TIRADA APARTE DE *MATEMATICAE NOTAE* - AÑO VII - FASC. 2-3

UNA PROPIEDAD CARACTERISTICA DE LAS CUADRICAS DE REVOLUCION Y DE LOS CILINDROS CUYA SECCION RECTA ES UNA ESPIRAL LOGARITMICA

por L. A. SANTALÓ

1. *Introducción.* Se llaman curvas-D de una superficie aquellas que en cada uno de sus puntos tienen la esfera osculatriz tangente a la superficie ([1]).

Se sabe que la ecuación diferencial de estas curvas-D es de segundo orden, de manera que por cada punto de una superficie pasan infinitas, una para cada dirección considerada sobre la superficie.

El teorema que vamos a demostrar en esta nota es el siguiente:

Las únicas superficies tales que en cualquier punto de la superficie, el lugar geométrico de los centros de curvatura de las curvas-D que pasan por él es una curva plana, son las cuádricas de revolución y los cilindros cuya sección recta es una espiral logarítmica.

Deben excluirse, y ello haremos en todo el trabajo, las esferas y, como caso límite, los planos, para los cuales todas las curvas son curvas-D.

En realidad las curvas-D intervienen en el teorema únicamente para dar una mayor simplicidad al enunciado. Como sólo se utiliza de ellas la propiedad local que las caracteriza en cada punto, podría prescindirse de las mismas y decir:

Consideremos en un punto P de una superficie todas las esferas tangentes y los centros de los círculos osculadores en P a las curvas de intersección de estas esferas con la superficie. El

([1]) Bibliografía sobre estas curvas se puede ver en la *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, III$_3$, D 3, págs. 181-182.

lugar geométrico de estos centros será, en general, una curva alabeada; las únicas superficies para las cuales esta curva es plana para todos los puntos P de la superficie, son las cuádricas de revolución y los cilindros cuya sección recta es una espiral logarítmica.

2. *Fórmulas necesarias.* Consideremos un punto de una superficie y un sistema de ejes coordenados ortogonales x_1, x_2, x_3 tales que el plano $x_1 x_2$ sea el plano tangente y los ejes x_1, x_2 coincidan con las direcciones principales de curvatura de la superficie en dicho punto. Supondremos siempre que se trata de un punto regular, es decir, un punto en el cual las curvaturas principales son finitas y derivables.

Entonces se sabe que la ecuación de la superficie en un entorno del origen (que es el punto considerado) se expresa por el desarrollo en serie

$$\begin{aligned} x_3 = & \frac{1}{2}(k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2) + \\ & \frac{1}{6}(k_{11} x_1^3 + 3k_{12} x_1^2 x_2 + 3k_{21} x_1 x_2^2 + k_{22} x_2^3) + \dots \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde k_1 y k_2 son las curvaturas principales en el origen y además se ha puesto

$$k_{ij} = \frac{\partial k_i}{\partial x_j} \qquad (i, j = 1, 2). \tag{2.2}$$

Tanto las curvaturas k_1, k_2 como sus derivadas parciales se toman en el origen.

Para hallar las ecuaciones paramétricas de la curva-D que pasa por el origen y es tangente en él a la dirección que forma un ángulo φ con el eje x_1, podemos proceder por coeficientes indeterminados de la manera siguiente.

Llamando s al arco de la curva, en un entorno del origen, estas ecuaciones paramétricas deben ser de la forma

$$\begin{aligned} x_1 &= s \cos \varphi + \alpha_1 s^2 + \beta_1 s^3 + \dots \\ x_2 &= s \operatorname{sen} \varphi + \alpha_2 s^2 + \beta_2 s^3 + \dots \\ x_3 &= \alpha_3 s^2 + \beta_3 s^3 + \dots \end{aligned} \tag{2.3}$$

Siendo s el arco, debe ser $x'^2_1+x'^2_2+x'^2_3=1$ (indicando los acentos derivadas respecto s), de donde, sustituyendo los valores (2. 3) e igualando a cero el coeficiente de s se tiene la primera relación

$$\alpha_1 \cos\varphi + \alpha_2 \operatorname{sen}\varphi = 0. \tag{2.4}$$

Además, para que la curva (2. 3) esté contenida en la superficie (1. 1) debe verificarse idénticamente

$$\begin{aligned}\alpha_3 s^2 + \beta_3 s^3 + \ldots = {} & \frac{1}{2}(k_1 \cos^2\varphi + k_2 \operatorname{sen}^2\varphi)\, s^2 + \\ & \frac{1}{6}(k_{11}\cos^3\varphi + 3k_{12}\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi + 3k_{21}\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi \\ & + k_{22}\operatorname{sen}^3\varphi + 6k_1\alpha_1\cos\varphi + 6k_2\alpha_2 \operatorname{sen}\varphi)\, s^3 + \ldots\end{aligned} \tag{2.5}$$

de donde se deduce, igualando los coeficientes de las potencias s^2 y s^3 de ambos miembros,

