ALGUNAS PROPIEDADES INFINITESIMALES DE LAS CURVAS PLANAS

I. Propiedades métricas

Se dice que una curva plana posee en un punto A *círculo osculador*, cuando considerando el círculo que pasa por A y otros dos puntos B, C de la curva, este círculo tiende siempre al mismo límite de cualquier manera que los puntos B y C tiendan al punto A recorriendo independientemente la curva.

Según se sabe, representando la ecuación de la curva por $y = y(x)$, y suponiendo que la función $y(x)$ tenga en el punto A primera y segunda derivadas continuas, el radio del círculo osculador o radio de curvatura está dado por la fórmula

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \tag{1}$$

o bien, si la curva està definida en ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$ es

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'} \tag{2}$$

Supongamos ahora un cálculo o una construcción que pueda determinarse dando únicamente los tres puntos A, B, C y supongamos además que los puntos B y C elegidos sobre la curva considerada que pasa por A puedan darse por medio de los valores de ciertos parámetros independientes de la curva, con lo cual los resultados del cálculo o de la construcción se expresarán en función de éstos parámetros. Si los valores de tales parámetros tienden a límites determinados cuando B y C tienden a A, sin que haga falta precisar la curva por la cual se acercan a A, y si además el límite del cálculo o construcción considerados está determinado por estos valores límites, entonces el límite de dicho cálculo o construcción es independiente de la curva y por tanto es el mismo si se sustituye ésta por su círculo osculador.

De esta observación vamos a obtener, simplemente, algunas relaciones infinitesimales de las curvas planas, válidas para los puntos en los cuales exista el círculo osculador.

1. Sea A un punto de la curva dada (fig. 1). A un lado y a otro de este punto se toman respectivamente las cuerdas $AB = c_1$, $AC = c_2 = \lambda c_1$, siendo λ una constante. Por A se traza la perpendicular $AH = h$ a la cuerda BC. Se quiere hallar el valor de

$$\lim_{c_1 \to 0} \frac{BC^2}{h}.$$

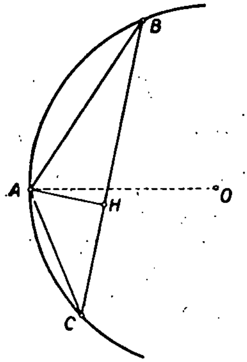

Fig. 1

Para el cálculo de este límite, además del parámetro c_1, introduzcamos el radio r del círculo que pasa por A, B, C. Se obtiene así

$$BC = 2\,r \operatorname{sen}\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{c_1}{2\,r} + \operatorname{arc\,sen}\frac{c_2}{2\,r}\right) = c_1\sqrt{1 - \frac{c_2^2}{4\,r^2}} + c_2\sqrt{1 - \frac{c_1^2}{4\,r^2}}$$

$$h = c_1 \operatorname{sen}\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{c_2}{2\,r}\right) = \frac{c_1\,c_2}{2\,r} \qquad (2)$$

y de aquí, puesto que cuando B y C tienden a A, r tiende al radio R del círculo osculador, resulta

$$\lim_{c_1 \to 0} \frac{BC^2}{h} = 2\,R\,\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda}. \qquad (3)$$

En particular si se toma $\lambda = 1$, o sea $c_1 = c_2$, se obtiene que el límite anterior vale 8 R.

Observamos de paso que, de (2), multiplicando ambos miembros por BC se deduce $c_1\,c_2\,BC = 2\,r\,h\,BC$ y llamando por simetría $BC = c_3$ y representando por T el área del triángulo ABC se tiene la fórmula (*)

(*) Esta fórmula es conocida, ver por ej. Darboux, *Théorie des Surfaces* Vol. IV pág. 426. Es probable, además, que otras fórmulas obtenidas en esta nota sean también conocidas; pretendemos únicamente hacer una exposición elemental y sistemática.

$$\lim_{c_1, c_2 \to 0} \frac{c_1 c_2 c_3}{T} = 4 R. \qquad (4)$$

2. Multiplicando por h^2 el numerador y denominador del primer miembro de (3) y teniendo T el mismo significado anterior, resulta

$$\lim_{c_1 \to 0} \frac{T^2}{h^3} = \frac{1}{2} \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda} R. \qquad (5)$$

3. A partir del punto A tomamos sobre la curva la cuerda $AB = c$ y sobre la tangente el segmento $AB' = \lambda c$ (fig. 2).

