SOBRE EL CONCEPTO DE CURVATURA DE SUPERFICIES

La palabra « curvatura » de una superficie en un punto encierra una idea intuitiva que es de dominio común. Para dar un sentido preciso y hacer utilizable en matemáticas esta idea intuitiva se han señalado diversas maneras de *medir* la curvatura de una superficie en un punto, es decir, diversas maneras de asignar a cada punto de una superficie un valor numérico que sirva para indicar el mayor o menor grado con que se presenta esta idea intuitiva y en un principio vaga de « curvatura ».

Nos proponemos hacer una recopilación de los diversos modos cómo dicha curvatura puede ser medida.

Un resumen histórico sobre el origen de muchos conceptos que mencionaremos, se encuentra en las conferencias dadas en esta Facultad de C. Matemáticas de Rosario por el Prof. A. TERRACINI en septiembre de 1941, publicadas bajo el título « Orígenes de algunos conceptos geométricos » en el Vol. III, nº 6 de las *Publicaciones del Instituto de Matemáticas.*

NOCIONES PRELIMINARES

1. *Fórmulas de Meusnier, Euler y Olinde Rodrigues.* — Para no tener que hacer referencia a tratados diversos, haremos en este primer apartado un resumen de los principales resultados de la teoría de superficies que supondremos conocidos

Respecto un sistema de ejes rectangulares x_1, x_2, x_3, una superficie está definida por 3 ecuaciones paramétricas

$$x_1 = x_1(u, v) \quad , \quad x_2 = x_2(u, v) \quad , \quad x_3 = x_3(u, v) \tag{1}$$

o bien, más brevemente, por una sola ecuación simbólica

$$x = x(u, v). \tag{2}$$

Si se supone que v se mantiene constante y que u varía, las ecuaciones [1] o [2] representan una línea contenida en la superficie; para cada valor constante de v habrá una de estas líneas, que formarán, por tanto, un haz. Si es u el parámetro que se mantiene constante y v el que varía se tiene un nuevo haz de curvas sobre la superficie. Estos dos haces forman lo que se llama un *sistema de coordenadas curvilíneas* sobre la superficie.

Consideremos un punto P de la superficie. Supondremos siempre que se trata de un *punto ordinario*, es decir, un punto tal que en un entorno del mismo las funciones [1] admiten las derivadas parciales hasta el segundo orden, las cuales son además continuas.

Entonces, todas las curvas de las superficies que pasan por P y tienen en él el mismo plano osculador, tienen además la misma curvatura. Supongamos una curva de la superficie que pase por P y cuyo plano osculador en este punto sea normal a la superficie; sea R su radio de curvatura en P. Para otra curva de la superficie que tenga la misma tangente y cuyo plano osculador forme un ángulo θ con el plano normal anterior, el radio de curvatura ρ vale

$$\rho = R \cos \theta. \qquad [3]$$

Esta es la *fórmula de* MEUSNIER (1776) que permite determinar la curvatura de cualquier curva que pase por el punto P de la superficie dada, conocidas las curvaturas de las secciones planas normales (1).

Consideremos ahora todas las secciones de la superficie por planos normales que pasen por P. El radio de curvatura R de una cualquiera de ellas está dado por la *fórmula de* EULER (1760)

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{R_2} \qquad [4]$$

siendo R_1, R_2 los radios de curvatura de 2 particulares secciones normales, perpendiculares entre sí y llamadas *secciones principales*;

---

(1) La memoria de MEUSNIER, titulada *Memoire sur la courbure des surfaces*, fué leída en la Academia de Ciencias de París en 1776 y publicada en 1785 en la colección de *Mémoires des Savants étrangers*, tomo X. La demostración de la fórmula [3] se puede ver, por ejemplo, en P. APPELL, *Elements d'Analyse Mathématique* (deuxieme édition), París, 1905, pág. 411, o también S. PINCHERLE, *Lezioni di Calcolo infinitesimale*, tomo II, pág. 261.

φ es el ángulo que forma la dirección de la sección normal considerada, cuyo radio de curvatura es R, con la dirección principal cuyo radio de curvatura es R_1. Los radios R_1, R_2 se llaman los radios principales de curvatura de la superficie en el punto P (2).

Las líneas de la superficie que en cada punto son tangentes a las direcciones principales se llaman *líneas de curvatura*. Por ser perpendiculares entre sí, como hemos dicho, las dos direcciones principales en cada punto, las líneas de curvatura formarán dos haces de curvas ortogonales. Para simplificar los cálculos es útil muchas veces elegir los parámetros u, v de la superficie, de manera que las curvas u = cte., v = cte. sean precisamente las líneas de curvatura.

