Tirada aparte de MATEMATICÆ NOTÆ — Año IX — Fasc. 1 - 2

GEOMETRIA INTEGRAL EN LOS ESPACIOS TRIDIMENSIONALES DE CURVATURA CONSTANTE

por

L. A. SANTALÓ

1. *Introducción*. — En su forma más general, el problema central de la llamada Geometría Integral es el siguiente: sea S_n un espacio de n dimensiones en el cual actúa un grupo de transformaciones G, continuo y transitivo. Supongamos, además, que G posea una medida, o volumen, invariante a izquierdas por las operaciones del grupo; es decir, si representamos por $\mathrm{d}g$ el elemento de volumen invariante y s es una transformación cualquiera del grupo, la última condición se puede escribir, simbólicamente, $\mathrm{d}(sg) = \mathrm{d}g$.

Sea C^p una variedad de dimensión p contenida en S_n y C^q otra variedad, también contenida en S_n, de dimensión q. Indiquemos por gC^q a la variedad transformada de la C^q por la transformación g de G y por $C^p \, . \, gC^q$ la intersección de C^p con gC^q, la cual dependerá de g. Sea $F(C^p \, . \, gC^q)$ una función de esta intersección. Se trata de estudiar integrales del tipo

$$I = \int_G F(C^p \, . \, gC^q) \, \mathrm{d}g, \tag{1.1}$$

donde la integración está extendida a todo el volumen del grupo G.

El caso más estudiado es aquél en que S_n es el espacio euclidiano y G el grupo de los movimientos en el mismo; $\mathrm{d}g$ es entonces la llamada densidad cinemática. En este caso, la integral I se puede calcular para varias funciones F y de los resultados obtenidos se han podido deducir, a veces, proposiciones geométricas referentes a las variedades C^p y C^q. Por ejemplo, si C^p

y C^q son variedades de volumen p-dimensional $V(C^p)$ y q-dimensional $V(C^q)$ respectivamente, y por F se toma el volumen $(p+q-n)$-dimensional de la intersección, resulta

$$(1.2) \qquad \int_G V(C^p \,.\, gC^q)\, dg = \alpha\, V(C^p)\, V(C^q),$$

siendo α una constante independiente de C^p y C^q (dependiente sólo de p, q, n).

Bajo ciertas condiciones de regularidad para C^p y C^q, si por F se toma la característica de Euler $N(C^p \,.\, gC^q)$ de la intersección $C^p \,.\, gC^q$ y siempre en el caso de los movimientos en el espacio euclidiano, la integral (1.1) también se puede calcular, dando la llamada fórmula fundamental de Blaschke para $n=3$ y que fué generalizada a n dimensiones por Chern y Yien [1].

En este trabajo vamos a considerar el caso de ser S_n un espacio de tres dimensiones de curvatura constante K y G el grupo de los movimientos en el mismo. Más exactamente podríamos decir que consideramos el caso de los espacios elíptico ($K>0$) e hiperbólico ($K<0$), cuya representación proyectiva es bien conocida; el grupo G es entonces el de las proyectividades que dejan invariante una cuádrica imaginaria ($K>0$) o real no reglada ($K<0$). El caso $K>0$ ha sido ya estudiado por Ta-Jen-Wu [2], pero el camino que vamos a seguir aquí, más geométrico, permite tratar simultáneamente ese caso y el de $K \leq 0$. Como problema principal consideramos el caso de ser C^p y C^q dos variedades de 3 dimensiones de volumen finito ($p=q=3$), es decir, dos cuerpos limitados del espacio y la función F la característica de Euler de la intersección de los dos cuerpos. Supondremos, además, que ambos cuerpos están limitados por superficies de área finita y con curvatura finita y continua en cada punto, condición que, una vez obtenido el resultado, puede reducirse mucho.

---

(1) S. Chern y C. T. Yien, *Sulla formula principale cinematica dello spazio ad n dimensioni*, Bollettino della Unione Matematica Italiana (2), vol. 2, 1940, pp. 432-437. Para $n = 3$ ver W. Blascke, *Vorlesungen über Integralgeometrie*, Leipzig und Berlin, 1937. En realidad en estos trabajos se considera sólo el caso $p = q = n$ pero por consideraciones de paso al límite se puede pasar fácilmente al caso general.

(2) Ta-Jen Wu, *Ueber elliptische Geometrie*, Mathematische Zeitschrift, Vol. 43, 1938, pp. 495-521.

Veremos después algunas aplicaciones, entre ellas la generalización a los espacios de curvatura constante de un resultado obtenido por O. Varga para el espacio euclidiano.

Finalmente consideraremos el caso en que C^q es un plano del espacio (o sea una superficie totalmente geodésica); entonces, como para cada plano e existe un subgrupo E de G que lo deja invariante, habrá que considerar el espacio homogéneo G/E y como medida invariante en el mismo tendremos la llamada densidad para conjuntos de planos. Con esta densidad se pueden generalizar muchas fórmulas integrales conocidas para el caso euclidiano; la mayoría de ellas, sin embargo, resultan idénticas para los espacios de curvatura constante, por lo cual nos limitamos a señalar la (10.3), que depende de K y que contiene la desigualdad (10.5), válida para los cuerpos convexos del espacio hiperbólico.

En todo lo que sigue, al hablar de espacio, entenderemos que se trata del espacio de 3 dimensiones. Además, con objeto de abreviar la escritura, para indicar la curvatura del espacio utilizaremos, según convenga, K o k, ligados por la relación

$$k^2 = K. \tag{1.3}$$

2. *La densidad cinemática en espacios de curvatura constante. Densidades para planos, rectas y puntos.* — Supongamos el espacio tridimensional de curvatura constante K y el grupo G (dependiente de 6 parámetros) de los movimientos del mismo. Para hallar el elemento de volumen invariante de G, es cómodo utilizar el método del «triedro móvil», de E. Cartan ([3]).

Sea P un punto del espacio y consideremos el triedro trirrectángulo formado por tres vectores $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, de módulo unidad y origen P. Se cumplen, por tanto, las condiciones

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \tag{2.1}$$

donde los productos escalares del primer miembro se entienden tomados según la métrica del espacio.

([3]) E. Cartan, *Leçons sur la Géométrie des spaces de Riemann*, 2ª edición, Paris 1946, Capítulos IX y XII. Para este nº 2 puede ser útil consultar la fundamental memoria de S. S. Chern, *Integral Geometry in Klein spaces*, Annals of Mathematics, Vol. 43, 1942.

El vector PP' determinado por P y el punto infinitamente próximo P', tendrá respecto dicho triedro ciertas componentes que representaremos por ω^i; es decir, poniendo $d_1P = PP'$, será

$$(2.2) \qquad d_1P = \omega^i \bar{e}_i$$

donde en el segundo miembro se entiende implícita una sumatoria desde $i=1$ a $i=3$, cuyo símbolo suprimimos, como es costumbre en cálculo tensorial; la misma convención vale en todo lo sucesivo en este n°. 2.