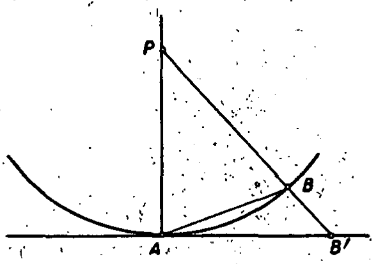

Fig. 2

La recta BB' cortará en un punto P a la normal a la curva en el punto A. Queremos hallar la posición límite del punto P (o sea, el valor límite del segmento AP) cuando el punto B tiende a A.

También en este caso todos los elementos están determinados por la posición de 3 puntos, dos de ellos confundidos en A (los cuales dan la tangente) y el punto B. Consideramos el círculo que pasa por B y es tangente en A a la recta AB; sea r su radio.

Para este círculo, llamando φ al ángulo AB'P y α al ángulo B'AB, se tiene

$$AP = AB' \operatorname{tang} \varphi = \lambda c \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\lambda - \cos \alpha} = 2 r \lambda \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\lambda - \cos \alpha}$$

y cuando α tiende a cero, o sea cuando B tiende al punto A es

$$\lim AP \begin{cases} = 0 \text{ si } \lambda \neq 1 \\ = 4 R \text{ si } \lambda = 1, \end{cases} \qquad (6)$$

es decir, P tiende al mismo punto A si $\lambda \neq 1$ y al punto distante de A cuatro veces el radio de curvatura si $\lambda = 1$.

4. Es curioso comparar este resultado con aquel que se obtiene cuando sobre la tangente en A, en lugar de la *cuerda* AB se lleva el *arco* de curva AB y se hace la misma construcción de unir el extremo obtenido con B, tratándose de hallar la posición límite del punto P.

Para este caso conviene recordar algunas fórmulas analíticas. Si la curva está dada por sus ecuaciones paramétricas en función del arco s, es decir por $x = x(s)$, $y = y(s)$ con la condición $x'^2 + y'^2 = 1$, eligiendo por eje x la tangente y por y la normal, en el punto origen será $y'_0 = 0$, $x'_0 = 1$. Además de (2) se deduce que $R = \frac{1}{y''_0}$. Derivando $x'^2 + y'^2 = 1$ se tiene $x'x'' + y'y'' = 0$ que nos dice, según los valores anteriores, que en el punto A es $x''_0 = 0$.

Las coordenadas de B son (x, y) y las de B' son $(s, 0)$. La distancia AP será

$$AP = \frac{s\,y}{s - x}.$$

Aplicando la regla de l'Hospital sucesivamente para hallar el límite de esta expresión para s tendiendo a cero, se obtiene

$$\lim AP = \lim \frac{s\,y}{s - x} = \lim \frac{y + s\,y'}{1 - x'} = \lim \frac{2\,y' + s\,y''}{-x''}\ ;$$

de la igualdad $x'x'' + y'y'' = 0$ se deduce que el último cociente puede escribirse $\frac{2\,y'x' + s\,x'y''}{y'y''} = \frac{2\,x'}{y''} + \frac{s\,x'}{y'}$; el primer sumando, para s tendiendo a cero tiende a $\frac{2}{y''_0} = 2\,R$ y para el segundo, aplicando de nuevo la regla de l'Hospital, es $\lim \frac{s\,x'}{y'} = \lim \frac{x' + s\,x''}{y'} = \frac{1}{y''_0} = R$.

En definitiva es por tanto

$$\lim_{s \to 0} AP = 3\,R, \qquad (7)$$

resultado distinto del (6) obtenido anteriormente, aunque a primera vista podría parecer que debía obtenerse el mismo.

5. Más generalmente podemos proponernos el problema de hallar la posición límite del punto P cuando la cuerda o

el arco AB se llevan, no sobre la tangente, sino sobre otra curva tangente a la primera en el punto A.

