podría eventualmente ocurrir sólo cuando uno de los puntos atraviesa el vértice del ángulo considerado; pero una compensación se realiza entonces porque el vértice pasa entonces del arco capaz de cierto ángulo al arco que con él completa la circunferencia.

Los vértices del exágono se obtendrán como puntos de intersección de esas rectas

$$\begin{cases} Q_1 \equiv \left(\dfrac{\sqrt{3}\, x_2' - y_2'}{\sqrt{3}} \quad ; \quad 0 \right) \\ Q_2 \equiv \left(\dfrac{\sqrt{3}\,(x_3' + x_2') + y_3' - y_2'}{2\sqrt{3}} \; ; \; \dfrac{\sqrt{3}\,(x_3' - x_2') + y_3' + y_2'}{2} \right) \\ Q_3 \equiv \left(\dfrac{\sqrt{3}\, x_3' + y_3' - y_4'}{\sqrt{3}} \quad ; \quad y_4' \right). \end{cases} \qquad [3]$$

Para que los lados $\overline{Q_1 Q_2}$ y $\overline{Q_2 Q_3}$ sean iguales bastará que la ordenada de Q_2 sea igual a $y_4' : 2$ o sea

$$\sqrt{3}\,(x_3' - x_2') + y_3' + y_2' = y_4', \qquad [4]$$

con lo que las expresiones [3] se transforman en

$$\begin{cases} Q_1 \equiv \left(\dfrac{\sqrt{3}\, x_2' - y_2'}{\sqrt{3}} \quad ; \quad 0 \right) \\ Q_2 \equiv \left(\dfrac{\sqrt{3}\,(x_3' + x_2') + y_3' - y_2'}{2\sqrt{3}} \; ; \; \dfrac{y_4'}{2} \right) \\ Q_3 \equiv \left(\dfrac{\sqrt{3}\, x_2' - y_2'}{\sqrt{3}} \quad ; \quad y_4' \right). \end{cases} \qquad [5]$$

Observamos además que el lado del exágono vale evidentemente

$$l_6 = \frac{y_4'}{2} : \text{sen } 60^\circ = \frac{y_4'}{\sqrt{3}}. \qquad [6]$$

Ahora bien, hasta aquí hemos razonado con un sistema de ejes coordenados no completamente determinado puesto que si bien el origen coincide con el punto P_1, su orientación depende del exágono que se trata de construir. Para determinar ésta, y por lo tanto resolver el problema, imaginemos otro sistema de ejes ortogonales $(x\,y)$ tal que su origen coincida con P_1 pero su eje de abscisas pase por P_2, de P_1 hacia P_2, y el eje de ordenadas dirigido hacia el lado de P_3. Siempre en la hipótesis de que la solución exista se tendrá evidentemente

$$(x_2,\ x_3,\ y_3,\ y_4) > 0 \qquad y_2 = 0 \qquad x_4 \lesseqgtr 0 \qquad y_3 < y_4. \qquad [7]$$

Además la recta

$$\frac{x - x_3}{y - y_3} = \frac{x_4 - x_3}{y_4 - y_3},$$

que pasa por los puntos P_3 y P_4, cortará al eje x en un punto de abscisa mayor que x_2; se encuentra fácilmente que dicha condición se expresa por

$$x_2\,(y_4 - y_3) < \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix}. \qquad [7']$$

Llamando α el ángulo que forman entre sí los respectivos ejes de ambos sistemas de coordenadas, las fórmulas de pasaje de uno al otro serán

$$\begin{cases} x' = x \cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha \\ y' = x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha. \end{cases} \qquad [8]$$

Aplicando esta transformación en la [4] y teniendo en cuenta que $y_2 = 0$ se obtiene mediante un sencillo cálculo

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}\,(x_2 - x_3) - y_3 + y_4}{x_2 + x_3 - x_4 - \sqrt{3}\,y_3}. \qquad [9]$$

Esta expresión se satisface para dos valores de α situados en cuadrantes opuestos; pero la indeterminación se resuelve observando que tal como hemos tomado los ejes x' y x el ángulo α verifica la condición

$$0^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ,$$

luego cuando la solución existe es única.

En resumen, si el problema admite solución, el procedimiento analítico para resolverlo es el siguiente:

Dados los cuatro puntos, que se consideran en un orden determinado, se adopta un sistema de ejes cartesianos ortogonales cuyo eje de abscisas pase por los dos primeros; una primera condición de posibilidad del problema es que se verifiquen las condiciones [7] y [7']. Entonces la expresión [9] y las [5] y [6] (transformadas mediante [8]) resuelven el problema.

3. — *Condiciones de posibilidad.*

De las expresiones [5] y [6] se deduce que las condiciones para que los puntos P_1 y P_2 pertenezcan precisamente al perímetro de un exágono se expresan del siguiente modo:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\sqrt{3}\,x_2' - y_2'}{\sqrt{3}} - \dfrac{y_4'}{\sqrt{3}}\right)\dfrac{\sqrt{3}\,x_2' - y_2'}{\sqrt{3}} < 0 \\ \left(\dfrac{\sqrt{3}\,x_2' - y_2'}{\sqrt{3}} - x_2'\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}\,(x_3' + x_2') + y_3' - y'_2}{2\sqrt{3}} - x_2'\right) < 0. \end{cases} \qquad [10]$$

A estas condiciones, que están referidas a un sistema de ejes cuya determinación depende todavía de la construcción del polígono buscado, nos proponemos darles una forma que dependa preferentemente de los datos del problema y posiblemente invariante, es decir, que no dependa del sistema de ejes elegidos.

Desarrollando las expresiones [10] y transformándolas mediante [8] se obtiene

$$\begin{cases} [y_4 - \sqrt{3}\,(2\,x_2 + x_4)]\,\mathrm{sen}\,\alpha\,.\cos\alpha + [3\,x_2 - \sqrt{3}\,y_4]\cos^2\alpha + \\ \qquad\qquad + (x_2 + x_4)\,\mathrm{sen}^2\,\alpha < 0 \\ [\sqrt{3}\,(x_2 - x_3) - y_3]\cos\alpha + [\sqrt{3}\,y_3 + x_2 - x_3]\,\mathrm{sen}\,\alpha < 0 \end{cases} \qquad [11]$$

Ahora bien, hemos visto que $0° \leq \alpha \leq 60°$, luego debe ser $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$, y por lo tanto el numerador y denominador de [9] tienen el mismo signo. Si este signo (± 1) lo designamos con σ entonces podremos escribir

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma}{c}\,(\sqrt{3}\,(x_2 - x_3) - y_3 + y_4) = \mathrm{sen}\,\alpha \\ \dfrac{\sigma}{c}\,(x_2 + x_3 - x_4 - \sqrt{3}\,y_3) = \cos\alpha \end{cases} \qquad [12]$$

donde

$$c = \sqrt{[\sqrt{3}\,(x_2 - x_3) - y_3 + y_4]^2 + [x_2 + x_3 - x_4 - \sqrt{3}\,y_3]^2}$$

Bastará sustituir estas expresiones [12] en las desigualdades [11] para obtener las condiciones equivalentes a las [10] expresadas en el sistema de ejes ($x\,y$), intrínseco con los datos del problema.