Consideremos el vector $\xi = \xi\,(u, v)$ de módulo 1 normal a la superficie, es decir, el vector cuyas componentes son los cosenos directores de la recta normal a la superficie en cada punto u, v. Por x_u, x_v indicaremos los *vectores* cuyas componentes son las derivadas parciales respectivas de las ecuaciones paramétricas de la superficie [1]. Si las líneas u = cte., v = cte. son las de curvatura de la superficie, se verifican las igualdades vectoriales

$$\xi_u = -\frac{1}{R_1}\,x_u\,, \quad \xi_v = -\frac{1}{R_2}\,x_v\,. \qquad [5]$$

Estas son las llamadas *fórmulas de* OLINDE RODRIGUES (1816). Si se quieren escribir explícitamente, llamando λ_1, λ_2, λ_3 a los cosenos directores de la normal, en lugar de las igualdades vectoriales [5] tendremos

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial u} = -\frac{1}{R_1}\,\frac{\partial x_i}{\partial u}\,, \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial v} = -\frac{1}{R_2}\,\frac{\partial x_i}{\partial v} \quad (i = 1, 2, 3)$$

siendo $x_i = x_i\,(u, v)$ las ecuaciones paramétricas [1] (3).

(2) La memoria de EULER, titulada *Recherches sur la courbure des surfaces*, apareció en los volúmenes de la *Histoire de l'Académie des sciences et belles lettres* de Berlín, 1760. La demostración de la fórmula [4] puede verse, por ejemplo, en APPELL, loc. cit., pág. 419, o también en PINCHERLE, loc. cit., pág. 255.

(3) Las fórmulas de OLINDE RODRIGUES fueron publicadas por su autor en la memoria titulada *Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de courbure des surfaces*, publicada en la *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique*, tomo III, 1816. La demostración de dichas fórmulas se puede ver en E. GOURSAT, *Cours d'Analyse*, tomo 1, pág. 616.

3. *Angulo de una curva con las líneas coordenadas.* — Una curva sobre la superficie [1] estará determinada dando u, v como funciones $u(t)$, $v(t)$ de un parámetro t. El elemento de arco ds de esta curva estará dado entonces por

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} dx_i^2 = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}du + \frac{\partial x_i}{\partial v}dv\right)^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2, \quad [6]$$

donde, como es costumbre, se ha puesto

$$E = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)^2, \quad F = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\,\frac{\partial x_i}{\partial v}\right), \quad G = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)^2. \quad [7]$$

Estas expresiones E, F, G en forma vectorial se escriben

$$E = x_u^2 \quad , \quad F = x_u \cdot x_v \quad , \quad G = x_v^2 \quad [8]$$

donde los productos de los segundos miembros son productos escalares de vectores.

Vectorialmente, ds es el módulo del vector $dx = x_u\,du + x_v\,dv$. Por tanto el ángulo φ que forma la curva considerada con la v = cte. cuya tangente es el vector x_u, podrá deducirse, según la definición misma de producto escalar de vectores, de

$$(x_u\,du + x_v\,dv) \cdot x_u = |\,x_u\,| \cdot ds \cdot \cos\varphi,$$

o bien, según [8]

$$E\,du + F\,dv = \sqrt{E}\,ds\cos\varphi. \quad [9]$$

Análogamente, el ángulo ψ que la misma curva forma con la u = cte. cuya tangente es x_v, se deducirá de

$$F\,du + G\,dv = \sqrt{G}\,ds\cos\psi. \quad [10]$$

4. *Area de una superficie.* — El área de una porción de superficie, a partir de los coeficientes E, F, G dados por [7] u [8], se calcula por la integral

$$A = \iint \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv \quad [11]$$

extendida a la región considerada de superficie ([4]).

([4]) Esta expresión del área se puede ver en GOURSAT, loc. cit., pág. 323.

5. *Desarrollo de las ecuaciones paramétricas de una curva alabeada en el entorno de uno de sus puntos.* — En lo sucesivo, además de las nociones anteriores pertenecientes a la teoría de superficies, necesitaremos también el siguiente desarrollo de las ecuaciones paramétricas de una curva alabeada en el entorno de un punto.

Sea una curva del espacio y un punto P de la misma. Tomemos el sistema de ejes coordenados rectangulares de origen P formado por la tangente como eje x_1, la normal principal como eje x_2 y la perpendicular a ambas o binormal como eje x_3; es decir, el plano x_1, x_2 es el plano osculador.

Siendo s el arco de la curva, en un entorno del origen, las ecuaciones paramétricas de la misma tendrán la forma

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + O(s^3) \\ x_2 &= b_2 s^2 + b_3 s^3 + O(s^3) \qquad [12] \\ x_3 &= c_3 s^3 + O(s^3), \end{aligned}$$

donde los coeficientes son las derivadas sucesivas, de orden igual al subíndice respectivo, en el punto $s = 0$ y con $O(s^3)$ se indican los términos complementarios, que son infinitésimos de orden superior a s^3. En general indicamos con $O(s^n)$, como es costumbre, un infinitésimo de orden *superior* a s^n, es decir, una expresión tal que

$$\lim_{s \to 0} \frac{O(s^n)}{s^n} = 0.$$

En efecto, por ser x_1, x_2 el plano osculador, tiene con la curva un contacto de tercer orden (3 puntos confundidos) y por tanto el desarrollo de x_3 empieza con el término en s^3. Por otra parte, como los cosenos directores de la tangente son x_1', x_2', x_3', si la tangente en el origen es el eje x_1, estas derivadas primeras para $s = 0$ deben valer 1, 0, 0 y por tanto el desarrollo de x_2 empieza con el término de segundo grado en s y además es $a_1 = 1$.