El caso de la cuerda se puede resolver fácilmente observando que el límite debe ser el mismo si se sustituyen las curvas dadas por sus círculos osculadores. Este método fracasa únicamente en el caso de que estos círculos osculadores

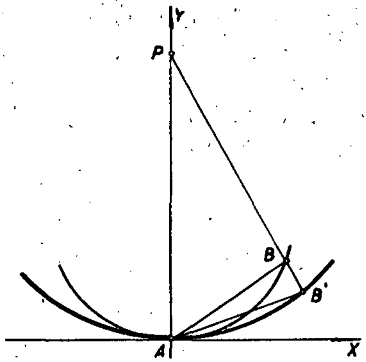

Fig. 3

sean uno mismo, es decir, en el caso en que las dos curvas tengan en el punto A la misma curvatura; entonces hay que introducir los valores de las derivadas superiores a la segunda de las funciones que representan las curvas en el punto A y seguir un método análogo al que seguiremos en el número siguiente para el caso de los arcos.

Prescindiendo de este caso, y considerando los círculos que pasan por B y B' respectivamente (siendo la longitud c de la cuerda AB igual a la AB') y tienen en A la tangente dada se obtiene que las coordenadas de B y B' son (siendo r y r' los radios de los dos círculos):

$$B\left(\frac{c}{2r}\sqrt{4r^2-c^2},\ \frac{c^2}{2r}\right),\quad B'\left(\frac{c}{2r'}\sqrt{4r'^2-c^2},\ \frac{c^2}{2r'}\right)$$

y por tanto la ordenada AP del punto en que la recta que los une corta a la normal a la curva vale

$$AP = \frac{c^2\left(\sqrt{4r'^2-c^2}-\sqrt{4r^2-c^2}\right)}{2r\sqrt{4r'^2-c^2}-2r'\sqrt{4r^2-c^2}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{4r'^2-c^2}-\sqrt{4r^2-c^2}\right)\left(r\sqrt{4r'^2-c^2}+r'\sqrt{4r^2-c^2}\right)}{2(r'^2-r^2)}$$

Cuando c tiende a cero los radios r y r' tienden respectivamente a los radios R y R' de los círculos osculadores a las curvas dadas. Queda pues

$$\lim_{c \to 0} AP = \frac{4\,RR'\,(R' - R)}{R'^2 - R^2} = \frac{4\,RR'}{R + R'} \tag{8}$$

Para $R' = \infty$ se obtiene de nuevo el valor (6).

6. Supongamos ahora que sobre las dos curvas se llevan los arcos, el AB igual al AB', y se quiere hallar la posición límite del punto en que la recta BB' corta a la normal en A, cuando dicho arco tiende a cero.

Conservemos para la curva AB las ecuaciones paramétricas $x = x(s)$, $y = y(s)$ del n.º 4. Las ecuaciones de la segunda curva sean, análogamente, $x_1 = x_1(s)$, $y_1 = y_1(s)$ referidas también al arco como parámetro.

La recta que une los puntos B y B' correspondientes al mismo valor de s, corta al eje y, o sea a la normal a ambas curvas en A, en el punto P tal que

$$AP = \frac{x\,y_1 - x_1\,y}{x - x_1}.$$

Para hallar la posición límite del punto P para s tendiendo a cero, apliquemos sucesivamente la regla de l'Hospital:

$$\lim_{s \to 0} AP = \lim \frac{(x'\,y_1 + x\,y'_1) - (x'_1\,y + x_1\,y')}{x' - x'_1} =$$

$$\lim \frac{(x''\,y_1 + 2\,x'\,y'_1 + x\,y''_1) - (x''_1\,y + 2\,x'_1\,y' + x_1\,y'')}{x'' - x''_1} =$$

$$\lim \frac{(x'''\,y_1 + 3\,x''\,y'_1 + 3\,x'\,y''_1 + x\,y'''_1) - (x'''_1\,y + 3\,x''_1\,y' + 3\,x'_1\,y'' + x_1\,y''')}{x''' - x'''_1} \tag{9}$$

Siendo las derivadas respecto el arco s, vimos en el n.º 4 que en el punto $s = 0$ era $x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = \frac{1}{R}$. Ahora necesitamos además el valor de $x'''(0)$; para encontrarlo, derivando la expresión $x'\,x'' + y'\,y''' = 0$, se obtiene

$$x' x''' + x''^2 + y''^2 + y' y''' = 0 \qquad (10)$$

que, para $s = 0$, (suponiendo que $y''(0)$ es finito) nos da $x''(0) = -\frac{1}{R^2}$.

Con esto resulta

$$\lim_{s \to 0} AP = \frac{3\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right)}{\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R^2}} = \frac{3}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R}}, \qquad (11)$$

que para $R_1 = \infty$ coincide con el valor (7) como debe ser.