De estas expresiones podremos pasar a otras independientes del sistema de ejes por cuanto se pueden expresar las diferencias entre las coordenadas de los puntos P_i considerando como vectores los lados de la poligonal $P_1 P_2 P_3 P_4$. Teniendo en cuenta que

$$x_1 = y_1 = y_2 = 0$$

escribiremos [11] y [12] en la forma

$$[(y_4 - y_1) - \sqrt{3}\,(2\,(x_2 - x_1) + (x_4 - x_1))]\,\mathrm{sen}\,\alpha\,.\,\cos\alpha +$$
$$+ [3\,(x_2 - x_1) - \sqrt{3}\,(y_4 - y_1)]\cos^2\alpha + [(x_2 - x_1) + (x_4 - x_1)]\,\mathrm{sen}^2\alpha < 0$$

$$[\sqrt{3}\,(x_2 - x_3) + (y_2 - y_3)]\cos\alpha - [\sqrt{3}\,(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)]\,\mathrm{sen}\,\alpha < 0$$

$$\frac{\sigma}{c}\,[\sqrt{3}\,(x_2 - x_3) + (y_4 - y_3)] = \mathrm{sen}\,\alpha$$

$$\frac{\sigma}{c}\,[(x_2 - x_1) + (x_3 - x_4) + \sqrt{3}\,(y_2 - y_3)] = \cos\alpha.$$

Bastará ahora notar que si P_a y P_b son dos puntos cualesquiera cuyas coordenadas, en el sistema $(x\,y)$, indicaremos respectivamente con $(X_a\,Y_a)$ y $(X_b\,Y_b)$, valen las relaciones

$$X_a - X_b = \frac{(P_a - P_b) \times (P_2 - P_1)}{|\,P_2 - P_1\,|}$$

$$\overline{n}\,(Y_a - Y_b) = \frac{(P_a - P_b) \wedge (P_2 - P_1)}{|\,P_2 - P_1\,|}$$

($\overline{n}$ versor normal al plano)

y mediante ellas las condiciones anteriores resultarán expresadas en forma independiente del sistema de ejes elegido.

Las condiciones [10], que hasta aquí hemos transformado, expresan que los puntos P_1 y P_2 son internos a los lados respectivos. Otras dos condiciones tendrán que obtenerse análogamente para los puntos P_3 y P_4; pero una vez que las primeras condiciones han tomado forma intrínseca, es decir independiente de toda elección de ejes, nos bastará observar que recorriendo el exágono en sentido inverso los puntos $P_4\,P_3\,P_2\,P_1$ toman respectivamente el lugar de $P_1\,P_2\,P_3\,P_4$. Por lo tanto para obtener las condiciones que faltan

bastará, una vez escritas las condiciones intrínsecas precedentes, efectuar en ellas la sustitución de índices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

La solución anterior pertenece, salvo detalles, al Ing. PEDRO E. ZADUNAISKY; otras menos completas fueron enviados por el Ing. S. FREIBERG (Tucumán) y C. KRUGER, alumno de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc. de Rosario.

RESULTADO DEL CONCURSO

ENTRE LOS SOLUCIONISTAS DE PROBLEMAS PROPUESTOS EN EL AÑO SEGUNDO (1942)

En aplicación de lo dispuesto en el art. 4 de la ordenanza de institución del Boletín del Instituto de Matemáticas «Mathematicae Notae» (ver Año I, pág. 4), el Director del Instituto ha tomado en consideración las soluciones enviadas hasta el 1° de julio de 1943 haciendo al señor Decano las propuestas correspondientes, que fueron aceptadas con la resolución siguiente:

« *Expte. 560-I-1943. — Rosario, 13 de Julio de 1943. — Vista la propuesta que formula el señor Director del Instituto de Matemática, Dr.* BEPPO LEVI, *el Decano resuelve*:

Art. 1° — Adjudicar al estudiante de la Facultad señor ABRAHAM BENDER *el premio año 1942, consistente en los libros que oportunamente indicará el señor Director del Instituto.*

Art. 2° — Adjudicar el premio para las personas que no son estudiantes de la Facultad, por el mismo año 1942, a los señores ingenieros SALOMÓN FREIBERG *y* ERNESTO SALEME, *consistente en tres volúmenes de las publicaciones del Instituto.*

Art. 3° — Dichos libros y volúmenes serán encuadernados en cuero por cuenta de la Facultad.

Art. 4° — Comuníquese, sáquese copia, etc., tome conocimiento Contaduría y dése cuenta al H. Consejo Directivo.

Firmados: CORTÉS PLA, *Decano.* — LUIS AYMÍ, *Secretario* ».

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

SOLUCIONES

N° 29. — Dadas dos esferas exteriores una a la otra, encontrar sobre la parte exterior del segmento que une sus centros el punto tal que la suma de las áreas de los casquetes esféricos vistos desde él, sea un máximo. Tratar el mismo problema en el plano, considerando dos círculos en lugar de esferas.

Solución. — Llamando h a la altura de un casquete esférico, es sabido que el área está dada por la fórmula $2\pi R h$. Sean R y r los radios de las dos esferas dadas e indiquemos por d la distancia entre sus centros O, O_1. Sea X el punto incógnita situado entre O y O_1, y pongamos $OX = x$. La altura h del casquete visto desde X sobre la esfera de centro O se calcula fácilmente recordando que en un triángulo rectángulo un cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre la misma. Aplicando este teorema al triángulo formado por OX como hipotenusa y cuyos catetos son la tangente desde X y el radio que va al punto de contacto, se tiene

$$R^2 = x(R - h) \qquad \text{de donde} \qquad h = R - \frac{R^2}{x}\cdot$$

El casquete de la esfera de centro O visto desde X valdrá según esto

$$S_1 = 2\pi R^2\left(1 - \frac{R}{x}\right)\cdot$$

Análogamente el casquete de la esfera O_1 valdrá

$$S_2 = 2\pi r^2\left(1 - \frac{r}{d - x}\right)\cdot$$

La suma de ambos es, por tanto,

$$S(x) = 2\pi R^2\left(1 - \frac{R}{x}\right) + 2\pi r^2\left(1 - \frac{r}{d - x}\right)\cdot$$

Para hallar el máximo de esta suma, escribiremos que la derivada debe anularse, o sea

$$S'(x) = \frac{2\pi R^3}{x^2} - \frac{2\pi r^3}{(d-x)^2} = 0. \qquad [1]$$

Quitando denominadores y ordenando queda la ecuación de segundo grado

$$(R^3 - r^3)\, x^2 - 2 R^3\, dx + d^2 R^3 = 0.$$

Suponiendo $R > r$, $\frac{r}{R} = c < 1$, las raíces de esta ecuación se expresan por

$$x_1 = \frac{(1 + \sqrt{c^3})\, d}{1 - c^3}, \quad x_2 = \frac{(1 - \sqrt{c^3})\, d}{1 - c^3};$$

la primera solución corresponde a un punto situado en la prolongación de OO_1. Esta solución debe corresponder a un mínimo del área de la suma de los casquetes, puesto que a medida que el punto se aleja dicha suma aumenta. La segunda solución en cambio es la que resuelve el problema, pues corresponde a un punto interno al segmento OO_1 (y externo a las dos esferas) y nos da, efectivamente, un máximo, puesto que la derivada primera se ve fácilmente que pasa de positiva a negativa, o también se puede ver observando, tras un cálculo no muy largo, que $S''(x_2) < 0$.