Por otra parte, las diferenciales absolutas $D\bar{e}_i$ de cada uno de los vectores $\bar{e}_i$ se podrán también expresar en la forma

$$(2.3) \qquad D\bar{e}_i = \omega_i{}^k \bar{e}_k,$$

siendo $\omega_i{}^k$ nuevas formas diferenciales lineales; es decir, tanto las ω^i como las $\omega_i{}^k$ son formas lineales en las diferenciales dx^i de las coordenadas x^i del espacio, más de las otras tres coordenadas que fijan el triedro formado por los vectores $\bar{e}_i$. Su valor se deduce fácilmente de (2.2) y (2.3), multiplicando ambos miembros escalarmente por el vector $\bar{e}_i$ conveniente. Se obtiene así

$$(2.4) \qquad \omega^i = \bar{e}_i \,.\, d_1P, \qquad \omega_i{}^k = -\omega_k{}^i = \bar{e}_k \,.\, D\bar{e}_i.$$

Las diferenciales exteriores de las formas ω^i, $\omega_i{}^k$ satisfacen a las siguientes *ecuaciones de estructura* del espacio [1]

$$(2.5) \qquad d\omega^i = [\omega^k \omega_k{}^i]$$

$$(2.6) \qquad d\omega_i{}^j = [\omega_i{}^k \omega_k{}^j] + \frac{1}{2} R_i{}^j{}_{kh} [\omega^k \omega^h],$$

donde los paréntesis cuadrados [ ] indican multiplicación exterior y $R_i{}^j{}_{kh}$ es el tensor de curvatura del espacio.

Consideremos ahora el grupo G de los movimientos del espacio. Supuesto fijado un triedro trirrectángulo de vértice P_0, formado por los vectores $\bar{e}_{i0}$ (lo indicaremos $(P_0, \bar{e}_{i0})$), cada movimiento g de G puede determinarse por el triedro $(P, \bar{e}_i)$ trans-

(1) E. CARTAN, loc. cit., pág. 322.

formado del $(P_0, \bar{e}_{i0})$, por g y recíprocamente, cada triedro $(P, \bar{e}_i)$ determina un movimiento g: aquél que lleva $(P_0, \bar{e}_{i0})$ a coincidir con $(P, \bar{e}_i)$. La familia de triedros $P, \bar{e}_i$ constituye por tanto una familia de triedros «adaptada al grupo G». Las formas ω^i, ω_i^k son entonces las *componentes relativas* de G y (2.5), (2.6) son las ecuaciones de estructura del mismo. Las componentes relativas ω^i, ω_i^k son invariantes por G y por tanto también lo será la forma diferencial de sexto grado

$$\mathrm{d}g = [\omega^1 \omega^2 \omega^3 \omega_1{}^2 \omega_1{}^3 \omega_2{}^3]. \tag{2.7}$$

Siendo el grupo G transitivo, toda otra forma diferencial invariante de grado seis debe diferir de la anterior $\mathrm{d}g$ en un factor constante. Luego (2.7) es el elemento de volumen invariante del espacio de G: se llama la *densidad cinemática* del espacio de curvatura constante considerado.

A la expresión anterior de $\mathrm{d}g$ se le puede dar una interpretación geométrica simple. En primer lugar se observa que según (2.2) el producto $[\omega^1 \omega^2 \omega^3]$ es igual al producto de los desplazamientos elementales de P, según tres ejes rctangulares, o sea, es igual al elemento de volumen del espacio, que representaremos por $\mathrm{d}P$, o sea

$$\mathrm{d}P = [\omega^1 \omega^2 \omega^3]. \tag{2.8}$$

Por otra parte, cada una de las ω_i^k, según (2.4), representa una rotación elemental alrededor del eje $\bar{e}_h$ $(h \neq i \neq k)$. Por tanto, el producto $[\omega_1{}^3 \omega_2{}^3]$, por ejemplo, representa el elemento de área $\mathrm{d}\Omega$ de la esfera de radio unidad y centro P (esfera euclidiana, situada en el espacio tridimensional tangente al dado en P) correspondiente al punto representativo de la dirección de $\bar{e}_3$. Poniendo finalmente $\mathrm{d}\varphi$ en lugar de la forma $\omega_1{}^2$ para representar una rotación elemental alrededor de $\bar{e}_3$, se tiene para $\mathrm{d}g$ la expresión muy intuitiva

$$\mathrm{d}g = [\mathrm{d}P\, \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{d}\varphi], \tag{2.9}$$

que tien la misma forma que para el caso euclidiano. Aquí, como en todo lo que sigue, *las densidades se consideran en valor absoluto.*

Supongamos, por ejemplo, un punto P fijo del espacio y un cuerpo cualquiera Q de volumen finito V móvil en el mismo. La medida del conjunto de posiciones de Q en las cuales contiene a P (o sea, la medida del conjunto de movimientos que llevan a Q a una posición en la cual contiene a P) es

$$\int_{P \subset Q} dg = 8\,\pi^2 V. \tag{2.10}$$

Basta, en efecto, observar que esta medida debe ser igual a la de las posiciones de P (supuesto móvil) en las que queda interior a Q (supuesto fijo) y por tanto al integrar (2.9), Ω varía sobre el área 4π de la esfera unidad, φ entre 0 y 2π y P en el volumen de Q; sale así el resultado (2.10).

Consideremos ahora el subgrupo E de los movimientos que dejan invariante un plano e del espacio (5). Tomando como plano e el determinado por los vectores e_1, e_2 y considerando desplazamientos del triedro P, e_i en los cuales e_3 se conserve normal a e, las ecuaciones (2.2) y (2.3) dan

$$\omega^3 = 0, \ \omega_1{}^3 = 0, \ \omega_2{}^3 = 0. \tag{2.11}$$

Este sistema de ecuaciones de Pfaff, por la manera como ha sido obtenido, debe ser completamente integrable y sus variedades integrales representarán, en el espacio representativo del grupo G, al subgrupo E y sus transformados por las operaciones de G (6). El producto

$$de = [\omega^3\, \omega_1{}^3\, \omega_2{}^3]. \tag{2.12}$$

(5) Recordemos que aquí y en todo lo que sigue, como es costumbre, llamaremos "planos" a las superficies totalmente geodésicas del espacio.

(6) Para mejor comprensión consideremos como modelo aclaratorio el grupo G de los movimientos en el plano euclideo referido a un origen O y dos ejes rectangulares x, y. Cada movimiento, siendo reducible a una traslación y una rotación, estará determinado por las coordenadas x, y del punto transformado del O y por una rotación φ : (x, y, φ) serán las coordenadas del espacio tridimensional representativo del grupo G de los movimientos del plano (sólo hay que observar que φ sólo puede variar entre 0 y 2π, es decir, deben identificarse los planos $\varphi = 0$ y $\varphi = 2\pi$, con lo cual el espacio de G puede decirse que es un cilindro de tres dimensiones). Consideremos ahora una recta r del

es invariante por G y podrá tomarse como elemento de volumen del espacio homogéneo G/E, siempre y cuando su valor dependa exclusivamente del plano e, no del punto P ni de los vectores tangentes $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ elegidos sobre él. Esta independencia se puede deducir por métodos generales, teniendo en cuenta las ecuaciones de estructura (2. 5) y (2. 6) y que el espacio es de curvatura constante, pero en este caso particular es más simple proceder geométricamente. Para ello observemos que (2. 12) equivale a

$$\text{(2. 13)} \qquad de = [d\Omega \, dt],$$

siendo $d\Omega = [\omega_1{}^3 \, \omega_2{}^3]$ el elemento de área sobre la esfera euclidiana unidad de centro P correspondiente a la dirección $\bar{e}_3$ y $dt = \omega^3$ un desplazamiento elemental en la misma dirección, o sea, normal a e. Desplazando por paralelismo el triedro $(P, \bar{e}_i)$ sobre e, el vector normal $\bar{e}_3$ se conserva normal y por conservarse también el ángulo entre vectores y las longitudes de los mismos, $d\Omega$ y dt se conservarán, o sea (2. 13) no depende del punto P elegido sobre e ni de la particular posición de los vectores tangentes $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$.