Esto supone $R \neq R_1$, es decir, que las dos curvas tienen en A distinto radio de curvatura. Si fuese $R = R_1$, deberíamos aplicar en (9) todavía una vez más la regla de l'Hospital, quedando

$$\lim_{s \to 0} AP = \lim \frac{1}{x'''' - x''''_1}\Big[(x'''' y_1 + 4 x''' y'_1 + 6 x'' y''_1 + 4 x' y'''_1 + x y''''_1) - (x''''_1 y + 4 x'''_1 y' + 6 x''_1 y'' + 4 x'_1 y''' + x_1 y'''')\Big].$$

Para hallar el valor de $x''''(0)$, observemos que, siendo, según (2), $x' y'' - x'' y' = \frac{1}{R}$, se sigue que $x' y''' - y' x''' = -\frac{R'}{R^2}$ que en el origen $s = 0$ nos da $y'''(0) = -\frac{R'}{R^2}$. Derivando de nuevo (10) se obtiene, además,

$$x' x'''' + 3 x'' x''' + 3 y'' y''' + y' y'''' = 0$$

que (suponiendo $y''''(0) \neq \infty$) nos da $x''''(0) = 3\frac{R'}{R^3}$, y por tanto

$$\lim_{s \to 0} AP = \frac{-4\frac{R'_1}{R_1^2} + 4\frac{R'}{R^2}}{3\left(\frac{R'}{R^3} - \frac{R'_1}{R_1^3}\right)}$$

o bien, siendo por hipótesis $R = R_1$, pero suponiendo $R' \neq R'_1$,

$$\lim_{s \to 0} AP = \frac{4}{3} R. \qquad (12)$$

Este resultado, junto con (11), presenta un curioso caso de no invertibilidad de límites. Consideremos, en efecto, dos curvas tangentes en un punto A y con radios de curvatura distintos R y R_1. Tomemos sobre cada curva a partir de A arcos iguales $AB = AB' = s$. Tendremos así determinados los puntos B y B'; supongamos que la recta BB' que los une corta a la normal a la curva en A en el punto P. Consideremos la segunda curva AB' como variable de manera que su radio de curvatura R_1 en el punto A tienda a R y supongamos que se quiera hallar la posición límite del punto P para s tendiendo a cero y R_1 tendiendo a R. Según (11), si primero se hace $s \to o$ y luego $R_1 \to R$ se obtiene que la posición límite está dada por $\lim AP = \frac{3}{2} R$; en cambio (12) nos dice que si primero se hace tender R_1 a R y luego se hace $s \to o$, se obtiene $\lim AP = \frac{4}{3} R$.

7. El problema anterior se puede plantear de otra manera. Supongamos dos curvas tangentes en un punto A. Se desea encontrar un punto P (α, β) del plano, tal que, proyectando desde él una de las curvas sobre la otra, la diferencia entre los arcos AB' y AB obtenidos, sea un infinitésimo del mayor orden posible cuando B tiende al punto de tangencia A.

En el entorno del punto A, las ecuaciones $x = x(s)$, $y = y(s)$ de la curva AB, admitiendo la existencia de las 4 primeras derivadas de las funciones $x(s), y(s)$ en el punto $s = o$ (la última continua), se pueden escribir

$$x = s + b\, s^3 + c\, s^4 + o(s^4), \quad y = a'\, s^2 + b'\, s^3 + c'\, s^4 + o(s^4) \tag{13}$$

representando por $o(s^4)$ infinitésimos de orden *superior* a s^4. En (13) falta el término en s^2 del desarrollo de $x(s)$ y el término en s del de $y(s)$ puesto que, tomando la tangente y la normal como ejes coordenados, los coeficientes de dichos términos valen respectivamente $\frac{1}{2} x''(o) = o$, $y'(o) = o$.

Análogamente, las ecuaciones de la segunda curva AB', si representamos por σ su arco, serán de la forma

$$\begin{aligned} x_1 &= \sigma + b_1\, \sigma^3 + c_1\, \sigma^4 + o(\sigma^4), \\ y_1 &= a'_1\, \sigma^2 + b'_1\, \sigma^3 + c'_1\, \sigma^4 + o(\sigma^4). \end{aligned} \tag{14}$$

Los coeficientes de (13) y (14) están relacionados con los radios de curvatura respectivos R y R_1 por:

$$b = \frac{1}{6} x'''(o) = -\frac{1}{6\, R^2}, \quad a' = \frac{1}{2} y''(o) = \frac{1}{2\, R}, \quad b' = \frac{1}{6} y'''(o) = -\frac{R'}{6\, R^2}$$

$$c = \frac{1}{24} x''''(0) = \frac{R'}{8R^3}, \quad c' = \frac{1}{24} y''''(0) = -\frac{1}{24}\left[\left(\frac{R'}{R^2}\right)' + \frac{3}{R^2}\right] \qquad (15)$$

y análogamente para la segunda curva.