En el caso de $R = r$ la ecuación pierde el término cuadrado y tiene la sola solución $x = \frac{1}{2} d$, que corresponde todavía a un máximo.

Para el caso del plano, con las mismas notaciones anteriores, la suma de las longitudes de los arcos de circunferencia vistos desde el punto X vale

$$L(x) = \pi R - 2 R \operatorname{arc\,sen} \frac{R}{x} + \pi r - 2 r \operatorname{arc\,sen} \frac{r}{d-x}.$$

Para hallar el máximo, escribiremos que la derivada se anula, o sea

$$L'(x) = \frac{2 R^2}{x\sqrt{x^2 - R^2}} - \frac{2 r^2}{(d-x)\sqrt{(d-x)^2 - r^2}} = 0. \qquad [2]$$

Quitando denominadores esta ecuación se puede escribir

$$R^2 (d - x) \sqrt{(d-x)^2 - r^2} = r^2 x \sqrt{x^2 - R^2},$$

o bien, elevando al cuadrado y ordenando convenientemente

$$R^4 (d - x)^4 - r^4 x^4 = r^2 R^2 (R^2 (d-x)^2 - r^2 x^2).$$

El primer miembro, que es una diferencia de cuadrados, se puede escribir como producto de una suma por diferencia, con lo cual la ecuación se puede escribir

$$[R^2 (d - x)^2 - r^2 x^2] [R^2 (d - x)^2 + r^2 x^2 - r^2 R^2] = 0.$$

El primer factor tiene las raíces

$$x = \frac{Rd}{R \pm r}. \qquad [3]$$

El segundo factor es una ecuación de segundo grado cuyo discriminante es $R^2 r^2 (R^2 + r^2 - d^2) < 0$ y por tanto tiene sus raíces imaginarias.

Las únicas soluciones son, pues, las [3]. Es fácil ver que ellas corresponden a los puntos en que se encuentran las dos tangentes comunes interiores y las dos exteriores. La primera solución, signo $+$ en [3], corresponde a un máximo, puesto que efectivamente se ve fácilmente que para x próximo a R el primer sumando en [2] es mucho mayor que el segundo, y por tanto la derivada primera es positiva; en cambio para x próximo a $d - r$ la derivada se hace negativa. La segunda solución, signo $-$ en [3], corresponde a un mínimo puesto que al alejarse el punto aumenta la suma de las longitudes de los arcos.

Puede notarse que el punto que resuelve el problema de máximo para la suma de los arcos de dos secciones meridianas del sistema de dos esferas no es el mismo que resuelve el problema de máximo para la suma de los casquetes para las esferas, salvo en el caso en que $R = r$. Esto se explica fácilmente observando que el área generada por la rotación de un arco de longitud dada será tanto menor cuanto es mayor la curvatura. En efecto, comparando los resultados obtenidos en el caso del plano y del espacio, se nota, de acuerdo con esta observación, que pasando del plano al espacio ese punto se aleja de la esfera mayor aproximándose a la menor.

Esta solución ha sido enviada por el Sr. Guido O. G. Liserre, alumno de la Facultad de C. Matemáticas de Rosario.

N° 34. — Demostrar las identidades

$$\operatorname{sen}\frac{4\pi}{9} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{9} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{9}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}}.$$

Solución. — Aplicando la fórmula

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}, \qquad [1]$$

resulta

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{9} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{9} = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{18}. \qquad [2]$$

Pero

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{18} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{9}\right) = \operatorname{sen}\frac{4\pi}{9}.$$

Sustituyendo estos valores en [2], resulta la primera parte del problema.

Para demostrar la segunda identidad, observemos que haciendo la suma de los quebrados y aplicando [1] se tiene

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{5\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}}{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}}. \qquad [3]$$

Se tienen además las identidades

$$\cos\frac{\pi}{14} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{7}\right) = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}$$

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7} = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}$$

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{14} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) = \cos\frac{\pi}{7},$$

y sustituyendo estos valores en [3] resulta, después de simplificar, la segunda identidad del enunciado del problema.

Esta solución ha sido enviada por el Sr. MATEO F. MARINKOVICH, alumno de la Facultad de C. Matemáticas de Rosario. Otras soluciones análogas se han recibido del Sr. ABRAHAM H. BENDER, de Rosario, y del Ing. S. FREIBERG, de Tucumán.

N° 35. — Demostrar que si un triángulo ABC es rectángulo en A, la bisectriz del ángulo HAM que forman la mediana AM y la altura AH es también bisectriz del ángulo A del triángulo y recíprocamente, si esta condición se cumple, el ángulo A es recto.

SOLUCIÓN. — Llamando $MAB = \alpha$, $HAC = \beta$, todo se reduce a demostrar que $\alpha = \beta$. Se observa que $\beta = B$ por ser ambos complementarios del ángulo C. Además, por ser el triángulo rectángulo, el vértice A se encuentra sobre la circunferencia descrita con centro M y radio MB; por tanto el triángulo MAB es isósceles y $\alpha = B$. Luego $\alpha = \beta$ y por consiguiente si áng. RAM = áng. RAH, también áng. RAB = áng. RAC. Indicamos con R el punto en que la bisectriz del ángulo HAM corta al lado BC.

El recíproco se demuestra fácilmente recordando que la bisectriz de un ángulo A de un triángulo cualquiera y la perpendicular en el punto medio M del lado opuesto, se cortan sobre la circunferencia circunscrita al triángulo; esto es evidente puesto que ambas rectas deben cortar a la circunferencia en el punto medio del arco BC. Sentado esto y supuesto que la bisectriz del ángulo HAM lo sea también del ángulo A, tracemos la perpendicular a BC en su punto medio M y sea A' el punto en que ella corta a AR. Según lo dicho los cuatro puntos $ABA'C$ están sobre la circunferencia circunscrita al triángulo (hágase la figura). Entonces áng. HAR = áng. $RA'M$ por alternos internos entre paralelas y por tanto áng. $RA'M$ = = áng. MAR, o sea, $MA = MA'$. El punto medio M de CB está por tanto en la perpendicular en el punto medio de la cuerda AA' y por consiguiente es el centro de la circunferencia circunscrita. El triángulo ABC es, por tanto, rectángulo.

Esta solución es análoga a la enviada por los Sres. JOSÉ LAHOZ y GUIDO O. G. LISERRE, alumnos de la Facultad de C. Matemáticas de Rosario. Otra solución trigonométrica ha sido enviada por el Sr. MARIO JOSÉ GIRALDI, alumno de la misma Facultad.

N° 37. — Dibujar y estudiar la curva representada en coordenadas polares por la ecuación

$$\rho^2 \pm a^2 \cos 2\,\omega = 0.$$

Transformar dicha ecuación en coordenadas cartesianas, ya tomando como ejes el eje polar y la perpendicular en el origen, ya tomando como ejes las tangentes en el origen.

Escribir la ecuación diferencial del haz de curvas que corresponde al variar el parámetro a.

Ejes de simetría.

Evidentemente el doble signo define dos curvas giradas entre sí de un ángulo $\pi : 2$ pero idénticas porque $\cos 2\omega$ cambia de signo al incrementar ω en $\pi : 2$.