La expresión (2. 12) o su equivalente (2. 13) puede por tanto servir para medir conjuntos de planos (o, lo que es lo mismo, conjuntos de puntos en el espacio homogéneo G/E), ob-

---

plano de partida, que por simplicidad podemos suponer que es el eje x. El subgrupo R de G que deja r invariante está representado por la recta $y=0, \varphi=0$. Observemos, además, que cada punto x, y, φ se transforma por la operación (x_0, y_0, φ_0) de G según las fórmulas (grupo de los parámetros),

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\varphi_0 - y \operatorname{sen}\varphi_0 + x_0 \,, \\ y' &= x \operatorname{sen}\varphi_0 + y \cos\varphi_0 + y_0 \,, \\ \varphi' &= \varphi + \varphi_0 \,. \end{aligned}$$

Por tanto la recta $y = 0$, $\varphi = 0$, se transforma por la operación (x_0, y_0, φ_0) en la recta.

$$(*) \qquad x' = x \cos\varphi_0 + x_0 \,, \quad y' = x \operatorname{sen}\varphi_0 + y_0 \,, \varphi = \varphi_0$$

en cuyas ecuaciones el parámetro variable es x. Estas rectas (*) son tales que por cada punto del espacio representativo de G pasa una y una sola: son las variedades integrales del sistema análogo al (2.11) para el caso del plano que ahora consideramos. A cada una de ellas corresponde una recta del plano de partida (la que pasa por el punto x_0, y_0 y tiene la dirección φ_0). Considerando cada recta (*) como un solo punto del espacio de G resulta un espacio de dos dimensiones: es el *espacio homogéneo* G/R y el elemento de volumen invariante de este espacio es la densidad para rectas del plano.

teniéndose una medida invariante respecto de G, la cual, salvo un factor constante, será única debido a ser G transitivo respecto los planos e; cualquiera de estas expresiones (2. 12), (2. 13) se llama la *densidad para conjuntos de planos.*

Conviene dar a esta densidad una forma más adaptada para el cálculo efectivo. Para ello consideremos un punto fijo O del espacio y determinemos cada plano e por su distancia ρ a O, más las coordenadas esféricas ϑ, φ de la dirección de la normal a e desde O. El elemento de arco del espacio, en estas coordenadas geodésicas ρ, ϑ, φ (suponiendo $x^1 = \rho$, $x^2 = \vartheta$, $x^3 = \varphi$) es

$$(2.14) \qquad ds^2 = d\rho^2 + K^{-1} \operatorname{sen}^2 k\rho \, d\vartheta^2 + K^{-1} \operatorname{sen}^2 k\rho \operatorname{sen}^2 \vartheta \, d\varphi^2.$$

Elijamos como punto P de e el pie de la normal desde O, y como vectores $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ las tangentes a las direcciones según las cuales varía únicamente φ o ϑ, respectivamente.

Las componentes de $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ serán

$$\bar{e}_1\left(0, 0, \frac{k}{\operatorname{sen} k\rho \operatorname{sen} \vartheta}\right), \ \bar{e}_2\left(0, \frac{k}{\operatorname{sen} k\rho}, 0\right), \ \bar{e}_3 \ (1, 0, 0).$$

Según (2, 4) se tiene, puesto que las componentes de $d_1 P$ son $d\rho$, 0, 0,

$$\omega^3 = \bar{e}_3 \, . \, d_1 P = d\rho$$

$$\omega_1{}^3 = \bar{e}_3 \, . \, D e_1$$
$$= (\Gamma_{31}{}^1 \, d\rho + \Gamma_{32}{}^1 \, d\vartheta + \Gamma_{33}{}^1 \, d\varphi) \frac{k}{\operatorname{sen} k\rho \operatorname{sen} \vartheta} = - \cos k\rho \operatorname{sen} \vartheta \, d\varphi$$

$$\omega_2{}^3 = e_3 \, . \, D e_2$$
$$= (\Gamma_{21}{}^1 \, d\rho + \Gamma_{22}{}^1 \, d\vartheta + \Gamma_{23}{}^1 \, d\varphi) \frac{k}{\operatorname{sen} k\rho} = - \cos k\rho \, d\vartheta$$

y por tanto, llamando ahora $d\Omega = \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$ al elemento de área sobre la esfera euclidiana unidad de centro O correspondiente a la dirección normal a e, queda

$$(2.15) \qquad de = \cos^2 k\rho \, [d\Omega \, d\rho].$$

Por ejemplo, la medida de los planos que cortan a una esfera de radio ρ, integrando la expresión anterior de 0 a ρ respecto ρ y sobre la esfera unidad $d\Omega$ (lo que da 4π), resulta ser

$$(2.16) \qquad 2\pi\,(\rho + k^{-1} \cos k\rho \operatorname{sen} k\rho).$$

En particular, si $K > 0$ (o sea, k es real), todo el espacio equivale a una esfera de radio $\pi/2k$ y por tanto se tiene el resultado conocido (²) de que *la medida de todos los planos del espacio elíptico de curvatura* $K = k^2$ *vale* π^2/k. Si se quiere expresar este resultado desde el punto de vista de los grupos, se tiene: en el caso $K > 0$, el espacio homogéneo G/E tiene volumen finito igual a π^2/k.

De manera análoga a la anterior se puede obtener la densidad para conjuntos de rectas (o sea, geodésicas) del espacio.

Sea r una recta y consideremos el subgrupo R de los movimientos que la dejan invariante. Tomando el triedro P, $\bar{e}_i$ de manera que $\bar{e}_3$ sea tangente a r, las ecuaciones diferenciales de las variedades que en el espacio del grupo G representan al subgrupo R y sus transformados por las operaciones de G, serán

$$\omega^1 = 0, \quad \omega^2 = 0, \quad \omega_3{}^1 = 0, \quad \omega_3{}^2 = 0.$$

La *densidad para conjuntos de rectas*, o sea, la medida elemental invariante del espacio homogéneo G/R será por tanto,

$$(2.17) \qquad dr = [\omega^1\,\omega^2\,\omega_3{}^1\,\omega_3{}^2]$$

siempre y cuando esta expresión no dependa del punto particular P elegido sobre r. Geométricamente, observemos que $[\omega^1\,\omega^2]$ representa el elemento de área $d\sigma$ normal a r en el punto P y $[\omega_3{}^1\,\omega_3{}^2] = [\omega_1{}^3\,\omega_2{}^3]$ según lo dicho anteriormente es igual al elemento de área sobre la esfera euclidiana unidad de centro P correspondiente a la dirección de r. Se puede por tanto escribir

$$(2.18) \qquad dr = [d\sigma\, d\Omega].$$

En esta forma se ve bien que no depende del punto P, puesto que por traslación paralela a lo largo de r, ni $d\sigma$, ni $d\Omega$

varían. Como G es transitivo respecto las rectas del espacio, la densidad anterior es única salvo un factor constante.

Es interesante observar que la forma dr es independiente de P para las geodésicas de cualquier espacio, aunque no sea de curvatura constante, como aquí consideramos. Entonces no existe desde luego el grupo G ni el R, pero a partir de la densidad dr se pueden medir también conjuntos de geodésicas obteniéndose propiedades del espacio, como hicimos para las superficies ($n=2$) en un trabajo anterior ([7]) y vamos a hacer para un espacio de Riemann general de dimensión n en un trabajo próximo.