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= \frac{1}{2}(k_1\cos^2\varphi + k_2 \operatorname{sen}^2\varphi) \\ \beta_3 &= \frac{1}{6}(k_{11}\cos^3\varphi + 3k_{12}\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi + \\ &\qquad 3k_{21}\cos\varphi\operatorname{sen}^2\varphi + k_{22}\operatorname{sen}^3\varphi) \\ &\quad + k_1\alpha_1\cos\varphi + k_2\alpha_2\operatorname{sen}\varphi.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Por otra parte, para que (2. 3) sea una curva-D la ecuación de su esfera osculatriz en el origen debe ser de la forma

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2Rx_3 = 0 \tag{2.7}$$

siendo R el radio de la misma. Por tanto, al sustituir en esta ecuación los valores (2. 3), deben ser nulos los coeficientes de s^2 y s^3, lo cual, teniendo en cuenta (2. 4), da las condiciones

$$1 - 2\alpha_3 R = 0, \qquad \beta_3 = 0. \tag{2.8}$$

De (2. 4) y de la segunda ecuación (2. 6), teniendo en cuenta (2. 8), se deducen los valores de α_1 y α_2, a saber

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} h \operatorname{sen} \varphi, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2} h \cos \varphi$$

habiendo puesto, para abreviar,

$$h = \frac{k_{11} \cos^3 \varphi + 3k_{12} \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi + 3k_{21} \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi + k_{22} \operatorname{sen}^3 \varphi}{3(k_1 - k_2) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi} \tag{2.9}$$

Resulta, en definitiva, que las ecuaciones de la curva-D de la superficie (2.1) que pasa por el origen y cuya tangente en este punto forma un ángulo φ con el eje x_1, en un entorno del origen, son

$$\begin{aligned} x_1 &= s \cos \varphi - \frac{s^2}{2} h \operatorname{sen} \varphi + \ldots \\ x_2 &= s \operatorname{sen} \varphi + \frac{s^2}{2} h \cos \varphi + \ldots \\ x_3 &= \frac{1}{2} s^2 (k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi) + \ldots \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde los puntos indican términos que contienen potencias de s superiores a s^2 (²).

3. *Demostración del teorema.* La dirección de la normal principal en el origen ($s = 0$) a la curva-D cuyas ecuaciones son las (2.10) tiene sus cosenos directores proporcionales a

$$x''_1 = -h \operatorname{sen} \varphi, \qquad x''_2 = h \cos \varphi, \qquad x''_3 = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi \tag{3.1}$$

y el radio de curvatura r vale

$$r = \frac{1}{\sqrt{x''^2_1 + x''^2_2 + x''^2_3}} = \frac{1}{\sqrt{h^2 + (k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^2}}. \tag{3.2}$$

(²) Estas ecuaciones para las curvas D se encuentran ya en W. BLASCHKE, *Bestimmung der Flächen deren D-Linien gleichzeitig Böschungslinien sind*, Mathematische Zeitschrift, vol. 27, 1928, pág. 150.

Por tanto las ecuaciones paramétricas de la curva descrita por los centros de curvatura de las curvas-D que pasan por el origen son

$$\xi = \frac{-h \operatorname{sen} \varphi}{h^2 + (k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^2}$$

$$\eta = \frac{h \cos \varphi}{h^2 + (k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^2} \qquad (3.3)$$

$$\zeta = \frac{k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{h^2 + (k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^2}$$

en las cuales el parámetro variable es el ángulo φ.

Para que esta curva sea plana deben existir las constantes A, B, C, D tales que sea, idénticamente para todo valor de φ,

$$A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0 \qquad (3.4)$$

o sea,

$$\begin{aligned} -Ah \operatorname{sen} \varphi + Bh \cos \varphi + C\,(k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \\ + D\,[h^2 + (k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^2] = 0 \end{aligned} \qquad (3.5)$$

donde h tiene el valor (2. 9).

Observemos que para nuestro objeto podemos suponer $k_1 \neq k_2$, puesto que el caso de ser $k_1 = k_2$ en todo punto de la superficie significa que la misma es esférica, caso que hemos excluído por ser entonces curvas-D todas las de la superficie.

Sustituyendo en (3. 5) el valor (2. 9) de h y quitando denominadores se observa que el coeficiente de D contiene potencias de $\cos \varphi$ y $\operatorname{sen} \varphi$ superiores a las de los demás coeficientes; por tanto, para que (3. 5) sea una identidad respecto de φ, debe ser $D = 0$. Resulta por tanto: *si el lugar geométrico de los centros de curvatura de las curvas-D de una superficie que pasan por un punto es una curva plana, el plano que la contiene pasa por este punto.*

Después de hacer $D = 0$, el primer miembro de (3. 5) queda un polinomio en $\operatorname{sen}^4 \varphi$, $\operatorname{sen}^3 \varphi \cos \varphi$, $\operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi$, $\operatorname{sen} \varphi \cos^3 \varphi$ y $\cos^4 \varphi$, el cual, para que se anule para todo valor de φ debe tener iguales a cero todos sus coeficientes. Resulta así el sistema

$$
\begin{aligned}
-Ak_{11}+3Bk_{12}+3Ck_1(k_1-k_2)&=0\\
-3Ak_{21}+Bk_{22}+3Ck_2(k_1-k_2)&=0\\
-Ak_{12}+Bk_{21}&=0\\
Ak_{22}&=0\\
Bk_{11}&=0.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Hay que ver en qué casos este sistema puede tener soluciones A, B, C que sean constantes, no todas iguales a cero.