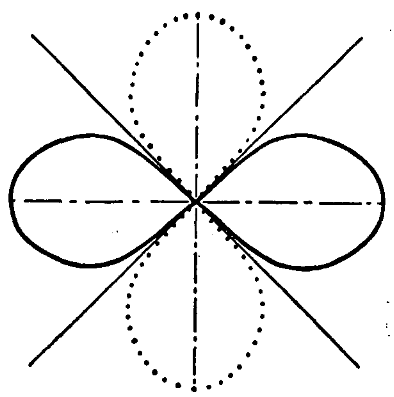
Por lo tanto sólo consideramos la ecuación

$$\rho^2 - a^2 \cos 2\omega = 0.$$

Si en ella se reemplaza ω por $-\omega$ el valor correspondiente de ρ no cambia; luego el eje polar es un eje de simetría. Tampoco varía el valor de ρ si se cambia ω por $\pi - \omega$; luego la perpendicular al eje polar en el origen también es eje de simetría. Entonces para obtener la curva basta hacer variar ω entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ y obtener los restantes puntos por simetría. En realidad, como los valores de ρ sólo son reales para ω comprendido en los intervalos

$$\frac{3}{4}\pi \leq \omega \leq \frac{5}{4}\pi \quad , \quad -\frac{\pi}{4} \leq \omega \leq \frac{\pi}{4},$$

basta con hacer variar ω entre 0 y $\frac{\pi}{4}$.



Radio de curvatura.

Su valor viene dado por

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''},$$

y teniendo en cuenta la ecuación de la curva se obtiene, mediante un sencillo cálculo,

$$R = \frac{a^2}{3\rho}.$$

El valor máximo de ρ se obtiene para $\omega = 0$, es decir, $\rho_{max} = a$, y por lo tanto el valor mínimo del radio de curvatura será

$$R_{min} = \frac{a}{3},$$

que corresponde al punto en que la curva corta al eje polar; además por razones de simetría el centro de curvatura correspondiente se encontrará sobre dicho eje.

Puntos dobles.

Transformemos la ecuación de la curva en coordenadas cartesianas tomando como ejes el eje polar y la perpendicular en el origen. Teniendo en cuenta la identidad $\cos 2\omega = \cos^2\omega - \operatorname{sen}^2\omega$ se obtiene de inmediato la ecuación

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0 \qquad [I]$$

que, siendo una cuártica, puede contener a lo sumo 3 puntos dobles.

Se ve en seguida que es punto doble el origen porque la ecuación [I] no contiene términos de grado menor que 2. Por otra parte la recta del infinito corta la curva en los puntos $(x^2 + y^2)^2 = 0$, es decir doblemente en los puntos cíclicos, lo cual demuestra que éstos también son dobles, siempre que en ellos la curva no sea tangente a la recta impropia.

Para comprobar estos hechos pasamos a coordenadas homogéneas; los puntos dobles serán aquellos que satisfacen el sistema

$$f = (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2)z^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x(x^2 + y^2) - 2a^2 x z^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y(x^2 + y^2) + 2a^2 y z^2 = 0.$$

Se obtiene $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$ (es decir el origen); además $z = 0$, $x = \pm iy$ (es decir los dos puntos cíclicos).

Siendo el número de puntos dobles igual al máximo posible la curva es *unicursal*, es decir que puede ponerse en correspondencia algebraica biunívoca con los puntos de una recta o una cónica. En nuestro caso cada valor de ω define un punto de la curva y un punto correspondiente sobre una circunferencia con centro en el origen.

Puntos de inflexión.

Vamos a demostrar que la curva tiene 6 puntos de inflexión, es decir 2 en el origen y otros 2 por cada punto cíclico.

En efecto, el haz de rectas con centro en el origen es definido por

$$y = \lambda x$$

y reemplazando en la ecuación de la curva se obtiene

$$x^4 (1 + \lambda^2)^2 - a^2 x^2 (1 - \lambda^2) = 0$$

que se satisface para $x^2 = 0$, cualquiera que sea λ, es decir, todas las rectas que pasan por el origen cortan dos veces la curva en dicho punto, lo cual está de acuerdo con el hecho de que el origen es punto doble. Pero se observa además que las rectas correspondientes a $\lambda = \pm 1$ cortan la curva en el origen 4 veces; esto demuestra que cada una de las rectas $y = \pm x$ es tangente en el origen a la curva; se infiere de aquí que la curva pasa por el origen con dos ramas, tangentes cada una a una de estas rectas. Si ahora consideramos las intersecciones de una de estas rectas con la curva, una sola de ellas podrá ser intersección de la recta con la rama que no le es tangente; por consiguiente las tres restantes deben constituir la intersección de la recta con la rama tangente, la cual, por lo tanto, tiene en este punto una inflexión.

Para los puntos cíclicos el razonamiento es análogo. En efecto, el haz de rectas con centro en uno de dichos puntos es definido por la expresión

$$x \pm iy = cz,$$

en coordenadas homogéneas. Eliminando y entre ésta y la ecuación de la curva se obtiene

$$(c^2 - a^2)\, c^2 z^4 - 2\, c\, (2\, c^2 - a^2)\, x\, z^3 + 2\, (2\, c^2 - a^2)\, x^2 z^2 = 0$$

que admite la solución $z^2 = 0$, es decir dicho punto es doble. Pero aquellas dos rectas del haz en que $c = \pm a : \sqrt{2}$, es decir $2\, c^2 - a^2 = 0$, cortan la curva 4 veces. Deducimos como antes que por este punto cíclico pasan dos ramas de la curva, cada una de las cuales tiene en él una inflexión.

Intersecciones de las curvas.

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2 (x^2 - y^2)\, z^2 = 0$$
$$(x^2 + y^2)^2 + a^2 (x^2 - y^2)\, z^2 = 0.$$

Observamos que de la primera curva, que es la que hemos estudiado, se pasa a la segunda, girada de un ángulo $\pi : 2$, sustituyendo el coeficiente a por ia. Se deduce inmediatamente que en el origen, además de tener ambas curvas un punto doble, tienen las dos tangentes de inflexión comunes. Significa entonces que las curvas tienen en el origen 8 puntos comunes.

En cada punto cíclico la segunda curva tendrá también un punto doble pero las tangentes no se superponen con las de la primera curva porque los coeficientes de dirección son ahora $c = \pm ia : \sqrt{2}$. Por lo tanto en cada punto cíclico las curvas tendrán una intersección múltiple de multiplicidad 4.

Por consiguiente se obtienen 16 puntos de intersección (distintos o confundidos), como requiere el teorema de Bezout.

Ecuación diferencial del haz de curvas.

Derivando [I] respecto a x (considerando y función de x) se obtiene

$$2\,(x^2 + y^2)\,(x + y\,y') - a^2\,(x - y\,y') = 0.$$

Si ahora eliminamos a entre las dos expresiones resulta la ecuación buscada

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3 + \left[3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1\right] y' - 3\,\frac{x}{y} = 0.$$

Notamos que ésta es una ecuación de las llamadas *homogéneas*, de acuerdo con el hecho que, en nuestro caso, el haz de curvas es *homotético* respecto al origen de coordenadas.

Esta solución es debida al Sr. Ing. PEDRO E. ZADUNAISKY. Otra solución se ha recibido del Sr. GUIDO O. G. LISSERRE alumno de la Facultad de Ciencias Matemáticas de Rosario.