Para el cálculo efectivo es útil referir las rectas r a un sistema de coordenadas fijo, como hicimos para el caso de los planos. Tomando un punto fijo O, cada recta r determina un plano normal a ella desde O; sea ahora $d\Omega$ el elemento de área sobre la esfera euclidiana unidad de centro O correspondiente a la dirección normal a dicho plano y $d\sigma$ el elemento de área sobre el mismo plano correspondiente a su punto de intersección con r. Entonces, si ρ es la distancia de O a r, por un método análogo al caso de los planos o bien directamente por un cambio de variables en (2. 18), se obtiene

$$dr = \cos k\rho \, [d\sigma \, d\Omega]. \tag{2.19}$$

Calculemos, por ejemplo, la medida de todas las rectas que cortan a una esfera de radio ρ. Como sobre un plano del espacio, en coordenadas polares ρ, ϑ, es $d\sigma = k^{-1} \operatorname{sen} k\rho \, d\rho \, d\vartheta$, resultará

$$\int_{\frac{1}{2}\Omega} d\Omega \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\rho} k^{-1} \operatorname{sen} k\rho \cos k\rho \, d\rho = 2\pi^2 k^{-1} \operatorname{sen}^2 k\rho.$$

En particular, si $K>0$, o sea k es real, todo el espacio equivale a una esfera de radio $\pi/2k$ y, por tanto, se tiene el resultado conocido ([2]): *la medida de todas las rectas del espacio elíptico de curvatura $K=k^2$ vale $2\pi^2/k$.* Si se quiere expresar desde el punto de vista de los grupos, el resultado es: el volumen

---

([7]) L. A. SANTALÓ, *Integral Geometry on surfaces*, Duke Mathematical Journal, Vol. 16, 1949, págs. 361-375.

del espacio homogéneo G/R correspondiente al caso $K > 0$ vale $2\pi^2/k$.

Aunque es trivial, terminaremos observando que la *densidad para conjuntos de puntos* P, de manera análoga a la anterior para planos y rectas, se obtiene que vale

$$dP = [\omega^1 \omega^2 \omega^3], \tag{2.20}$$

que ya vimos en (2.8) equivale al elemento de volumen del espacio. Por ejemplo, la medida del conjunto de puntos contenidos en una esfera de radio ρ es igual al volumen de la misma, que vale $2\pi k^{-3}(k\rho - \operatorname{sen} k\rho \cos k\rho)$. Para el caso $K > 0$, al hacer $\rho = \pi/2k$, resulta como volumen total del espacio el valor π^2/k^3.

3. *Sobre la curvatura total de una superficie cerrada.* — Sea S una superficie cerrada contenida en el espacio de curvatura constante K. En cada punto de S se distinguen dos curvaturas: a) *La curvatura intrínseca o absoluta* K^a, que es la curvatura riemanniana de S considerada como un espacio de Riemann de dos dimensiones. b) La *curvatura relativa* K^r, igual al producto de las curvaturas principales $1/R_1$, $1/R_2$ de S como superficie contenida en el espacio de curvatura constante considerado; es decir:

$$K^r = \frac{1}{R_1 R_2}. \tag{3.1}$$

También utilizaremos la *curvatura media,* que entenderemos siempre tomada con los radios R_1, R_2, o sea

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{3.2}$$

Como los radios principales de curvatura R_1, R_2 van a jugar un papel fundamental en lo sucesivo, conviene que recordemos su significado geométrico. El estudio de la geometría diferencial de las superficies contenidas en un espacio de curvatura constante (y aun en muchos casos, para las contenidas en un

---

(*) Ver E. Cartan, *loc. cit.*, págs. 96-99.

espacio de Riemann general) puede hacerse de manera análoga al de las superficies del espacio ordinario con sólo sustituir las rectas por geodésicas y el paralelismo ordinario por el de Levi-Civita [8]. Se demuestra así que por cada punto P de la superficie pasan dos curvas c_i $(i=1,2)$ normales entre sí, que tienen la propiedad de que la normal a la superficie en P, la tangente a c_i y la dirección que resulta al trasladar por paralelismo al punto P la normal a la superficie en el punto infinitamente próximo P' de c_i, están en un mismo elemento plano. Estas curvas son las *líneas de curvatura* de la superficie. Dos geodésicas del espacio, normales a S en dos puntos infinitamente próximos P, P' de la línea de curvatura c_i se cortarán [9] en un punto O_i y la distancia $O_iP=r_i$ $(i=1,2)$ (medida sobre la geodésica del espacio) está ligada con el radio de curvatura principal R_i por la relación [10]

$$R_i = k^{-1} \tan kr_i, \tag{3.3}$$

que puede tomarse como definición de los radios de curvatura principales R_i.

La igualdad (3.3) es general para cualquier curva del espacio; es decir, el radio de curvatura relativo R de una curva del espacio, está ligado con el radio r del círculo osculador por la misma relación

$$R = k^{-1} \tan kr. \tag{3.4}$$

Geométricamente, la definición de círculo osculador es muy clara, pues es la misma que para el caso euclidiano; a partir de ella la relación (3.4) define entonces el radio de curvatura relativo de la curva. Con esta definición, se demuestra que para las curvas de una superficie valen sin modificación los teoremas de Meusnier y de Euler de la geometría euclidiana ordinaria [11].

---

(9) Utilizamos aquí el lenguaje usual en geometría diferencial, que puede parecer no riguroso pero que lo es si se entiende bien el sentido que debe darse a las palabras. Decir que dos curvas infiniamente próximas del espacio "se cortan" quiere decir que pertenecen a un haz que tiene envolvente y el punto de encuentro de cada curva con su infinitamnte próxima es su punto de contacto con la envolvente.

(10) Ver por ejemplo L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry*, 1926, pág. 214.

(11) E. Cartan, *loc. cit.*, pág. 201.

Es decir, si ϑ es el ángulo de la normal principal de una curva de la superficie con la normal a la superficie, entre el radio de curvatura R de la curva y el R_n de la sección normal vale la relación

$$(3.5) \qquad R = R_n \cos \vartheta$$

y si la sección normal forma con una de las direcciones principales un ángulo φ, es

$$(3.6) \qquad \frac{1}{R_n} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{R_2}.$$

Volvamos ahora a la curvatura total absoluta K^a y relativa K^r de la superficie S. Si K es la curvatura total del espacio ambiente, se sabe que entre ambas existe la relación [12]

$$(3.7) \qquad K^r = K^a - K.$$

Sea $d\sigma$ el elemento de área de S. Si N es la característica de Euler de S, es conocida la fórmula [13]

$$(3.8) \qquad C^a = \int_S K^a \, d\sigma = -2\pi N$$

y por tanto, llamando F al área de S, de (3.7) se deduce

$$(3.9) \qquad C^r = \int_S K^r \, d\sigma = -2\pi N - KF.$$

Las integrales C^a y C^r se llaman, respectivamente, la *curvatura total absoluta* y *relativa* de la superficie S.

Si la superficie S es cerrada y orientable, limitará un cuerpo Q y se puede introducir en (3.9) la característica de Euler

---

(12) E. CARTAN, *loc. cit.*, pág. 194.

(13) Ver por ejemplo W. BLASCHKE, *Differentialgeometrie* I, pág. 166. Para la definición de la característica de Euler ver H. SEIFERT–W. THRELFALL, *Lehrbuch der Topologie*, pág. 87, y para la relación (3.10), pág. 223.

N' de Q. Basta recordar que entre N y N' hay la relación simple

$$N = 2N' \tag{3.10}$$

con lo cual (3.9) se puede escribir

$$C^r = -4\pi N' - KF. \tag{3.11}$$

Interesa también recordar finalmente que en el espacio de curvatura constante K, el elemento de arco ds de un círculo de radio r correspondiente al ángulo central $d\alpha$, está dado por la fórmula

$$ds = k^{-1} \operatorname{sen} kr \, d\alpha. \tag{3.12}$$

4. *Una expresión de Blaschke para la densidad cinemática.* — Para muchos propósitos es útil dar a la expresión (2.9) de la densidad cinemática otra forma más conveniente; es la forma dada por Blaschke para el caso del espacio euclidiano [14] y que vamos a ver subsiste para el caso de los espacios de curvatura constante.