Siendo s el arco, para todo valor de s debe ser

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 1,$$

o sea, sustituyendo los valores deducidos de [12], poniendo ya $a_1 = 1$,

$$1 + 4\,a_2\,s + (4\,a_2 + 6\,a_3 + 4\,b_2^2)\,s^2 + s^3\,(\ldots) = 1$$

y por tanto

$$a_2 = 0 \quad , \quad 6\, a_3 + 4\, b_2^2 = 0\,. \qquad [13]$$

Necesitaremos también conocer el valor de b_2. Para encontrarlo recordemos que la curvatura de la curva está dada por ([5])

$$\kappa^2 = x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2$$

y sustituyendo las derivadas segundas por sus valores deducidos de [12] y haciendo $s = 0$, resulta $\kappa^2 = 4\, b_2^2$ o sea

$$b_2 = \frac{1}{2}\, \kappa$$

siendo κ la curvatura de la curva en el punto P. De aquí, la segunda igualdad [13] nos da $a_3 = -\dfrac{1}{6}\, \kappa^2$.

En definitiva, el desarrollo [12] se escribe

$$\begin{aligned} x_1 &= s + a_3\, s^3 + O\,(s^3) \\ x_2 &= b_2\, s^2 + b_3\, s^3 + O\,(s^3) \\ x_3 &= c_3\, s^3 + O\,(s^3), \end{aligned} \qquad [14]$$

siendo

$$b_2 = \frac{1}{2}\, \kappa \quad , \quad a_3 = -\frac{1}{6}\, \kappa^2. \qquad [15]$$

Primer procedimento

Consideremos un punto P de una esfera de radio R. Sin salir de la superficie de la esfera, una manera de medir la curvatura de la misma sería la siguiente: tomar a partir de P y sobre todos los círculos máximos que pasan por él, un arco de longitud constante s; los extremos de estos arcos forman un círculo menor de área $A = 2\,\pi \left(1 - \cos \dfrac{s}{R}\right) R^2$. Para s muy pequeño esta área se puede escribir, desarrollando en serie el coseno,

$$A = 2\,\pi \left(\frac{s^2}{2\,R^2} - \frac{s^4}{4\,!\,R^4} + \ldots \right) R^2 = \pi\, s^2 - \frac{\pi\, s^4}{12\, R^2} + \ldots .$$

([5]) Ver Pincherle, loc. cit., pág.

Por consiguiente, la diferencia entre el área πs^2 del círculo que se obtendría si se hiciera la operación sobre el plano, y el área A obtenida, depende de R, y por tanto puede servir para calcular el valor de este radio.

Si en lugar de un punto de una superficie esférica consideramos un punto regular de otra superficie cualquiera, parece natural que la misma idea debe servir para « medir » en cierto modo el grado de curvatura de la superficie. El camino a seguir puede ser el de tomar a partir de P y en todas direcciones arcos de longitud constante s y ver en cuánto difiere el área de la superficie así limitada del área del círculo πs^2. Hay que establecer primero qué líneas se toman a partir de P. Vamos a tomar un haz de líneas cualesquiera de vértice P, con la única condición de que *todas ellas tengan, en P, el plano osculador normal a la superficie.* Pueden ser, por ejemplo, las curvas del haz de todas las secciones normales, o bien el haz de las líneas geodésicas que salen de P.

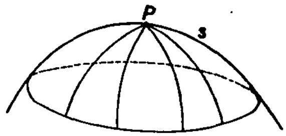

Fig. 1

Tomemos un sistema de ejes ortogonales x, y, z cuyo plano x, y sea el tangente a la superficie en P y por tanto el eje z la normal. Consideremos la curva del haz considerado cuya tangente forma un ángulo φ con el eje x. En un entorno de P, respecto el sistema de ejes formado por la tangente ξ, la normal principal z y la binormal η, las ecuaciones de esta curva según [14], son

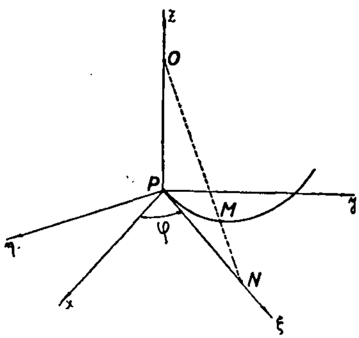

Fig. 2

$$\begin{aligned} \xi &= s + a_3 s^3 + O(s^3) \\ z &= b_2 s^2 + b_3 s^3 + O(s^3) \qquad [16] \\ \eta &= c_3 s^3 + O(s^3) \end{aligned}$$

y por tanto respecto el sistema dado x, y, z las ecuaciones de la curva serán

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos\varphi - \eta \operatorname{sen}\varphi = \cos\varphi \,.\, s + (a_3 \cos\varphi - c_3 \operatorname{sen}\varphi)\, s^3 + O(s^3) \\ y &= \xi \operatorname{sen}\varphi + \eta \cos\varphi = \operatorname{sen}\varphi \,.\, s + (a_3 \operatorname{sen}\varphi + c_3 \cos\varphi)\, s^3 + O(s^3) \\ z &= b_2 s^2 + b_3 s^3 + O(s^3). \qquad [17] \end{aligned}$$

Considerando s y φ como parámetros, estas ecuaciones [17] serán las ecuaciones paramétricas de la superficie dada en el entorno de P: los parámetros u, v de antes son ahora s, φ. Obsérvese que los coeficientes a_i, b_i, c_i son funciones de φ, pues dependen de la curva del haz, pero en cambio no son funciones de s, puesto que para cada curva representan valores tomados en el punto P ($s = 0$).