N° 38. — Un punto M_1 de masa m_1, está colgado por medio de dos hilos de los cuales uno, de longitud l_1, está fijado por la otra extremidad en un punto O; el otro, de longitud l_2, después de pasar por una polea P puesta en plano horizontal con O, sostiene otro peso M_2 de masa m_2. La distancia OP es igual a d.

Se pide determinar: 1°) La posición de equilibrio. 2°) Las ecuaciones del movimiento del sistema.

1°) *Posición de equilibrio.*

Aplicando el principio de los trabajos virtuales, si suponemos un desplazamiento virtual invertible del sistema tal que M_1 su fra un desplazamiento δM_1 normal al vínculo l_1 podemos escribir

$$m_1 g \times \delta M_1 + m_2 g \times \delta M_1 = 0$$

y siendo

$$\alpha = POM_1 \ , \quad \delta M_1 = l_1 \, \delta\alpha \ , \quad l_2^2 = l_1^2 + d^2 - 2\, d\, l_1 \cos\alpha ,$$

se obtiene fácilmente

$$\left(m_1 g \, l_1 \cos\alpha - \frac{m_2 g \, l_1 \, d \operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{l_1^2 + d^2 - 2\, d\, l_1 \cos\alpha}} \right) \delta\alpha = 0. \qquad [1]$$

Se obtiene así la ecuación de tercer grado

$$\cos^3\alpha - \frac{l_1^2 + \left[1 + \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 \right] d^2}{2\, d\, l_1} \cos^2\alpha + \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 \frac{d}{2\, l_1} = 0 . \qquad [2]$$

Si al primer miembro lo llamamos $f(\cos\alpha)$ se tendrá evidentemente

$$f(-1) < 0 \ , \quad f(0) > 0 \ , \quad f(1) < 0 \ , \quad f(\infty) > 0 .$$

Por lo tanto la ecuación, cualesquiera que sean los valores de las constantes, tiene sus tres raíces reales, pero de ellas sólo dos son posibles, pues la tercera sale del intervalo $(-1, +1)$. De estas dos raíces una es positiva y la otra negativa. Como valor correspondiente de α habrá que tomar, para la primera raíz, α en el primer cuadrante y para la segunda en el tercer cuadrante. En efecto, si α estuviera contenido en el 2° o 4° cuadrante ambos términos del primer miembro de [1] tendrían el mismo signo y por lo tanto su suma no podría ser nula.

En conclusión, *si el vínculo l_1 estuviese constituído por una barra indeformable, cualesquiera sean los valores de m_1, m_2, l_1 y d, el sistema admitiría dos posiciones de equilibrio.* Pero, si tenemos en cuenta que, según el enunciado del problema, el vínculo está constituído por un hilo deformable, evidentemente sólo es posible el equilibrio con α en el primer cuadrante; vamos en efecto a determinar las ulteriores condiciones teniendo en cuenta que el vínculo no es entonces bilateral.

En la posición de equilibrio el hilo debe estar tenso, y esta condición se expresa mediante el principio de los trabajos virtuales, admitiendo como desplazamientos virtuales todos los que mantienen invariable la longitud del hilo o bien lo acortan y poniendo la condición que para todos ellos el trabajo virtual sea negativo o nulo.

Eligiendo como parámetros que determinan el punto M_1 las coordenadas polares (α, l_1), para expresar el trabajo virtual se debe añadir al primer miembro de [1] el término

$$g\left(m_1 \operatorname{sen} \alpha + \frac{(d \cos \alpha - l_1)\, m_2}{\sqrt{l_1^2 + d^2 - 2\, d\, l_1 \cos \alpha}}\right) \delta\, l_1 .$$

Por cuanto la [1] debe satisfacerse para las condiciones particulares de los desplazamientos sobre la circunferencia, este último término debe ser $\lesseqgtr 0$ para $\delta\, l_1 \leq 0$, o sea

$$m_1 \operatorname{sen} \alpha + \frac{(d \cos \alpha - l_1)\, m_2}{\sqrt{l_1^2 + d^2 - 2\, d\, l_1 \cos \alpha}} \geq 0 . \qquad [3]$$

Estudiemos los distintos casos que pueden presentarse.

Si $l_1 > d$

Para que se verifique la [3] debe ser

$$m_1 \operatorname{sen} \alpha \geq \left| \frac{(d \cos \alpha - l_1)\, m_2}{\sqrt{l_1^2 + d^2 - 2\, d\, l_1 \cos \alpha}} \right| .$$

Mediante un sencillo cálculo se llega a la expresión

$$\cos^3 \alpha - \frac{l_1^2 + d^2\left[1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right]}{2\, d\, l_1} \cos^2 \alpha - \left[1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right] \cos \alpha +$$
$$+ \frac{d}{2\, l_1} + \left[1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right] \frac{l_1}{2\, d} \geq 0,$$

y teniendo en cuenta [2] se obtiene

$$-\left[1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right] \cos \alpha + \left[1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right] \frac{d}{2\, l_1} + \left[1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right] \frac{l_1}{2\, d} \geq 0$$

o bien

$$\left[1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right] \cos \alpha \leq \left[1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right] \frac{d^2 + l_1^2}{2\, d\, l_1} . \qquad [4$$

La expresión $(d^2 + l_1^2) : 2\, d\, l_1$ es mayor que la unidad, por lo tant la desigualdad [4], y por lo tanto también la [3], sólo serán posible en el caso en que $m_2 < m_1$.

Intuitivamente se ve, en efecto, que en la hipótesis de $m_2 > m_1$ el peso M_1 correrá hasta detenerse contra la polea, dejando pendiente el hilo l_1; si fuese $m_2 = m_1$ se tendría un equilibrio indiferente en todas las posiciones de la vertical de la polea que distan hacia abajo de un segmento igual o menor que $\sqrt{l_1^2 - d^2}$, siempre quedando pendiente el hilo l_1.

Si $l_1 \leq d$

Demostraremos que, para la solución con α en el primer cuadrante, se satisface la [3] cualesquiera sean los valores de m_1 y m_2. En efecto, el primer miembro de dicha desigualdad se puede escribir

$$\operatorname{sen} \alpha + \frac{d m_2 \left(\cos \alpha - \dfrac{l_1}{d}\right)}{m_1 \sqrt{l_1^2 + d^2 - 2\, d\, l_1 \cos \alpha}} .$$

Por otra parte de la [1] se tiene

$$\frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{d m_2}{m_1 \sqrt{l_1^2 + d^2 - 2\, d\, l_1 \cos \alpha}}$$

y reemplazando en la expresión anterior se obtiene

$$\operatorname{sen} \alpha + \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \left(\cos \alpha - \frac{l_1}{d}\right) = \frac{1 - \dfrac{l_1}{d} \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

valor que resulta positivo solamente cuando α está en el primer cuadrante, ya que hemos supuesto $l_1 < d$. En estas condiciones se satisface la [3] independientemente de los valores que toman m_1 y m_2.

En conclusión, *si el vínculo l_1 está constituído por un hilo deformable hay una posición de equilibrio con α en el primer cuadrante bajo las siguientes condiciones*:

si $l_1 > d \qquad m_2 \leq m_1$

si $l_1 \leq d \qquad m_1$ y m_2 cualesquiera.