Sean S_0 y S_1 dos superficies con curvatura continua del espacio de curvatura constante K. Supongamos a S_0 fija y consideremos las distintas posiciones gS_1 de S_1 obtenidas sometiendo esta última superficie a las operaciones g del grupo de los movimientos del espacio. Hemos visto que g queda determinado por los elementos P, Ω, φ mencionados en el nº. 2 y por medio de ellos la densidad cinemática toma la forma (2.9); obsérvese además que la dg no puede depender del punto P ni de las direcciones que sirven de referencia u origen para expresar Ω y φ, que se eligen para determinar g.

Supongamos una posición de S_1 en la que corte a S_0. Sea P un punto de la curva de intersección y representemos por t a la tangente a esta curva en P. Sean, además, ϑ el ángulo que forman las normales a las dos superficies en P y ds_0, ds_1 los elementos de arco de las curvas normales a t contenidas en S_0 y S_1 respectivamente. Si ds es el elemento de arco de la curva

[14] W. Blaschke, *Integralgeometrie 17, Ueber Kinematik*, Deltion, Atenas, 1936.

de intersección correspondiente al punto P, el elemento de volumen del espacio puede expresarse

$$\mathrm{d}P = \operatorname{sen}\vartheta\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}s_0\, \mathrm{d}s_1. \tag{4.1}$$

Si representamos por $\mathrm{d}\sigma_0$, $\mathrm{d}\sigma_1$ los elementos de área de S_0 y S_1 en el punto P, es también

$$\mathrm{d}\sigma_0 = \mathrm{d}s\, \mathrm{d}s_0, \qquad \mathrm{d}\sigma_1 = \mathrm{d}s\, \mathrm{d}s_1 \tag{4.2}$$

y por tanto de (4. 1) se deduce

$$[\mathrm{d}P\, \mathrm{d}s] = \operatorname{sen}\vartheta\, [\mathrm{d}\sigma_0\, \mathrm{d}\sigma_1]. \tag{4.3}$$

Por otra parte, tomando la dirección de t como dirección Ω que figura en (2. 9) y llamando φ_0, φ_1 a las rotaciones elementales alrededor de las normales a S_0 y S_1 en P, es

$$\mathrm{d}\Omega = \operatorname{sen}\vartheta\, \mathrm{d}\varphi_0\, \mathrm{d}\varphi_1 \tag{4.4}$$

y además $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\vartheta$. Por tanto, multiplicando exteriormente las últimas igualdades resulta

$$[\mathrm{d}s\, \mathrm{d}g] = \operatorname{sen}^2\vartheta\, [\mathrm{d}\sigma_0\, \mathrm{d}\varphi_0\, \mathrm{d}\sigma_1\, \mathrm{d}\varphi_1], \tag{4.5}$$

que es la fórmula que deseábamos obtener.

Recordemos, aunque no lo digamos explícitamente cada vez, que las densidades, así como los productos exteriores análogos a los que figuran en ambos miembros de (4. 5), se consideran siempre en valor absoluto.

5. *Curvatura total de la superficie de la intersección de dos cuerpos.* — Sean ahora Q_0, Q_1 dos cuerpos del espacio de curvatura constante que suponemos acotados y limitados por las superficies S_0, S_1 *con curvaturas continuas*. Supongamos Q_0 fijo y consideremos las distintas posiciones gQ_1 de Q_1, o sea, los distintos cuerpos que se obtienen aplicando a Q_1 los movimientos g del espacio. El cuerpo intersección

$$Q_{01} = Q_0 \cdot gQ_1 \tag{5.1}$$

estará limitado por una superficie cerrada S_{01} (que puede constar de varias partes separadas) formada por partes de S_0 y S_1 que se unen en la curva de intersección H de S_0 y S_1, curva que será de discontinuidad para la curvatura de S_{01}.

La curvatura total relativa $C^r(Q_0 \cdot gQ_1)$ de S_{01}, definida por la integral (3. 9), se compone de la integral $C^r{}_{01}$ de la curvatura relativa de S_0 extendida sobre la parte de S_0 interior a gQ_1, más la integral $C^r{}_{10}$ de la curvatura relativa de S_1 extendida sobre la parte de la gS_1 que es interior a S_0, más la parte $C^r{}_i$ correspondiente a la curva de intersección de S_0 con gS_1. Es decir

$$C^r = C^r{}_{01} + C^r{}_{10} + C^r{}_i. \tag{5. 2}$$

Interesa tener una expresión de $C^r{}_i$, es decir, de la parte que debe atribuirse a la curva de intersección H al formar la curvatura total relativa de S_{01}. Un método para ello consiste en sustituir S_{01} por una superficie paralela próxima que tenga curvatura relativa continua en todos sus puntos; calcular para ella la curvatura total relativa y pasar luego al límite cuando la distancia entre las dos superficies paralelas tienda a cero. Haciendo esto, a la curva H corresponderá la banda de superficie generada de la manera siguiente: en cada punto P de H supongamos las normales n_0, n_1 a S_0, gS_1 y consideremos el arco de círculo de radio ε y centro P limitado por estas normales; cuando P recorre H este arco de círculo describirá una banda de superficie, que llamaremos B, cuya curvatura total relativa, para $\varepsilon \rightarrow 0$, es $C^r{}_i$. Para calcular esta curvatura total empecemos por calcular el elemento de área $d\sigma$ sobre B. Sobre los arcos de círculo considerados de radio ε, según (3. 12) es

$$ds_1 = k^{-1} \operatorname{sen} k\varepsilon \, d\alpha \tag{5. 3}$$

siendo α el ángulo entre el radio correspondiente y la normal principal de H en P. Estos arcos de círculo son líneas de curvatura de la banda B, por estar sus normales en un plano; las otras líneas de curvatura serán las secciones con B de las normales a H tangentes a las evolutas de esta curva. Por tanto, si $r + \varepsilon$ es la distancia de P al punto de contacto con la evoluta (distancia que dependerá de α) según (3. 12), entre el elemento de arco ds de H y el ds_2 de B normal a ds_1 existirá la relación

$$\frac{ds}{ds_2}=\frac{\operatorname{sen} k(r+\varepsilon)}{\operatorname{sen} kr}$$

de donde

$$ds_2=\frac{\operatorname{sen} kr}{\operatorname{sen} k(r+\varepsilon)}\, ds. \tag{5.4}$$

Por tanto, según (5.3) y (5.4) será

$$d\sigma=ds_1\, ds_2=\frac{\operatorname{sen} k\varepsilon \operatorname{sen} kr}{k \operatorname{sen} k(r+\varepsilon)}\, d\alpha\, ds. \tag{5.5}$$

Por otra parte, los radios principales de curvatura de B son $k^{-1}\tan k\varepsilon$ y $k^{-1}\tan kr$; por consiguiente, escribiendo la curvatura total relativa de B y haciendo tender $\varepsilon \to 0$, resulta

$$C^r{}_i=\int\frac{k}{\tan kr}\, d\alpha\, ds \tag{5.6}$$

donde para cada valor de s, o sea cada punto P, α varía entre los ángulos α_0, α_1 que las normales a S_0, gS_1 forman con la normal principal de H; después, s varía a toda la curva H.