Para aplicar la fórmula [11] del área necesitamos calcular los coeficientes E, F, G. Suponemos la superficie suficientemente regular alrededor de P como para que las expresiones $O\,(s^3)$ que figuran en [16] sean derivables respecto s, con derivadas de la forma $O\,(s^2)$; indicando con subíndices derivadas parciales, podremos entonces escribir

$$\begin{aligned} x_s &= \cos\varphi + 3\,(a_3 \cos\varphi - c_3 \operatorname{sen}\varphi)\, s^2 + O\,(s^2) \\ y_s &= \operatorname{sen}\varphi + 3\,(a_3 \operatorname{sen}\varphi + c_3 \cos\varphi)\, s^2 + O\,(s^2) \\ z_s &= 2\, b_2\, s + 3\, b_3\, s^2 + O\,(s^2), \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} x_\varphi &= -\operatorname{sen}\varphi \,.\, s + (a_3' \cos\varphi - a_3 \operatorname{sen}\varphi - c_3' \operatorname{sen}\varphi - c_3 \cos\varphi)\, s^3 + \\ &\qquad + O\,(s^3) \\ y_\varphi &= \cos\varphi \,.\, s + (a_3' \operatorname{sen}\varphi + a_3 \cos\varphi + c_3' \cos\varphi - c_3 \operatorname{sen}\varphi)\, s^3 + O(s^3) \\ z_\varphi &= b_2'\, s^2 + b_3'\, s^3 + O\,(s^3). \end{aligned}$$

De aquí, según [7] y recordando [13]

$$\begin{aligned} E &= x_s^2 + y_s^2 + z_s^2 = 1 + (\ldots)\, s^3 + O\,(s^3) \\ F &= x_s\, x_\varphi + y_s\, y_\varphi + z_s\, z_\varphi = (\ldots)\, s^3 + O\,(s^3) \\ G &= x_\varphi^2 + y_\varphi^2 + z_\varphi^2 = s^2 + (2\, a_3 + c_3' + b_2'^2)\, s^4 + O\,(s^4), \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \sqrt{EG - F^2} &= s\,[1 + (2\, a_3 + c_3' + b_2'^2)\, s^2 + O\,(s^2)]^{\frac{1}{2}} \\ &= s + \frac{1}{2}\,(2\, a_3 + c_3' + b_2'^2)\, s^3 + O\,(s^3). \end{aligned}$$

Si se considera el casquete de superficie obtenido tomando sobre cada una de las líneas del haz considerado un arco de longitud constante s, su área valdrá, suponiendo s suficientemente pequeño y limitándonos a los primeros términos del desarrollo,

$$A = \iint \sqrt{EG - F^2}\, ds\, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^s \sqrt{EG - F^2}\, ds =$$

$$= \pi s^2 + \frac{s^4}{8} \int_0^{2\pi} (2\, a_3 + b_2'^2)\, d\varphi + O\,(s^4)\,, \qquad [18]$$

puesto que $\int_0^{2\pi} c_3'\, d\varphi = 0$ por indicar el acento la derivada respecto φ y tomar c_3 el mismo valor para $\varphi = 0$ que para $\varphi = 2\,\pi$.

La integral que aparece como coeficiente de s^4, teniendo en cuenta los valores [15] de a_3 y b_2 se puede calcular. En efecto, de la fórmula de Euler [4] se deduce

$$\kappa = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{R_2} \quad , \quad \kappa' = 2\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi$$

y por tanto

$$a_3 = -\frac{1}{6}\left(\frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{R_2}\right)^2 \quad , \quad b_2'^2 = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)^2 \operatorname{sen}^2\varphi \cos^2\varphi .$$

Con estos valores y teniendo en cuenta que

$$\int_0^{2\pi} \cos^4\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^4\varphi\, d\varphi = \frac{3}{4}\pi \ , \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\varphi \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4}\pi \qquad [19]$$

se calcula fácilmente que

$$\int_0^{2\pi} (2\, a_3 + b_2'^2)\, d\varphi = -\frac{2\,\pi}{3} \frac{1}{R_1 R_2} .$$

Por tanto [18] nos da

$$A = \pi s^2 - \frac{\pi}{12} \frac{1}{R_1 R_2} s^4 + 0\,(s^4)\,. \qquad [20]$$

Salvo un factor constante, el coeficiente del término principal del desarrollo de la diferencia $\pi s^2 - A$ vemos que es $\frac{1}{R_1 R_2}$. Este producto puede, por tanto, tomarse como « medida » de la curvatura de la superficie en el punto P. Es la *curvatura de* GAUSS.

Para eliminar los términos sucesivos en el desarrollo [20] se puede observar que de él se deduce

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \lim_{s \to \infty} \frac{12}{\pi} \frac{\pi s^2 - A}{s^4}. \qquad [21]$$

Obsérvese que esta fórmula límite es válida, según la demostración, para cualquier haz de líneas que salgan de P con tal de que cubran todo el casquete de superficie y que tengan, en P, el plano osculador normal a la superficie.