La recta que une el punto $P(\alpha, \beta)$ con el punto $B(x, y)$ cortará a la curva x_1, y_1 en el punto B' cuyo valor correspondiente de σ estará dado por la ecuación de la recta PB:

$$(y - \beta)\, x_1(\sigma) - (x - \alpha)\, y_1(\sigma) + x\beta - y\alpha = 0.$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores (13) y (14) queda, para s suficientemente pequeño,

$$\begin{aligned}&(a' s^2 + b' s^3 + c' s^4 + o(s^4) - \beta)\,(\sigma + b_1 \sigma^3 + c_1 \sigma^4 + o(\sigma^4))\\ &- (s + b s^3 + c s^4 + o(s^4) - \alpha)\,(a'_1 \sigma^2 + b'_1 \sigma^3 + c'_1 \sigma^4 + o(\sigma^4))\\ &+ (s + b s^3 + c s^4 + o(s^4))\,\beta - (a' s^2 + b' s^3 + c' s^4 + o(s^4))\,\alpha = 0.\end{aligned} \qquad (16)$$

Pongamos

$$\sigma = s + M s^2 + N s^3 + Q s^4 + \dots \qquad (17)$$

El problema consiste en determinar α, β (coordenadas de P) de manera que este desarrollo (17) tenga el mayor número posible de coeficientes $M, N, Q, \dots$ nulos, con lo cual $\sigma - s$ será un infinitésimo del mayor orden posible.

Sustituyendo (17) en (16) y ordenando respecto las potencias de s, queda

$$\begin{aligned}&((a'_1 - a')\,\alpha - \beta M)\, s^2 +\\ &(a' - \beta N - \beta b_1 - a'_1 + 2\alpha a'_1 M + b\beta + \alpha b'_1 - b'\alpha)\, s^3 +\\ &(b' - \beta Q + a' M - 3\beta b_1 M - \beta c_1 + 2\alpha a'_1 N - 2 M a'_1 +\\ &\qquad 3\alpha b'_1 M - b'_1 + \alpha c'_1 + c\beta - c'_1 \alpha)\, s^4 + o(s^4) = 0.\end{aligned} \qquad (18)$$

Si supusiéramos α y β conocidos, esta expresión, igualando a cero los coeficientes sucesivos, nos iría dando los coeficientes $M, N, Q, \dots$ de la expresión (17) y por tanto el valor de σ correspondiente al punto B'. Pero el problema propuesto no es éste, sino el de determinar α, β con la condición de que sean iguales a cero el mayor número posible de coeficientes $M, N, Q, \dots$.

Para ello, el primer coeficiente de la identidad última, nos dice al igualarlo a cero que, si $a'_1 \neq a'$, para que sea $M = 0$, debe ser también $\alpha = 0$, es decir, el punto P debe estar sobre la normal común. Con esta condición, al igualar a cero el segundo coeficiente, para que sea $N = 0$ debe ser

$$\beta = \frac{a'_1 - a'}{b - b_1} = \frac{3}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R}}.$$

Es decir, el punto P es precisamente el mismo punto obtenido en el problema del n.º 6. Como, con estos valores de α y β, los coeficientes sucesivos del desarrollo (17) ya vendrán determinados y en general serán distintos de cero, resulta que, tomando P como centro de proyección, en el caso de ser $a'_1 \neq a'$ o sea $R \neq R_1$, el infinitésimo $\sigma - s$ es de 4.º orden.