En el caso de $l_1 > d$ y $m_2 = m_1$ hay, como hemos visto, todo un segmento de posiciones de equilibrio indiferente; en el caso de $l_1 \geq d$ y $m_2 > m_1$ no hay posición de equilibrio dependiente de las condiciones mecánicas, sino solamente que el peso M_1 se detiene contra la polea por el obstáculo material de ésta.

2°) *Ecuación del movimiento.*

Para este sistema de un solo grado de libertad en que la variable independiente es el ángulo α las ecuaciones de Lagrange se reducen a una sola,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = Q \qquad [5]$$

donde, como es sabido, T es la energía cinética del sistema y Q el coeficiente de $\delta\alpha$ en la expresión [1] del trabajo virtual.

Si se supone que el vínculo l_1 gira con velocidad angular $\dot{\alpha}$, la energía cinética del sistema vale, teniendo en cuenta que $l_2^2 = l_1^2 + d^2 - 2\,d\,l_1 \cos\alpha$,

$$T = \frac{m_1\, l_1^2\, \dot{\alpha}^2}{2} + \frac{m_2}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\, l_2}{\mathrm{d}\, t}\right)^2 =$$

$$= \frac{m_1\, l_1^2\, \dot{\alpha}^2}{2} + \frac{m_2}{2}\, \frac{\dot{\alpha}^2\, l_1^2\, d^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{l_1^2 + d^2 - 2\, d\, l_1 \cos\alpha}\,.$$

Reemplazando en [5] se obtiene

$$\left[m_1\, l_1^2 + \frac{m_2\, l_1^2\, d^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{d^2 + l_1^2 - 2\, d\, l_1 \cos\alpha}\right]\ddot{\alpha} + \frac{\dot{\alpha}^2}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\alpha}\left(\frac{m_2\, l_1\, d^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{d^2 + l_1^2 - 2\, d l_1 \cos\alpha}\right) =$$

$$= g\left(m_1\, l_1 \cos\alpha - \frac{m_2\, l_1\, d \operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{d^2 + l_1^2 - 2\, d\, l_1 \cos\alpha}}\right) \qquad [6]$$

que es la ecuación diferencial del movimiento.

Considerando esta ecuación en proximidad de las condiciones de equilibrio vamos a distinguir los casos de equilibrio estable e inestable.

Pongamos

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon$$

donde α_0 es el valor correspondiente al equilibrio y ε un desplazamiento lo suficientemente pequeño para que sean despreciables los términos en que aparezca elevado al cuadrado así como el producto $\varepsilon\ddot{\varepsilon}$ del desplazamiento por la aceleración. Considerando el movimiento a partir de una velocidad inicial nula, podemos además suponer, por lo menos para un intervalo de tiempo suficientemente corto, que también la velocidad $\dot{\varepsilon}$ sea pequeña y $\dot{\varepsilon}^2$ despreciable. Obtenemos entonces la ecuación

$$\left[m_1 l_1 + \frac{m_2 l_1 d^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_0}{d^2 + l_1^2 - 2 l_1 d (\cos \alpha_0 - \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0)}\right] \ddot{\varepsilon} =$$

$$= g\left[m_1 \cos \alpha_0 - m_1 \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0 - \frac{m_2 d \operatorname{sen} \alpha_0 + m_2 d \varepsilon \cos \alpha_0}{\sqrt{d^2 + l_1^2 - 2 d l_1 (\cos \alpha_0 - \varepsilon \operatorname{sen} \alpha_0)}}\right]. \quad [7]$$

Por otra parte, debido a las aproximaciones hechas, se puede escribir

$$\frac{1}{1 + \dfrac{2 l_1 d \operatorname{sen} \alpha_0}{d^2 + l_1^2 - 2 l_1 d \cos \alpha_0} \varepsilon} \cong 1 - \frac{2 d l_1 \operatorname{sen} \alpha_0}{d^2 + l_1^2 - 2 l_1 d \cos \alpha_0} \varepsilon$$

$$\frac{1}{\left[1 + \dfrac{2 l_1 d \operatorname{sen} \alpha_0}{d^2 + l_1^2 - 2 l_1 d \cos \alpha_0} \varepsilon\right]^{1/2}} \cong 1 - \frac{d l_1 \operatorname{sen} \alpha_0}{d^2 + l_1^2 - 2 l_1 d \cos \alpha_0} \varepsilon$$

y reemplazando en [7] y teniendo en cuenta [1]

$$\left[m_1 l_1 + \frac{m_2 l_1 d^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_0}{d^2 + l_1^2 - 2 l_1 d \cos \alpha_0}\right] \ddot{\varepsilon} = \quad [8]$$

$$= -g\left[m_1 \operatorname{sen} \alpha_0 + \frac{m_2 d \cos \alpha_0}{\sqrt{l_1^2 + d^2 - 2 d l_1 \cos \alpha_0}} + \frac{m_2 l_1 d^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_0}{(d^2 + l_1^2 - 2 l_1 d \cos \alpha_0)^{3/2}}\right] \varepsilon$$

El coeficiente de $\ddot{\varepsilon}$ es positivo; si se considera la posición de equilibrio con α_0 en el primer cuadrante el coeficiente de ε en el segundo miembro es negativo, luego se trata de una posición de equilibrio estable, ya que la velocidad disminuye al aumentar ε. La [8] es en este caso la ecuación diferencial de un movimiento armónico.

Por el contrario, si se considera la posición de equilibrio con α_0 en el tercer cuadrante (caso del vínculo l_1 indeformable) el coeficiente de ε es positivo. En efecto, dicho coeficiente se puede escribir

$$-g\left[\frac{m_2 d \cos \alpha_0}{\sqrt{l_1^2 + d^2 - 2 d l_1 \cos \alpha_0}} + \right.$$

$$\left. + m_1 \operatorname{sen} \alpha_0 \left(1 + \frac{m_2 l_1 d^2 \operatorname{sen} \alpha_0}{m_1 (l_1^2 + d^2 - 2 d l_1 \cos \alpha_0)^{3/2}}\right)\right]$$

además de la [1] se obtiene

$$\frac{d\, l_1 \cos \alpha_0}{l_1^2 + d^2 - 2\, d\, l_1 \cos \alpha_0} = \frac{m_2\, l_1\, d^2 \operatorname{sen} \alpha_0}{m_1\, (l_1^2 + d^2 - 2\, d\, l_1 \cos \alpha_0)^{3/2}}$$

y reemplazando en la expresión anterior resulta

$$-g\left[\frac{m_2\, d \cos \alpha_0}{\sqrt{l_1^2 + d^2 - 2\, d l_1 \cos \alpha_0}} + m_1 \operatorname{sen} \alpha_0 \left(1 + \frac{d\, l_1 \cos \alpha_0}{l_1^2 + d^2 - 2\, d l_1 \cos \alpha_0}\right)\right].$$

Como $\cos\alpha_0 < 0$ el término $\dfrac{d\, l_1 \cos \alpha_0}{l_1^2 + d^2 - 2\, d\, l_1 \cos \alpha_0}$ es negativo pero menor que la unidad en valor absoluto. Por lo tanto, como también $\operatorname{sen}\alpha_0 < 0$, el coeficiente de ε resulta positivo y en consecuencia se trata en todos los casos de una posición de equilibrio inestable.