Para ver cómo depende r de α, observemos que la distancia $r+\varepsilon$ del punto P al punto de contacto con la evoluta es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo uno de cuyos catetos es igual al radio del círculo osculador ρ y el ángulo comprendido es igual a α. Se tiene entonces, por una simple fórmula trigonométrica de los triángulos geodésicos rectángulos de los espacios de curvatura constante k,

$$\tan k\rho=\cos\alpha \tan k(r+\varepsilon).$$

Por tanto, haciendo $\varepsilon \to 0$ y sustituyendo en (5.6) resulta

$$C^r{}_i=\int_H\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\frac{k\cos\alpha}{\tan k\rho}\, d\alpha\, ds$$

o sea

$$C^r{}_l = \int_H \frac{\operatorname{sen}\alpha_1 - \operatorname{sen}\alpha_0}{\tan k\rho}\, ds. \tag{5.7}$$

6. *Integral de la curvatura total relativa de la intersección de dos cuerpos.* — Hemos visto que la curvatura total relativa $C^r(Q_0 \cdot gQ_1)$ de la intersección de los cuerpos mencionados en el nº. anterior se descomponía según expresa (5. 2), donde la última parte está dada por (5. 7). Nuestro objeto es ahora calcular la integral

$$\int_G C^r(Q_0 \cdot gQ_1)\, dg \tag{6.1}$$

donde dg es la densidad cinemática (2. 9) y la integración está extendida a todo el grupo G de los movimientos del espacio de curvatura constante.

La integral de $C^r{}_{01}$ se calcula inmediatamente por un artificio corriente en geometría integral. Si $K^r{}_0$ indica la curvatura relativa de S_0 en el punto cuyo elemento de área es dσ_0, consideremos la integral

$$\int K^r{}_0\, d\sigma_0\, dg$$

extendida, respecto σ_0, a todos los puntos de S_0 interiores a gQ_1 y, respecto de g, a todo el grupo G. Si fijamos primero g e integramos respecto dσ_0 resulta precisamente la integral de $C^r{}_{01}$; en cambio, si se fija primero σ_0, según (2. 10), es

$$\int K^r{}_0\, d\sigma_0\, dg = 8\pi^2 V_1 \int_{S_0} K^r{}_0\, d\sigma_0 = 8\pi^2 V_1\, C^r{}_0.$$

Por tanto se tiene

$$\int_G C^r{}_{01}\, dg = 8\pi^2 V_1\, C^r{}_0. \tag{6.2}$$

Análogamente, por simetría debe ser

$$\int_G C^r{}_{10}\,dg = 8\pi^2 V_0 C^r{}_1 \tag{6.3}$$

donde $C^r{}_0$ y $C^r{}_1$ son las curvaturas totales relativas de las superficies S_0 y S_1 que limitan los cuerpos Q_0 y Q_1.

Queda por calcular la integral de $C^r{}_i$. Partimos de la expresión (5. 7). Siendo α_i $(i=0,1)$ los ángulos que forma la normal principal de H en P con la normal a S_i, el teorema de Meusnier, teniendo en cuenta (3. 3), da

$$\tan k\rho = \tan kr_{in} \cos \alpha_i$$

de donde

$$\cos\alpha_0 + \cos\alpha_1 = \tan k\rho\,(\tan^{-1} kr_{0n} + \tan^{-1} kr_{1n}).$$

Con esto, utilizando la relación

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1 - \operatorname{sen}\alpha_0}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_0} = \tan\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_0)$$

el valor (5. 7) de $C^r{}_i$ se puede escribir

$$C^r{}_i = k\int_H (\tan^{-1} kr_{0n} + \tan^{-1} kr_{1n}) \tan\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_0)\,ds$$

o bien, introduciendo los radios de curvatura relativos R_{0n}, R_{1n} y poniendo $\alpha_1 - \alpha_0 = \alpha$,

$$C^r{}_i = \int_H \left(\frac{1}{R_{0n}} + \frac{1}{R_{1n}}\right) \tan\frac{1}{2}\alpha\,ds. \tag{6.4}$$

El teorema de Euler (3. 6) permite ahora escribir

$$C^r{}_i = \int \left(\frac{\cos^2\varphi_0}{R_{01}} + \frac{\operatorname{sen}^2\varphi_0}{R_{02}} + \frac{\cos^2\varphi_1}{R_{11}} + \frac{\operatorname{sen}^2\varphi_1}{R_{12}}\right) \tan\frac{1}{2}\alpha\,ds \tag{6.5}$$

indicando con R_{i1}, R_{i2} los radios principales de curvatura de S_i. De aquí, teniendo en cuenta (4. 5) y que el ángulo entre las normales a las superficies es ahora α en lugar de ϑ, resulta

$$\int_G C^{r}{}_i \, dg = \int_G \left(\frac{\cos^2 \varphi_0}{R_{01}} + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi_0}{R_{02}} + \frac{\cos^2 \varphi_1}{R_{11}} + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi_1}{R_{12}}\right) \tan \frac{1}{2} \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha \, d\sigma_0 \, d\varphi_0 \, d\sigma_1 \, d\varphi_1. \tag{6.6}$$

Al tener en cuenta todas las posiciones de Q_1, o sea todos los movimientos g, el ángulo α varía entre $-\pi$ y $+\pi$ para cada valor de σ_0, φ_0, σ_1, φ_1, y por tanto, puesto que deben considerarse valores absolutos, resulta

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\tan \frac{1}{2} \alpha\right| \operatorname{sen}^2 \alpha \, d\alpha = 4.$$

Los ángulos φ_0, φ_1 pueden variar, independientemente uno de otro, entre 0 y 2π, apareciendo las integrales de $\operatorname{sen}^2 \varphi$ y $\cos^2 \varphi$ que valen π. Haciendo esto, hay que dividir luego por 2, puesto que si para cualquier valor de φ_0, φ_1 se incrementan ambos ángulos en π, resulta la misma posición de Q_1 o sea el mismo g. Poniendo finalmente

$$\frac{1}{2} \int_{S_i} \left(\frac{1}{R_{i1}} + \frac{1}{R_{i2}}\right) d\sigma_i = M_i \qquad (i=0,1) \tag{6.7}$$

que son las *curvaturas medias totales* de S_i, resulta

$$\int_G C^{r}{}_i \, dg = 8\pi^2 (M_0 F_1 + M_1 F_0)$$

y juntando con (6. 2) y (6. 3) se tiene la fórmula final

$$\int_G C^r (Q_0 \cdot g Q_1) \, dg = 8\pi^2 (V_0 C^{r}{}_1 + V_1 C^{r}{}_0 + M_0 F_1 + M_1 F_0). \tag{6.8}$$

Es curioso que en este resultado no aparezca la curvatura del espacio. La fórmula (6. 8) tiene, por tanto, idéntica forma para cualquier espacio de curvatura constante, en particular para el espacio euclidiano, en cuyo caso coincide con la llamada fórmula fundamental de Blaschke y es bien conocida (Ver notas ([1]) y ([2])).

7. *Integral de la característica de Euler.* — De (6. 8) y (3. 11) es ya inmediato la obtención de la integral sobre G de la característica de Euler $N'(Q_0 \cdot gQ_1)$ del cuerpo Q_{01} intersección de Q_0 con gQ_1. Para ello necesitamos únicamente conocer la integral del área F_{01} de la superficie que limita Q_{01}. Exactamente el mismo método seguido en el número anterior para hallar la integral de $C^r{}_{01}$ y $C^r{}_{10}$ da

$$(7.1) \qquad \int_G F_{01}\, dg = 8\pi^2 (V_0 F_1 + V_1 F_0).$$

De aquí, teniendo en cuenta (6. 8) y (3. 11) resulta

$$(7.2) \quad \int_G N'(Q_0 \cdot gQ_1)\, dg = 8\pi^2 (N'_1 V_0 + N'_0 V_1) - 2\pi (M_0 F_1 + M_1 F_0)$$

donde N'_0, N'_1 son las características de Euler de Q_0 y Q_1. Esta es la *fórmula fundamental* buscada. Se observa nuevamente que ella no depende de la curvatura constante del espacio: es la misma que para el caso euclidiano.