Si $a'_1 = a'$ el primer coeficiente de (18) se anula para $M = 0$ cualquiera que sea α. Podemos entonces disponer de α y β para anular al 2.º y 3er. coeficiente de (18) para $M = N = Q = 0$. Como, según (15), siendo $R_1 = R$ es también $b_1 = b$, el segundo coeficiente de (18) nos dice que debe ser $\alpha = 0$ y el tercer coeficiente da

$$\beta = \frac{b' - b'_1}{c_1 - c} = \frac{-\frac{R'}{6R^2} + \frac{R'_1}{6R_1^2}}{\frac{1}{8}\left(\frac{R'_1}{R_1^3} - \frac{R'}{R^3}\right)} = \frac{4}{3} R.$$

lo mismo que se obtuvo en (12).

Esto supone $R'_1 \neq R'$. Si todavía estos valores son iguales, se deben tomar más términos de los desarrollos (13), (14) y el orden del infinitésimo $\sigma - s$ resulta superior a 5.

8. Dados tres puntos A, B, C sobre la curva, consideremos la cuerda $BC = c$ y el ángulo $BAC = \theta$ (fig. 4). Cualquier función de c y θ valdrá lo mismo para la curva que para el círculo que pasa por A, B y C. Para el caso del círculo es $c = 2r \operatorname{sen} \theta$ y por tanto, considerando el límite para B y C tendiendo al punto A en cuyo caso r tiende al radio R del círculo osculador, de cualquier manera como tiendan a este punto es

$$\lim \frac{c}{\theta} = 2R. \qquad (19)$$

En particular, si B y A coinciden desde un principio, llamando c a la longitud de una cuerda que sale de A y θ al ángulo que ella forma con la tangente, al tender este ángulo a cero, se verifica también (19).

9. Interesante, porque se presta a una generalización que luego veremos, es el caso siguiente (fig. 5).

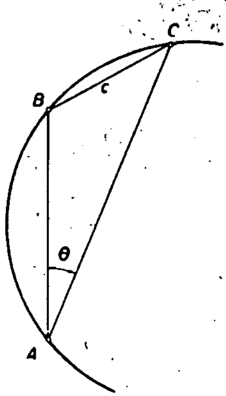

Fig. 4

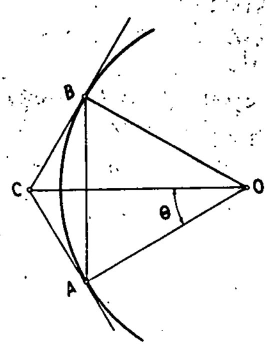

Fig. 5

Consideremos el punto A y la tangente en él. Tomemos un punto B próximo a A y sea O el punto de intersección de la normal a la curva en A y la mediatriz de AB; sea C el punto en que la misma mediatriz corta a la tangente. Sea T el área del triángulo AOB y t la del triángulo ABC. Toda la figura está determinada por 3 puntos: dos confundidos en A y el B. Por tanto, toda operación con los triángulos T y t conduce al mismo resultado si se consideran A y B puntos de la curva dada o puntos del círculo tangente en A y que pasa por B, el cual, en el límite para B tendiendo a A, tiende al círculo osculador en este punto.

Para dicho círculo, llamando θ al ángulo AOC es

$$T = r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta ; \quad t = r^2 \operatorname{tang} \theta \operatorname{sen}^2 \theta$$

y por tanto, como el límite de r es el radio R del círculo osculador, se tiene

$$\lim_{B \to A} \frac{T^3}{t} = R^4. \tag{20}$$

II. Propiedades afines.

Se llama *cónica osculatriz* a una curva plana en un punto, a la cónica límite, cuando existe, de aquellas determinadas por 5 puntos de la curva cuando todos estos puntos tienden a coincidir en el punto considerado. Se entiende que, para que exista cónica osculatriz, este límite debe ser el mismo de cualquier manera como los puntos tiendan a coincidir en el punto considerado, independientemente unos de otros.

Por consideraciones análogas a las de los casos anteriormente estudiados se deduce que todas las expresiones o propiedades infinitesimales de una curva que dependan únicamente de 5 puntos infinitamente próximos, serán las mismas y tendrán el mismo valor para la curva y para su cónica osculatriz.

Veamos algunas propiedades que derivan de esta simple observación.

1. Consideremos la cuerda BC paralela a la tangente en un punto A de la curva y la recta r que une A con el punto medio de BC (fig. 6). El conjunto de la figura está determinado por 4 puntos: dos confundidos en A (que dan la tangente) y los B y C. Por tanto la posición límite de la recta r, cuando la cuerda BC tiende a la tangente, será la misma para la curva dada que para cualquier otra curva que tenga con ella 4 puntos confundidos en A; en particular, para cualquier cónica que tenga en A cuatro puntos confundidos con la curva dada. Pero, para las cónicas, la recta r que une uno de sus puntos con el punto medio de una cuerda paralela a la tangente, es un diámetro. Por tanto: la posición límite de la recta r es el diámetro de cualquier cónica que tenga en A cuatro puntos comunes con la curva, en particular el diámetro de la cónica osculatriz.