Esta solución es del Sr. Ing. PEDRO E. ZADUNAISKY, del Instituto de Matemática (Rosario); otra menos detallada fué enviada por el Sr. Ing. S. FREIBERG, de la Facultad de Ingeniería de Tucumán.

N° 39. — Demostrar que cualquiera que sea el número n, el número $N = 11\, n(n + 2) + 1$ no puede terminar en ninguna de las cifras 2, 3, 7, 8.

SOLUCIÓN. — Siendo

$$11\, n(n + 2) + 1 = 10\, n(n + 2) + n(n + 2) + 1,$$

la última cifra de N es la misma de

$$n(n + 2) + 1 = n^2 + 2\, n + 1 = (n + 1)^2.$$

Por otra parte es conocido que los cuadrados de números enteros sólo pueden terminar en las cifras 0, 1, 4, 5, 6, 9; por tanto está demostrado el enunciado.

Con respecto a la última observación, basta notar que la última cifra de un cuadrado es la misma del cuadrado de la última cifra de la base y que terminan con la misma cifra los cuadrados de n y de $10 - n$; por lo tanto las últimas cifras de los números cuadrados son las de los cuadrados de 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Han enviado soluciones de este problema los señores ABRAHAM H. BENDER, alumno de la Facultad de C. Matemáticas de Rosario, e Ing. S. FREIBERG, de la Facultad de Ingeniería de Tucumán.

El Sr. BENDER, después de poner $n = 10\, d + u$, donde u es una cifra, observa que todo se reduce a verificar el enunciado para $n = u$; basta luego experimentar sobre las 10 cifras; el método se aproxima, pues, a lo expuesto, siendo sin embargo menos analítico. El Sr. Freiberg examina el problema en sentido directo, proponiéndose determinar, si es posible, soluciones enteras de la ecuación indeterminada

$$11\, n(n+2) + 1 = 10\, m + p \ (p = 2, 3, 7, 8).$$

La demostración que esta ecuación no tiene soluciones enteras depende esencialmente de la anterior observación sobre la última cifra de los números cuadrados.

Nº 40. — Sean n números positivos $a_1, a_2, \dots, a_n$ ligados por la relación

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n = 1.$$

Demostrar que el valor mínimo del producto

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \dots (1 + a_n)$$

es 2^n.

Solución. — Resolveremos el problema más general siguiente. Sean n números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ligados por la relación

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n = c$$

donde c es una constante positiva. Demostrar que el mínimo del producto $P = (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n)$ es $P = (1 + a)^n$, siendo a la raíz enésima de c, es decir, el valor común de las variables a_i cuando todas sean iguales entre sí.

Sea P uno cualquiera de los productos mencionados que no tenga todos sus factores iguales; entre ellos habrá necesariamente un factor $1 + a_p$ mayor que $1 + a$ y otro factor $1 + a_q$ menor que $1 + a$. Veamos lo que sucede al sustituir uno de estos factores por $1 + a$ y el otro por $1 + \dfrac{a_p a_q}{a}$, dejando inalterados los demás factores de P.

Tal sustitución no altera al producto $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$. Respecto al nuevo producto P' se observa que

$$(1 + a)\left(1 + \frac{a_p a_q}{a}\right) = 1 + a_p a_q + a - \frac{a_p a_q}{a}$$

$$= (1 + a_p)(1 + a_q) - \frac{1}{a}(a_p - a)(a - a_q) < (1 + a_p)(1 + a_q).$$

Por tanto el nuevo producto P' será menor que P. Si P' sigue conteniendo factores desiguales, aplicaremos el mismo procedimiento, el cual permite sustituir un nuevo factor por $(1 + a)$ y disminuir el valor del producto. Así siguiendo, después de aplicar la misma operación un número finito de veces (a lo sumo $n-1$ veces), llegaremos al producto con todos los factores iguales. Este producto será, por consiguiente, menor que cualquier otro. Es lo que se quería demostrar.

Esta solución ha sido enviada por el Sr. EDISON FARAH, de la Universidad de São Paulo (Brasil).

N. DE LA R. — El problema, más particular, del enunciado, se demuestra más simplemente recordando que la media aritmética de dos números es siempre igual o mayor que la media geométrica. Esto permite escribir para cada a_i

$$\frac{1+a_i}{2} \geq \sqrt{a_i}\,.$$

Multiplicando estas desigualdades para $i = 1, 2, \ldots, n$, y teniendo en cuenta que el producto de las a_i se supone igual a 1, se obtiene $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq 2^n$, lo cual demuestra la proposición del enunciado.

N° 41. — Calcular el volumen limitado por las superficies $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$ y los planos $y = 1$, $z = 0$.

SOLUCIÓN. — Vemos que la curva de ecuación $y = x^2$ es simétrica respecto el eje y.

Luego podemos poner que

$$\frac{V}{2} = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} (x^2+y^2)\,dx.$$

La primera integral vale

$$\int_0^{\sqrt{y}} (x^2+y^2)\,dx = \frac{1}{3}\,y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{5}{2}}$$

y sustituyendo en la integral doble queda

$$\frac{V}{2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}\,y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{5}{2}}\right) dy = \left[\frac{2}{19}\,y^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7}\,y^{\frac{7}{2}}\right]_{y=1} = \frac{44}{105}\cdot$$

Por tanto el volumen buscado vale

$$V = \frac{88}{105}\cdot$$

Esta solución ha sido enviada por el Sr. GUIDO O. G. LISERRE, alumno de la Facultad de C. Matemáticas de Rosario.

N° 44. — Resolver la ecuación de quinto grado

$$x^5 + 5\,a\,x^3 + 5\,a^2\,x + 2\,b = 0.$$

SOLUCIÓN. — Descompongamos la incógnita x en dos sumandos haciendo $x = u + v$. Elevando al cubo tendremos

$$\begin{aligned} x^3 &= u^3 + 3\,u^2\,v + 3\,u\,v^2 + v^3 \\ &= u^3 + v^3 + 3\,u\,v\,(u + v) = u^3 + v^3 + 3\,u\,v\,.\,x, \end{aligned}$$

de donde

$$u^3 + v^3 = x^3 - 3\,u\,v\,.\,x.$$

Elevemos ahora la expresión para x a la quinta potencia, lo que nos da

$$\begin{aligned} x^5 &= u^5 + 5\,u^4\,v + 10\,u^3\,v^2 + 10\,u^2\,v^3 + 5\,u\,v^4 + v^5 = \\ &= u^5 + v^5 + 5\,u\,v\,(u^3 + v^3) + 10\,u^2\,v^2\,(u + v). \end{aligned}$$

Reemplazando en este resultado $u^3 + v^3$ por $x^3 - 3\,uv\,.\,x$ y $u + v$ por x tenemos

$$\begin{aligned} x^5 &= (u^5 + v^5) + 5\,u\,v\,(x^3 - 3\,u\,v\,.\,x) + 10\,u^2\,v^2\,.\,x = \\ &= 5\,u\,v\,.\,x^3 - 5\,u^2\,v^2\,.\,x + (u^5 + v^5), \end{aligned}$$

o bien

$$x^5 - 5\,u\,v\,.\,x^3 + 5\,u^2\,v^2\,.\,x - (u^5 + v^5) = 0.$$

Para que la última ecuación sea idéntica a la propuesta es necesario y suficiente que

$$-5\,u\,v = 5\,a \quad , \quad -(u^5 + v^5) = 2\,b,$$

es decir,

$$u^5 + v^5 = -2\,b \quad , \quad u\,v = -a.$$

Elevando a la quinta potencia la segunda de estas relaciones se llega al siguiente sistema:

$$u^5 + v^5 = -2\,b \quad , \quad u^5\,v^5 = -a^5$$

con las incógnitas u^5 y v^5 que verifican evidentemente a la ecuación

$$y^2 + 2\,b\,.\,y - a^5 = 0.$$

De suerte que

$$u^5 = -b + \sqrt{\Delta} \quad , \quad v^5 = -b - \sqrt{\Delta} \, ,$$

siendo $\Delta = b^2 + a^5$.