En particular BERTRAND y DIGUET (6) en 1848 observaron que la fórmula [21] podía servir para demostrar que la curvatura de GAUSS era invariante por flexiones de la superficie, es decir, por deformaciones inextensibles (7). En efecto, si como haz de líneas que salen de P se toma el haz de líneas geodésicas, las cuales, como se sabe, tienen el plano osculador normal a la superficie como habíamos exigido, por la propiedad de estas líneas de ser el camino más corto que une dos puntos de la superficie, al deformar la superficie los extremos de los arcos s se conservarán, el área A no variará y por tanto el límite [21] tampoco.

De las fórmulas [20] o [21] se deduce, además, que la curvatura de GAUSS será positiva o negativa según que el área A considerada sea menor o mayor que la del círculo correspondiente.

APLICACIÓN

El desarrollo [20] del elemento de área de una superficie alrededor de un punto se presta a obtener la generalización a las superficies de un resultado que obtuvimos en otro lugar para las curvas planas (8).

Supongamos que P sea un punto elíptico de la superficie, es decir, un punto tal que en un entorno suyo la superficie quede de

(6) *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (Liouville). Tomo XIII, 1848, pág. 80-83.

(7) Se llaman deformaciones inextensibles aquellas que conservan las longitudes de las líneas de la superficie.

(8) L. A. SANTALÓ. — *Algunas propiedades infinitesimales de las curvas planas. Mathematicae Notae*, año primero, pág. 129.

un mismo lado del plano tangente. Queremos determinar sobre la normal a la superficie en P un punto O tal que al proyectar desde él un entorno de P de la superficie sobre el plano tangente, el área obtenida en la proyección difiera lo menos posible del área correspondiente de la superficie.

Para ello consideremos las curvas de la superficie obtenidas como secciones de los planos normales por el punto P. En un entorno de P las ecuaciones de la curva obtenida por sección del plano normal que forma un ángulo φ con el eje x (fig. 2) serán las dos primeras ecuaciones [16], siendo ahora la tercera $\eta = 0$.

Tomando sobre la curva un arco $PM = s$ y sobre la normal un punto O tal que $OP = \beta$ sea la distancia incógnita buscada, al proyectar desde O el punto M sobre el plano tangente se obtiene una distancia $PN = \rho$ cuyo valor se calcula fácilmente por semejanza de triángulos y es

$$\rho = \frac{\xi\,\beta}{\beta - z} = \xi\left(1 + \frac{z}{\beta} + \frac{z^2}{\beta^2} + \ldots\right)$$

suponiendo $z < \beta$, como podemos hacer siempre tomando s suficientemente pequeño.

Sustituyendo ξ y z por los valores [16] queda

$$\rho = s + \left(a_3 + \frac{b_2}{\beta}\right) s^3 + O\,(s^3).$$

Haciendo lo mismo con todas las secciones normales que pasan por P, se obtendrá sobre el plano tangente, alrededor de P, un área de valor

$$A^* = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[s^2 + 2\left(a_3 + \frac{b_2}{\beta}\right) s^4 + O\,(s^4)\right] d\varphi.$$

Sustituyendo a_3 y b_2 por sus valores [15] e integrando teniendo en cuenta [4] y [18], resulta

$$A^* = \pi\, s^2 - \pi\left[\frac{1}{2\,\beta}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{12}\,\frac{1}{R_1\, R_2}\right] s^4 + O\,(s^4). \qquad [22]$$

Comparando este desarrollo con [20] vemos que la diferencia es en general infinitésima de 4° orden respecto s. Para que sea de orden superior los coeficientes de s^4 deben ser los mismos en [20] y en [22].

Por tanto:

$$\beta = \frac{4\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}{\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}}. \qquad [23]$$

Este valor nos da, pues, la distancia de P al punto O desde el cual, proyectando la superficie sobre el plano tangente, se obtiene una mejor aproximación en cuanto al área.

Segundo procedimiento

1. — Sea P un punto elíptico de la superficie. Un plano paralelo al tangente en P a distancia h del mismo determinará un casquete de superficie cuyo volumen representaremos por V. Evidentemente este volumen dependerá en primer lugar de h y además, para un mismo h, será menor o mayor según que la superficie está más o menos «curvada» en el punto P. La relación entre V y h puede servir, por tanto, para medir la curvatura de la superficie en P.

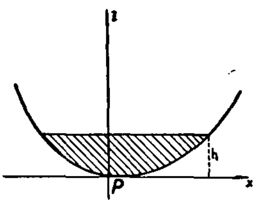

Fig. 3

Consideremos una sección plana normal, por ejemplo la representada en la fig. 3. La ecuación de la línea sección en un entorno de P es de la forma

$$z = \frac{1}{2R} x^2 + O(x^2), \qquad [24]$$

siendo R su radio de curvatura en el punto P. De [24] se deduce, por inversión,

$$x = \sqrt{2Rz} + O(\sqrt{z}). \qquad [25]$$

Haciendo girar la sección normal obtendremos siempre curvas secciones para las cuales valen ecuaciones análogas a [24] y [25] con sólo tener en cuenta que R varía de una a otra, es decir, es la función de φ dada por la fórmula de EULER [4].