Se llama *parábola osculatriz* a una curva en un punto, a la parábola que tiene en este punto 4 puntos confundidos comunes con la curva. Como por 4 puntos pasan en general 2 parábolas (es el problema de las cónicas determinadas por 4 puntos y una tangente), parecería que hay dos parábolas osculatrices, pero una de ellas degenera en la tangente contada dos veces y por tanto sólo queda una parábola propiamente dicha. Por consiguiente, la propiedad anterior puede enunciarse también: la posición límite de la recta r es el diámetro de la parábola osculatriz a la curva en el punto considerado.

La importancia en geometría diferencial de la posición límite de la recta r estriba en que, transformando la curva por una *afinidad,* la parábola osculatriz en un punto se transformará en la parábola osculatriz de la transformada en el punto homólogo y por tanto un diámetro de la primera en un diámetro de la segunda; la recta límite r, tal como se ha definido, es, por tanto, invariante por afinidades y por esta razón se llama *normal afín* a la curva en el punto A.

2. Una expresión que depende únicamente de 5 puntos próximos de la curva es la siguiente:

Consideremos el punto A y la tangente en él (fig. 7). Por un punto próximo B tracemos la paralela BC a dicha tangente y la tangente BE a la curva. Uniendo A con el punto medio de BC se obtienen los puntos H y E; unamos A y E con C. Toda la figura está determinada por 5 puntos: dos confundidos en A, dos confundidos en B y el punto C. Por consiguiente, cualquier relación entre los triángulos que aparecen en la figura será la misma para la curva dada que pará la cónica que pasa por estos 5 puntos, la cual en el límite para B tendiendo a A tiende a la cónica osculatriz.

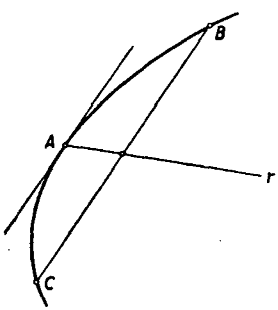

Fig. 6

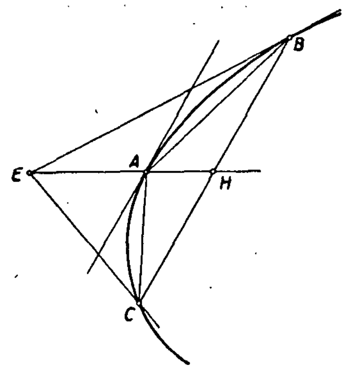

Fig. 7

Si se quiere, por ejemplo, calcular el límite del cociente entre las áreas de los triángulos ABH y EBH para B tendiendo a A, bastará hallar este límite para las cónicas.

Para una cónica, los triángulos ABH y EBH tienen la misma altura y en cuanto a las bases, por ser la recta BC la polar de E, los puntos E y H separan armónicamente al punto A y al punto A' (no dibujado en la figura) en que EH corta de nuevo a la cónica; por tanto, en valor absoluto, es

$$\frac{HA}{EA} = \frac{HA'}{EA'}.$$

Cuando B tiende a A, H y E tienden al mismo punto A y por tanto el cociente anterior tiende a 1. Luego el límite del cociente de las áreas de los triángulos ABH y EBH es igual a 1/2.

Por tratarse de triángulos respectivamente de área doble de los anteriores, es también

$$\lim_{B \to A} \frac{ABC}{EBC} = \frac{1}{2}, \qquad (21)$$

relación válida para cualquier curva, en todo punto que admita cónica osculatriz.

3. En el caso anterior, el valor límite encontrado es una constante, independiente del punto y de la curva. En otros casos, así como en los casos de la primera parte se obtenían relaciones cuyo límite dependía del radio del círculo osculador, ahora se pueden obtener expresiones cuyo límite dependa de los elementos de la cónica osculatriz.

Un ejemplo importante se encuentra generalizando el problema n.º 9 de I.