Para u y v tendremos

$$u = \sqrt[5]{-b + \sqrt{\Delta}} \quad , \quad v = \sqrt[5]{-b - \sqrt{\Delta}} \, .$$

Teniendo en cuenta la relación $uv = a$, la incógnita v puede ser representada también bajo la forma

$$v = -\frac{a}{\sqrt[5]{-b + \sqrt{\Delta}}} \, .$$

Ahora la fórmula $x = u + v$ nos suministra todas las raíces de la ecuación dada eligiendo en ella convenientemente los valores de los radicales exteriores, lo que nos da

$$\left\{ \begin{aligned} x_0 &= \sqrt[5]{-b + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[5]{-b - \sqrt{\Delta}} \\ x_1 &= \omega \sqrt[5]{-b + \sqrt{\Delta}} + \omega^4 \sqrt[5]{-b - \sqrt{\Delta}} \\ x_2 &= \omega^2 \sqrt[5]{-b + \sqrt{\Delta}} + \omega^3 \sqrt[5]{-b - \sqrt{\Delta}} \\ x_3 &= \omega^3 \sqrt[5]{-b + \sqrt{\Delta}} + \omega^2 \sqrt[5]{-b - \sqrt{\Delta}} \\ x_4 &= \omega^4 \sqrt[5]{-b + \sqrt{\Delta}} + \omega \sqrt[5]{-b - \sqrt{\Delta}} \end{aligned} \right.$$

o si se quiere

$$\left\{ \begin{aligned} x_0 &= \sqrt[5]{-b + \sqrt{\Delta}} - \frac{a}{\sqrt[5]{-b + \sqrt{\Delta}}} \\ x_1 &= \omega \sqrt[5]{-b + \sqrt{\Delta}} - \frac{\omega^4 a}{\sqrt[5]{-b + \sqrt{\Delta}}} \\ x_2 &= \omega^2 \sqrt[5]{-b + \sqrt{\Delta}} - \frac{\omega^3 a}{\sqrt[5]{-b + \sqrt{\Delta}}} \\ x_3 &= \omega^3 \sqrt[5]{-b + \sqrt{\Delta}} - \frac{\omega^2 a}{\sqrt[5]{-b + \sqrt{\Delta}}} \\ x_4 &= \omega^4 \sqrt[5]{-b + \sqrt{\Delta}} - \frac{\omega a}{\sqrt[5]{-b + \sqrt{\Delta}}} \end{aligned} \right.$$

Esta segunda forma de las raíces demuestra que para la resolución de la ecuación propuesta es necesario adjuntar al dominio de racionalidad un radical cuadrado y un solo radical de índice cinco.

La letra ω que figura en las fórmulas anteriores representa raíz primitiva de quinto grado de la unidad. Se sabe que

$$\begin{cases} \omega = \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right) \\ \omega^2 = \frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right) \\ \omega^3 = \frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right) \\ \omega^4 = \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right) \end{cases}$$

Esta solución es debida al Prof. Dr. Sergio Sispánov, de Asunción (Paraguay).

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PROPUESTOS

59. — Demostrar que cualesquiera que sean los números positivos x, y, z se verifica

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}\,.$$

60. — Siendo a, b, c los lados de un triángulo cualquiera y h_a, h_b, h_c las alturas, demostrar que tiene lugar la desigualdad

$$3\,(ab + bc + ca) \geqq 4\,(h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a)\,,$$

valiendo el signo igual únicamente para los triángulos equiláteros.

61. — Se da un triángulo ABC. Desde un punto cualquiera P tomado sobre el lado AB se traza la perpendicular PQ a AC; se trazan las rectas BQ y CP que se cortan en el punto M. Se pide el lugar geométrico del punto M cuando P recorre la recta indefinida AB.

Caracterizar esta curva por alguna propiedad; por ejemplo, determinar los puntos del infinito. Considerar eventuales casos excepcionales.

62. — Supongamos una curva plana C con una asíntota α. Si se transforma la figura por inversión respecto un punto O del plano no contenido en la asíntota, ésta se transforma en un círculo y la curva en su inversa, la cual pasa por O. Demostrar que el círculo transformado de la asíntota es el círculo osculador a la curva transformada en el punto O. (Si el centro de inversión está sobre la asíntota la curva transformada tiene en O un punto de inflexión).

C. A. Laisant, Bulletin de la Soc. Mathem. de France, Vol. 23, 1895.

63. — Sea $f(x)$ una función con derivadas hasta el orden $n + p$ ($n \geq 1$, $p \geq 1$) en un entorno α del punto $x = a$ y supongamos que $n + p$ sea el orden de la primera derivada de $f(x)$ tal que

$$\lim_{x \to a} f^{(n+p)}(x)$$

sea finito y diferente de cero.

Con estas hipótesis demostrar que

puesto $f(a + h) = f(a) + h f'(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + h\,\theta_n)$

es $$\lim_{h \to 0} \theta_n = \left[\frac{p\,!}{(n + 1)(n + 2)\ldots(n + p)}\right]^{\frac{1}{p}}.$$

¿Cómo habrá que modificar la proposición si se supone que $f^{(n+p)}(x)$ existe pero no tiene límite determinado para $x \to a$?

Este problema ha sido indicado por el Sr. EDISON FARAH, de la Facultad de Filosofía, Ciencias y Letras de la Universidad de Sao Paulo, Brasil.

64. — Se considera un sólido homogéneo constituído por un hemisferio terminado por un cono recto construído sobre el círculo máximo. Se pide la altura que debe tener el cono para que el cuerpo, puesto en plano horizontal apoyado sobre su parte esférica, quede en equilibrio indiferente.

Resolver el mismo problema suponiendo que la parte no esférica sea un semielipsoide de rotación y que, en esta parte, la densidad varíe con la distancia a la base según una ley determinada (por ejemplo, disminuyendo proporcionalmente a esta distancia).

CUESTIONES

10. — Conociendo con exactitud las longitudes de los lados de un polígono plano y los valores de los ángulos con un error posible $\leq \varepsilon$, se pide acotar el error en el área del polígono.

Esta cuestión ha sido sugerida por el Ing. Sr. José Massera, de la Facultad de Ingeniería de Montevideo, Uruguay.

11. — Se tiene una sucesión infinita de variables casuales x_1, x_2, x_3, ... que toman valores en el intervalo $0 - 1$. Siendo $k < 1$ un número fijo del mismo intervalo, ¿cuál es la probabilidad de que el producto infinito $\Pi \frac{x_i}{k}$ sea < 1?