Proyectando la curva sección de la superficie por el plano paralelo al plano tangente a distancia h, sobre el mismo plano tangente, se obtiene un clindro cuya área de la base vale (teniendo en cuenta [25]):

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x^2\, d\varphi = \frac{h}{2}\int_0^{2\pi} 2\, R\, d\varphi + O\,(h)$$

y como de [4] se deduce (9)

$$\int_0^{2\pi} R\, d\varphi = 2\,\pi\sqrt{R_1\, R_2} \qquad [26]$$

queda

$$A = 2\,\pi\sqrt{R_1\, R_2}\; h + O\,(h)\,. \qquad [27]$$

El volumen del cilindro considerado vale, pues

$$V_1 = A\,.\,h = 2\,\pi\sqrt{R_1\, R_2}\; h^2 + O\,(h^2)\,,$$

y el volumen interior a este cilindro y comprendido entre la superficie y el plano tangente, según [24] y [25], valdrá

$$V_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2Rh}+O(\sqrt{h})} zx\, dx\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{8\,R}\,x^4 + O\,(x^4)\right]_0^{\sqrt{2Rh}+O(\sqrt{h})} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\,h^2\int_0^{2\pi} R\, d\varphi + O\,(h^2) = \pi\sqrt{R_1\, R_2}\; h^2 + O\,(h^2)\,.$$

---

(9) El cálculo de $\int_0^{2\pi} R\, d\varphi$ se puede hacer directamente a partir de la fórmula de EULER, recordando la integral indefinida

$$\int \frac{d\varphi}{R_1 \operatorname{sen}^2\varphi + R_2\cos^2\varphi} = \frac{1}{\sqrt{R_1\, R_2}}\operatorname{arc\,tg}\left[\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\operatorname{tg}\varphi\right] + C\,.$$

Sin embargo es más fácil aplicar una observación debida a E. BELTRAMI, *Opere Matematiche*, T. 1, p. 430. Se observa, en efecto, que $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R\, d\varphi$ no es otra cosa que el área de la *indicatriz de Dupin*, o sea de la curva obtenida llevando a partir de un origen y en la dirección φ correspondiente, varios vectores iguales a $\sqrt{R}$. Se sabe, según la fórmula de EULER [4], que esta indicatriz es una elipse de semiejes $\sqrt{R_1}$, $\sqrt{R_2}$. Por tanto el área de esta elipse es $\pi\sqrt{R_1\, R_2}$, y de aquí se deduce

Por consiguiente el volumen del casquete que limitan la superficie y el plano considerado a distancia h del plano tangente vale

$$V = V_1 - V_2 = \pi \sqrt{R_1 R_2}\, h^2 + O(h^2). \qquad [28]$$

Como coeficiente del término principal de este desarrollo de V aparece $\pi \sqrt{R_1 R_2}$, es decir, una función de la curvatura de Gauss $\frac{1}{R_1 R_2}$. Este procedimiento conduce, por tanto, a la misma curvatura que el caso anterior.

De [26] se deduce la fórmula conocida ([10])

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\pi h^2}{V} \right)^2$$

2. — También conduce a la curvatura de Gauss la idea de medir la curvatura de la superficie teniendo en cuenta el área de la sección plana que se obtiene al cortar la misma por un plano paralelo al tangente a distancia h. Se comprende de antemano que esta área debe disminuir al crecer la curvatura y, en efecto, de la expresión [27] se deduce

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{2 \pi h}{A} \right)^2.$$

TERCER PROCEDIMIENTO

1. — Consideremos el plano tangente a la superficie en P. Sobre este plano y con centro en P tracemos una circunferencia de radio x. Por los puntos de esta circunferencia consideremos las normales al plano tangente hasta que cortan a la superficie. Ellas formarán una porción de superficie cilíndrica. Parece natural que el área de esta superficie cilíndrica pueda servir para dar una idea de la mayor o menor rapidez co-

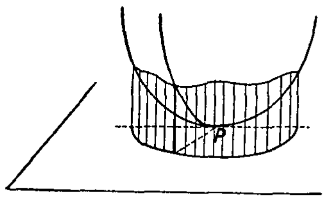

FIG. 4.

([10]) W. Blaschke. — *Jahresbericht der Deutsch. Math. Ver.*, Bd. 27, 1919, pág. 149. También *Differentialgeometrie I*, p. 120.

mo la superficie se aparta del plano tangente y, por tanto, para medir la curvatura de la misma en P.

Para calcular el área de la superficie cilíndrica considerada, basta recordar la ecuación [24] de las curvas obtenidas cortando la superficie por planos normales que pasan por P. El área de la superficie cilíndrica mencionada será

$$A = \int_0^{2\pi} z\, x\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\,R}\, x^3\, d\varphi + O\,(x^3) \qquad [29]$$

y sustiuyendo $\dfrac{1}{R}$ por su valor [4] e integrando:

$$A = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) x^3 + O\,(x^3). \qquad [30]$$

Se obtiene de esta manera, como coeficiente del término principal en el desarrollo de A para valores pequeños de x, salvo un factor constante, la expresión

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad [31]$$

que es la llamada curvatura de Sophia Germain ([11]) o *curvatura media*.