Observaciones. *a*) El hecho de que en (7. 2) no aparezca la curvatura del espacio no es general, sino que está relacionado con el número de dimensiones del espacio. Para dos dimensiones esto no ocurre. La fórmula análoga a la (7. 2) para dos dimensiones es

$$(7.3) \qquad \int_G N'\, dg = 2\pi (N'_0 F_1 + N'_1 F_0) + K F_0 F_1 - L_0 L_1,$$

siendo F_i las áreas, L_i las longitudes de los contornos y N'_i las características de Euler ($N' = -$ vértices $+$ aristas $-$ caras) de los dos recintos bidimensionales considerados del plano de curvatura constante K.

b) Para la demostración de (7. 2) hemos utilizado (6. 8) que fué establecida suponiendo que S_0 y S_1 tenían curvatura continua, lo cual es una condición muy restrictiva. Sin embargo, una vez establecida la (7. 2), por continuidad, es fácil demostrar su validez para casos mucho más generales. Supongamos, por ejemplo, que S_0 y S_1 estén formadas por un número finito de casquetes superficiales (o «caras») cada uno con curvatura continua, pero unidos por aristas que sean curvas de discontinuidad para la curvatura. Entonces, redondeando las aristas para transformar S_0 y S_1 en superficies con curvatura continua y aplicando (7. 2) a las nuevas superficies, al pasar al límite resulta la validez de (7. 2) también en este caso. Sólo hay que aclarar el valor de la curvatura media M para cuerpos con aristas, lo cual se deduce del método seguido en el n°. 5. En efecto, la curvatura media en un punto de la banda B allí considerada era

$$\frac{1}{2} k \left(\tan^{-1} k\varepsilon + \tan^{-1} kr\right)$$

y por tanto, multiplicando por (5. 5), integrando y haciendo $\varepsilon \to 0$, resulta que a la curvatura media total de las caras hay que agregar, como contribución de las aristas, el valor

$$M = \frac{1}{2} \int \alpha \, ds \tag{7.4}$$

siendo α el ángulo formado por las normales a caras a lo largo de las aristas y s la longitud de arco de éstas; α es función de s y la integración está extendida a todas las aristas de la superficie.

8. *Aplicación: La fórmula de Steiner para espacios de curvatura constante.* — Consideremos el caso particular de ser Q_0 y Q_1 dos *cuerpos convexos*; quiere decir que el arco de geodésica que une dos puntos cualesquiera de los mismos está íntegramente contenido en ellos. Entonces es $N'_0 = N'_1 = N' = -1$ y la fórmula fundamental (7. 2) queda

$$\int dg = 8\pi^2 (V_0 + V_1) + 2\pi (M_0 F_1 + M_1 F_0). \tag{8.1}$$

donde la integración está extendida a todos los movimientos g para los cuales es $Q_0 \cdot g Q_1 \neq 0$.

Supongamos en particular que Q_1 sea una esfera de radio ρ. Entonces, tomando como punto P que figura en la expresión (2. 9) de dg el centro de la esfera, para cada posición de P la integral de $d\Omega\, d\varphi$ da $8\pi^2$ y la integral de dP extendida a todas las posiciones en que es $Q_0 \cdot gQ_1 \neq 0$ es precisamente el *volumen del cuerpo paralelo exterior a* Q_0 *a distancia* ρ. Llamando V_ρ a este volumen y siendo

$$M_1 = 4\pi\, k^{-1} \operatorname{sen} k\rho \cos k\rho$$

$$F_1 = 4\pi\, k^{-2} \operatorname{sen}^2 k\rho$$

$$V_1 = 2\pi\, k^{-3} (k\rho - \operatorname{sen} k\rho \cos k\rho)$$

resulta

$$(8.2) \quad V_\rho = V_0 + F_0 k^{-1} \operatorname{sen} k\rho \cos k\rho + M_0 k^{-2} \operatorname{sen}^2 k\rho + 2\pi\, k^{-3} (k\rho - \operatorname{sen} k\rho \cos k\rho),$$

que generaliza a los espacios de curvatura constante la *fórmula de Steiner* sobre el volumen del cuerpo paralelo exterior a un cuerpo convexo. Para $k = 0$ se tiene la fórmula clásica de Steiner. Una demostración directa de (8. 2) válida para el espacio de n dimensiones fué dada por C. B. Allendoerfer ([15]). Para el caso bidimensional ver también E. Vidal Abascal ([16]). El caso $K > 0$ (espacio elíptico) se encuentra también en Ta-Jen Wu ([9]); en este caso el valor de ρ debe ser menor que $(\pi/2)k^{-1}$, puesto que las geodésicas son de longitud finita igual a πk^{-1}.

9. *Generalización de unos resultados de O. Varga a los espacios de curvatura constante.* — A partir de la fórmula (4. 5), que tiene la misma forma que para el espacio euclidiano, O. Varga obtuvo distintos valores medios de funciones definidas sobre la curva de intersección de dos superficies del espacio euclidiano,

---

([15]) C. B. Allendoerfer, *Steiner's formulae on a general S^n*, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 54, 1948.

([16]) E. Vidal Abascal, *A generalisation of Steiner's formulae*, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 53, 1947.

cuando una de ellas se supone fija y la otra móvil sin deformación a todas las posiciones posibles [17].

Todas las fórmulas obtenidas por Varga valen lo mismo para los espacios de curvatura constante, con sólo sustituir las curvaturas absolutas por las relativas respecto el espacio ambiente. Mencionaremos, como ejemplo, tan sólo una de ellas, que conduce a la generalización a los espacios de curvatura constante (o, si se quiere, a las geometrías no euclidianas) de un teorema dado por Varga para el espacio euclidiano.

Sean, como siempre, S_0 y S_1 dos superficies con curvatura continua de un espacio de curvatura constante. No hace falta suponer ahora que ellas limiten un cuerpo del espacio: pueden ser abiertas o cerradas no-orientables. Sea, como antes, H la curva de intersección de S_0 con gS_1. Sea τ la torsión de H en el punto P (se entiende torsión relativa, o sea, respecto la métrica del espacio) y s el arco de H. Llamando α_0 al ángulo de la normal principal de H con la normal a S_0 y φ_0 el ángulo de la tangente a H con la primera dirección principal de S_0 (todo en el punto P), se sabe que vale la fórmula [18]

$$(9.1) \qquad \tau = -\frac{d\alpha_0}{ds} + \left(\frac{1}{R_{02}} - \frac{1}{R_{01}}\right) \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \varphi_0$$

en la cual R_{02}, R_{01} son los radios principales de curvatura de S_0 en P. Esta fórmula tiene idéntica forma que para el espacio ordinario.

Análogamente para S_1 vale

$$(9.2) \qquad \tau = -\frac{d\alpha_1}{ds} + \left(\frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{R_{11}}\right) \operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_1$$

y por tanto, restando ambas expresiones y llamando $\alpha = \alpha_1 - \alpha_0$ al ángulo de las dos superficies en P, queda

$$\frac{d\alpha}{ds} = \left(\frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{R_{11}}\right) \operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_1 - \left(\frac{1}{R_{02}} - \frac{1}{R_{01}}\right) \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \varphi_0$$

(17) O. Varga, *Mittelwerte an dem Durchschnitt bewegter Flächen*, Mathematische Zeitschrift, vol. 41, 1936.