Tomemos ahora dos puntos A, B y las tangentes en ellos, que se cortarán en un punto D (fig. 8). Consideremos además el punto C en que la paralela por B a la tangente en A vuelve a cortar a la curva. Sea AO la recta que une A con el punto medio H de BC, y DO la recta que une D con el punto medio E de AB.

Tenemos de esta manera los triángulos ABO de área T y ADB de área t análogos a los del caso del n.º 9 de la primera parte. La novedad está en que ahora las construcciones hechas, consistentes en trazar tangentes y fijar puntos medios de segmentos, se conservan por afinidades; es decir, transformando toda la figura por una afinidad, los elementos de la misma se corresponden.

Consideremos en particular las *afinidades equivalentes*, es decir, aquellas que conservan las áreas. Entonces, si podemos obtener una relación entre las áreas T y t que tenga límite finito al tender B hacia A, este límite será un invariante de la curva en el punto A, respecto las afinidades equivalentes.

Para calcular el límite de cualquier expresión formada con los elementos de la figura se puede proceder como en los ejemplos del caso I. Se calcula la expresión de que se trata para la cónica que pasa por A, B, C y tiene en A y B las mismas tangentes que la curva; si esta expresión es una función de los parámetros que fijan los puntos A, B, C y de los elementos de la cónica (por ejemplo las longitudes de los ejes), al hacer tender los parámetros a los valores necesarios para que B y C vayan a confundirse con A, los elementos de la cónica tenderán a los elementos de la cónica osculatriz. Si con ello la expresión considerada tiene límite determinado, éste vendrá expresado únicamente en función de los elementos de la cónica osculatriz y será por tanto el mismo para cualquier curva con la misma cónica osculatriz, en particular, para esta misma cónica.

Bastará, pues, relacionar T y t para el caso de una cónica. En este caso, mediante una afinidad equivalente que conserve la cónica, se puede llevar el punto A a uno de los vértices y entonces T y t se calculan directamente sin dificultad.

Así, para el caso de la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ poniendo $AH = h$, es (fig. 9)

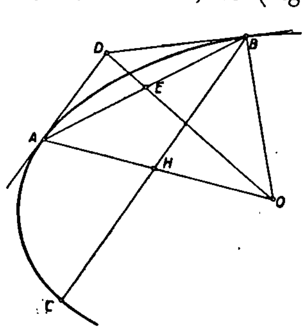

Fig. 8

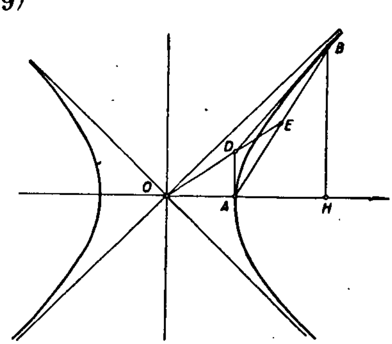

Fig. 9

$$HB = \frac{b}{a}\sqrt{2ah + h^2} \quad ; \quad AD = \frac{b}{2a + h}\sqrt{2ah + h^2}$$

y de aquí

$$T = \frac{1}{2} OA \cdot BH = \frac{1}{2} b \sqrt{2ah + h^2},$$

$$t = \frac{1}{2} AD \cdot AH = \frac{1}{2} \frac{bh}{2a + h}\sqrt{2ah + h^2}$$

de donde

$$\lim_{h \to 0} \frac{T^3}{t} = (ab)^2. \tag{22}$$

Para el caso de una elipse, procediendo de la misma manera, o bien observando que se puede reducir el problema al caso del círculo por afinidad, se obtiene el mismo valor límite, siendo ahora a y b los semiejes de la elipse. Para el caso de la parábola el límite anterior es infinito.

Cualquiera que sea la curva, si en el punto A tiene una cónica osculatriz cuyos semiejes sean a y b, valdrá esta relación (22).

En lugar del límite anterior se suele considerar

$$\lim_{B \to A} \frac{T}{\sqrt[3]{t}} = (ab)^{\frac{2}{3}}.$$

Esta expresión (que se acostumbra a tomar con signo + si la cónica es una elipse, y con signo — si es una hipérbola), siendo a y b los semiejes de la cónica osculatriz, es, según se dijo, invariante por afinidades equivalentes y se llama *radio de curvatura afín* de la curva en el punto A. Se tiene así una representación geométrica de la curvatura afín de las curvas planas.

L. A. Santaló