La [30] se puede también escribir

$$H = \lim_{x \to 0} \frac{2\,A}{\pi\, x^3}.$$

2. — Si en lugar del área A se considera el volumen V limitado por la superficie cilíndrica considerada y comprendido entre la superficie y el plano tangente, se obtiene

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{x} z x\, dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{8\,R}\, x^4 + O\,(x^4)\right) d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) x^4 + O\,(x^4), \qquad [32]$$

([11]) *Mémoire sur la courbure des surfaces. Journal für Math.* Band 7, 1831. Sobre esta definición de curvatura y los sucesivos de Bacaloglo y Casorati, ver el interesante trabajo ya citado al principio de A. Terracini.

o bien

$$H = \lim_{x \to 0} \frac{4\,V}{\pi\, x^4}\,.$$

3.—En los cálculos anteriores, lo mismo para el área A que para el volumen V, hay que tener en cuenta que para cada elemento superficial o de volumen la altura z viene afectada del signo correspondiente, distinto según que la sección normal de la superficie quede a uno u otro lado del plano tangente. Se comprende, por tanto, que puede haber puntos alrededor de los cuales el área A o el volumen V sean cero o negativos, sin que la superficie coincida con su plano tangente. En estos puntos será $H = O$ y la interpretación geométrica es que el área A y el volumen V quedan divididos en partes iguales por el plano tangente.

Si no se quiere tener en cuenta el signo de la distancia z de los puntos de la superficie al plano tangente, se puede pensar de sustituir en [29] y [32] en lugar de z su cuadrado z^2. Los resultados ya no serán ni áreas ni volúmenes, pero también darán una idea del comportamiento de la superficie alrededor de P. Se tiene, según [29],

$$A^* = \int_0^{2\pi} z^2\, x\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4\,R^2}\, x^4 + O(x^4) \right) x d\varphi = \frac{x^5}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2}\, d\varphi + O\,(x^5)$$

y bien, según [4] y [19],

$$A^* = \frac{\pi}{4} \left[\frac{3}{4} \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) + \frac{1}{2\,R_1\,R_2} \right] x^5 + O\,(x^5). \qquad [33]$$

También

$$V^* = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^x z^2\, x\, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{24\,R^2}\, x^6\, d\varphi + O\,(x^6),$$

o sea

$$V^* = \frac{\pi}{24} \left[\frac{3}{4} \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) + \frac{1}{2\,R_1\,R_2} \right] x^6 + O\,(x^6). \qquad [34]$$

La expresión que figura entre paréntesis en [33] y [34] se puede escribir, añadiendo el factor $\frac{1}{2}$, en la forma

$$B = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right) + \frac{1}{2\,R_1\,R_2}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2, \qquad [35]$$

y se llama curvatura de BACALOGLO ([12]).

De [33] y [34] se deduce, por tanto,

$$B = \lim_{x \to 0} \frac{2\,A^*}{\pi\, x^5} = \lim_{x \to 0} \frac{12\,V^*}{\pi\, x^6}.$$

CUARTO PROCEDIMIENTO

1. — Consideremos, lo mismo que para el primer procedimiento las secciones normales por el punto P y sobre cada una de ellas llevemos un arco de longitud constante ρ. Tendremos así sobre la superficie una curva cerrada alrededor de P.

Por cada punto M interior a esta curva cerrada consideremos la normal ξ_M a la superficie. Lo que se ha «curvado» la supeficie al pasar de P a M puede medirse por el ángulo θ que forman la normal ξ en P y la normal ξ_M en M. Para prescindir del signo, en lugar de este ángulo podemos tomar su cuadrado. Vamos, pues, a calcular θ^2.

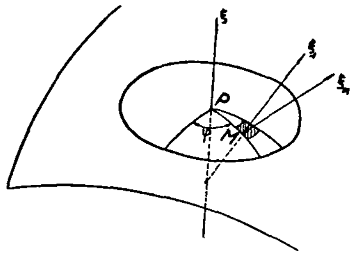

FIG. 5.

Suponiendo que sobre la superficie se eligen como líneas coordenadas u = cte., v = cte. las líneas de curvatura, según [5], es

$$d\xi = \xi_u\, du + \xi_v\, dv = -\frac{x_u}{R_1}\, du - \frac{x_v}{R_2}\, dv. \qquad [36]$$

([12]) *Ueber die Krümmung der Flächen. Zeitschrift für Math. und Phys.*, Bd. 4' 1859.