(18) E. Cartan, *loc. cit.*, pág. 99.

Elevando al cuadrado y poniendo para abreviar

$$\Delta_1 = \frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{R_{11}}, \qquad \Delta_0 = \frac{1}{R_{02}} - \frac{1}{R_{01}}$$

queda

$$\text{(9. 3)} \qquad \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 = \Delta_1{}^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_1 + \Delta_0{}^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0$$
$$- 2\Delta_1 \Delta_0 \operatorname{sen} \varphi_1 \cos\varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \varphi_0.$$

Multipliquemos miembro a miembro esta igualdad con la (4. 5) e integremos a todo el grupo G. En el segundo miembro hay que integrar α, φ_1, φ_0 de 0 a 2π y luego dividir por 2 por el hecho de corresponder cada par de valores φ_0, φ_1 y $\varphi_0 + \pi$, $\varphi_1 + \pi$ a una misma gS_1. Siendo

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{4} \pi$$

y observando que la integral del término negativo de la expresión (9. 3) es nula, queda

$$\text{(9. 4)} \qquad \int_G \left(\int_H \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 ds \right) dg = \frac{\pi^3}{4} [F_0 \int_{S_1} \Delta_1{}^2 F \, d\sigma_1 + F_1 \int_{S_0} \Delta_0{}^2 \, d\sigma_0].$$

Esta es la fórmula obtenida por Varga para el espacio euclidiano y que vale igualmente para los espacios de curvatura constante. De ella se deduce que si $\alpha =$ constante, deben ser $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$ y por tanto las superficies deben tener todas sus puntos umbílicos, o sea, deben ser esferas o partes de superficie esférica. Se puede, pues, enunciar:

Si el ángulo en que se cortan dos superficies de un espacio de curvatura constante, es constante a lo largo de la línea de intersección para toda posición de las superficies, ellas son esferas o partes de superficies esféricas (incluídos los planos como esferas de radio infinito).

10. *Fórmula fundamental para planos.* — Ya definimos en

el nº. 2 la densidad para conjuntos de planos, o sea el elemento de volumen invariante del espacio homogéneo G/E. Veamos ahora cómo se generaliza la fórmula (7. 2) para el caso en que en lugar de Q_1 tenemos un plano móvil e.

Necesitamos primeramente obtener una fórmula análoga a la (4. 5). Para ello consideremos una posición de e en la que corta a una superficie fija S_0. Sea P un punto de la curva de intersección H y n_0, n_1 las normales a S_0 y a e en P. Tomemos la expresión (2. 13) para de. Si ϑ es el ángulo entre n_0 y n_1 y φ_0 indica la rotación alrededor de n_0 que determina la posición del plano n_0, n_1 es $d\Omega = \operatorname{sen}\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$. Por otra parte, si ds_0 es el elemento de arco sobre S_0 normal a H, es $dt = \operatorname{sen}\vartheta \, ds_0$. Por tanto será $de = \operatorname{sen}^2\vartheta \, [d\vartheta \, d\varphi \, ds_0]$. Introduciendo en ambos miembros el elemento de arco ds de H y llamando $d\sigma_0$ al elemento de área de S_0 correspondiente al punto P, se tiene la fórmula buscada

$$[ds \, de] = \operatorname{sen}^2\vartheta \, [d\vartheta \, d\sigma_0 \, d\varphi_0]. \tag{10. 1}$$

Sea ahora un cuerpo fijo Q_0 limitado por la superficie S_0, cerrada y con curvatura continua. Sea e un plano que corta a Q_0 y consideremos un punto P de la curva de intersección H. Multipliquemos ambos miembros de (10. 1) por la curvatura geodésica $\varkappa_g$ de H, considerada como curva de e, en P. Por ser e un plano, esta curvatura geodésica coincide con la curvatura ordinaria (se entiende relativa al espacio de curvatura constante que consideramos). Por el teorema de Meusnier, si R_n es el radio de curvatura de la sección normal de S_0 tangente a H, será

$$1/\varkappa_g = R_n \operatorname{sen}\vartheta \tag{10. 2}$$

y por tanto, recordando la fórmula de Euler y la definición de curvatura media

$$\int_{G/E} \left(\int_H \varkappa_g \, ds \right) de =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\operatorname{sen}\vartheta| \, d\vartheta \int_{S_0} d\sigma_0 \int_0^{\pi} \left(\frac{\cos^2\varphi_0}{R_{01}} + \frac{\operatorname{sen}^2\varphi_0}{R_{02}} \right) d\varphi_0 = 2\pi M_0.$$

Por otra parte, la fórmula de Gauss-Bonnet aplicada al plano e y a la curva H de intersección del mismo con S_0, nos dice que es

$$\int_H \varkappa_g \, ds = -2\pi N' - K F_{01}$$

siendo F_{01} el área de la intersección de e con Q_0 (área limitada por H y que puede constar de varios pedazos separados) y N' la característica de Euler de esta área. Siendo además, como es fácil calcular por analogía con el caso euclidiano,

$$\int F_{10} \, de = 2\pi V_0$$

siendo V_0 el volumen de Q_0, resulta la fórmula integral

$$\int_{G/E} N' \, d\dot{e} = -M_0 - K V_0. \tag{10.3}$$

Esta fórmula es conocida para los casos $K=0$ (ver ([1])) y $K=1$ (ver ([3])). Si Q_0 es convexo, tal que la curva de intersección H conste siempre de un solo pedazo, será $N'=-1$ si e corta a Q_0 y $N'=0$ en caso contrario. Por tanto en este caso es

$$\int_{e \cdot Q_0 \neq 0} de = M_0 + K V_0 \tag{10.4}$$

que nos da *la medida del conjunto de planos que cortan a un cuerpo convexo del espacio de curvatura constante K.*

Como esta medida no puede ser negativa, se deduce:

Entre la curvatura media M_0 y el volumen V_0 de todo cuerpo convexo del espacio de curvatura constante y negativa $K = -1/a^2$ existe la relación

$$V_0 < a^2 M_0. \tag{10.5}$$

11. *Una interpretación de la fórmula fundamental para cuerpos convexos.* — Sea Q_0 un cuerpo convexo del espacio de curvatura constante K y sean V_0 su volumen, F_0 su área y M_0

su integral de curvatura media. La medida del conjunto de planos que tienen punto común con Q_0 está dada por (10. 4): la representaremos ahora por e_0, o sea,

$$e_0 = M_0 + K V_0. \tag{11.1}$$

La medida del conjunto de puntos contenidos en Q_0 es su volumen; representándolo por p_0 será

$$p_0 = V_0. \tag{11.2}$$

La medida del conjunto de rectas que tienen punto común con Q_0 se deduce inmediatamente de (2. 18) exactamente igual que para el caso euclidiano o elíptico (notas (1) y (2)), resultando valer

$$r_0 = \frac{1}{2} \pi F_0. \tag{11.3}$$

Con esto, suponiendo ahora otro cuerpo convexo móvil Q_1, *la medida del conjunto de posiciones de Q_1 en las cuales tiene punto común con Q_0*, que ya vimos está dada por (8. 1), se puede escribir

$$\int_{Q_0 \cdot g Q_1 \neq 0} dg = 8\pi^2 (p_0 + p_1) + 4 (e_0 r_1 + e_1 r_0) - 4K (p_0 r_1 + p_1 r_0), \tag{11.4}$$

que no da dicha medida *cuando se toman como invariantes de los cuerpos convexos las medidas de los puntos que contienen y de los planos y rectas que los cortan.*

Facultad de Ciencias Físicomatemáticas
La Plata.