Llamando s al arco $P M$, para ρ suficientemente pequeño y puesto que $s \leq \rho$, será

$$\xi_M = \xi + \frac{d\xi}{ds} s + O(s). \qquad [37]$$

Se observa que el vector $\xi_M - \xi$ es igual, en módulo, a la base del triángulo isósceles formado por ξ_M y ξ y como estos vectores normales tienen ambos el módulo 1, tomando la cuerda por el arco (lo cual se puede hacer salvo infinitésimos de 3er orden respecto s) será $\theta = |\xi_M - \xi|$ y por tanto, según [36] y [37],

$$\theta^2 = |\xi_M - \xi|^2 = \left| \frac{x_u}{R_1} \frac{du}{ds} + \frac{x_v}{R_2} \frac{dv}{ds} \right|^2 s^2 + O(s^2). \qquad [38]$$

Teniendo en cuenta [8], al elevar al cuadrado el coeficiente de s^2 y recordando que por ser las líneas de curvatura perpendiculares entre sí es $x_u . x_v = F = 0$, resulta

$$\theta^2 = \left[\frac{E\, du^2}{R_1^2\, ds^2} + \frac{G\, dv^2}{R_2^2\, ds^2}\right] s^2 + O(s^2).$$

Aplicando las fórmulas [9] y [10] y siendo ahora $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$, la expresión última se escribe

$$\theta^2 = \left(\frac{\cos^2\varphi}{R_1^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{R_2^2}\right) s^2 + O(s^2). \qquad [39]$$

Vamos ahora a buscar el *valor medio* de θ^2 para todos los puntos interiores al contorno considerado alrededor de P. Como el elemento de área correspondiente a un punto M, según [18], vale

$$d\sigma = s\, ds\, d\varphi + O(s^2)\, ds\, d\varphi, \qquad [40]$$

el valor medio buscado se obtendrá dividiendo la expresión

$$\iint \theta^2\, d\sigma = \int_0^\rho s^3\, ds \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^2\varphi}{R_1^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{R_2^2}\right) d\varphi + O(\rho^4) =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right) \rho^4 + O(\rho^4),$$

por el área total, que según [20] vale $\pi \rho^2 + O(\rho^3)$. Es, pues,

$$\overline{\theta^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right)\rho^2 + O(\rho^2)\,. \qquad [41]$$

Aparece de esta manera el significado geométrico que tiene el tomar como medida de la curvatura de una superficie en un punto P la expresión

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right), \qquad [42]$$

que es la llamada *curvatura de* CASORATI [13]. En lugar de [41] se puede escribir

$$C = \lim_{\rho \to 0} \frac{2\,\overline{\theta^2}}{\rho^2}\,. \qquad [43]$$

2. — Partiendo de la misma fig. 5 se puede repetir un razonamiento análogo pero tomando en el punto M, en lugar de la normal ξ_M a la superficie, la normal ξ_1 a la curva sección plana normal que pasa por P y M. Entonces el ángulo θ_1 que forman ξ y ξ_1 se expresa inmediatamente en la forma $\theta_1 = \dfrac{s}{R} + O(s)$ por ser igual al ángulo que forman dos normales próximas de una curva plana: R es el radio de curvatura de esta curva plana, sección normal de la superficie. Por tanto, como antes, el valor medio de θ_1^2 se obtendrá dividiendo por $\pi\rho^2 + O(\rho^3)$ la expresión

$$\iint \theta_1^2\, d\sigma = \int_0^\rho s^3\, ds \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{R^2} + (\rho^4)\,.$$

Teniendo en cuenta [35] resulta

$$\overline{\theta_1^2} = \frac{1}{4} B\, \rho^2 + O(\rho^2),$$

lo cual nos da una nueva interpretación de la *curvatura de* BACALOGLO.

([13]) *Mesure de la courbure des surfaces suivant l'idée commune. Acta Mathematica*, vol. XIV, 1890-91.

3. — Hemos calculado los valores medios de los cuadrados de los ángulos θ y θ_1. También se puede calcular el valor medio del cuadrado del ángulo θ_2 que forman las dos normales ξ_M y ξ_1 en el punto M (fig. 6). Este valor medio nos medirá, en cierto modo, la *torsión* de la superficie alrededor de P.

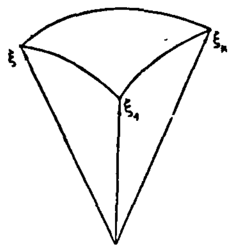

Fig. 6.

Consideremos las 3 normales ξ, ξ_M, ξ_1 llevadas a partir de un mismo origen O. Por ser ξ_M y ξ_1 normales a la curva plana PM, el triángulo esférico formado por los 3 extremos de ξ, ξ_M, ξ_1 será rectángulo en el extremo de ξ_1. Como los lados de este triángulo infinitesimal valen θ, θ_1, θ_2 será

$$\theta_2^2 = \theta^2 - \theta_1^2 + O(s^2),$$

y por tanto

$$\overline{\theta_2^2} = \overline{\theta^2} - \overline{\theta_1^2} = \frac{1}{4}(C - B)\,\rho^2 + O(\rho^2)\,,$$

o sea, según los valores [35] y [42] de B y C,

$$\overline{\theta_2^2} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2 + O(\rho^2)\,.$$

Luis A. Santaló

APOSTILLA

La fórmula [20] de la Nota anterior nos ofrece la oportunidad para desarrollar algunas ideas de carácter más bien filosófico, pero que creemos de interés.

Supongamos que sobre una superficie física cierto agrimensor estuviera en condición de medir distancias (a lo largo de curvas trazadas sobre la superficie) y de medir áreas. Midiendo distancias estaría en condición de juzgar trayectos mayores y menores entre los mismos puntos y por lo tanto de determinar geodésicas; podría entonces describir dos círculos geodésicos concéntricos y medir sus áreas. Suponiendo que nuestro agrimensor hubiera elegido los