Los casos posibles son los siguientes:

I. *k_1 y k_2 son distintos de cero.* En este caso caben las posibilidades siguientes:

a) $A=0$, $B=0$. En este caso resulta $k_1=k_2$ y por tanto la superficie es una esfera o un plano, caso que ya hemos dicho debe excluirse.

b) $A=0$, $B\neq 0$. Las últimas ecuaciones (3.6) dan en este caso las condiciones

$$k_{11}=0, \qquad k_{21}=0. \tag{3.7}$$

Las dos primeras ecuaciones (3.6), si $C=0$, dan $k_{12}=k_{22}=0$, que junto con las (3.7) exigen que k_1 y k_2 sean constantes; resulta de nuevo el caso de la esfera. Si $C\neq 0$, eliminando en las dos primeras ecuaciones (3.6) B y el producto $C(k_1-k_2)$, resulta la condición

$$k_1 k_{22}-3k_2 k_{12}=0. \tag{3.8}$$

La condición (3.8) se puede escribir

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{k_2}{k_1{}^3}\right)=0 \tag{3.9}$$

y de (3.7) se deduce también

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{k_1}{k_2{}^3}\right)=0. \tag{3.10}$$

Estas condiciones (3. 9) y (3. 10) bastan para asegurar que la superficie es una cuádrica [3].

Una demostración directa de este hecho es la siguiente:

Las condiciones (3. 7) indican que se trata de una superficie de revolucion [4]. Tomemos un sistema de ejes coordenados x, y, z tal que el eje de revolución coincida con el eje x. Vamos a hallar la ecuación $z = z(x)$ de la sección meridiana por el plano x, z. El radio de curvatura de la sección normal tangente a un paralelo, es igual a la longitud de la normal a la curva $z = z(x)$ comprendida entre el punto considerado y el eje x de revolución, o sea,

$$\frac{1}{k_1} = z\,(1+z'^2)^{1/2}.$$

Además, la curvatura de la sección meridiana vale

$$k_2 = \frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}}\,.$$

Con estos valores, la condición (3. 9), se escribe,

$$z^3\, z'' = -\, a^2$$

siendo a una constante. Esta ecuación se integra inmediatamente escribiéndola en la forma

$$z^3 \frac{dz'}{dz} z' = -\, a^2 \qquad \text{o sea} \qquad z'\, dz' = -\frac{a^2}{z^3}\, dz$$

de donde

$$z'^2 = \frac{a^2}{z^2} + b \qquad \text{o sea} \quad \frac{zz'}{\sqrt{a^2+bz^2}} = 1$$

(3) Ver G. Darboux, *Théorie générale des surfaces*, vol. II, pág. 415 (nº 513).

(4) Ver. W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie* I, pág. 142 (Berlin, 1930).

y finalmente

$$\sqrt{a^2+bz^2}=bx+c$$

siendo c otra constante. Esta ecuación, elevando al cuadrado ambos miembros, es la ecuación de una cónica.

c) $A \neq 0$, $B=0$. Es el caso simétrico del anterior, del cual se deduce permutando los ejes x_1 y x_2. Se llega, por tanto, a la misma conclusión que en b).

d) $A \neq 0$, $B \neq 0$. Si $C=0$, se deduce que deben ser constantes k_1 y k_2, o sea, se cae de nuevo en el caso de la esfera.

Si $C \neq 0$, como suponemos que k_1, k_2 y k_1-k_2 son distintos de cero, el sistema (3. 6) da las condiciones

$$k_{11}=0, \qquad k_{22}=0, \qquad k_2 k_{12}^2+k_1 k_{21}^2=0. \tag{3. 11}$$

Las dos primeras condiciones caracterizan a las cíclidas de Dupin ([5]). Como estas cíclidas dependen de un número finito de parámetros, la necesidad de cumplir la tercera relación prueba que las tres condiciones juntas solamente se pueden cumplir en un número finito de puntos o sobre una curva de la superficie, pero no para todos los puntos de la misma.

II. *Una de las curvaturas* k_1 *o* k_2 *es igual a cero.* Si las dos curvaturas son nulas a la vez, estamos en el caso del plano que excluimos. Basta, pues, considerar únicamente el caso en que una sola de las curvaturas es igual a cero. Por simetría bastará considerar el caso $k_2=0$. De esta condición se deduce

$$k_{21}=0, \qquad k_{22}=0 \tag{3. 12}$$

y el sistema (3. 6) queda

$$\begin{gathered} -Ak_{11}+3Bk_{12}+3Ck_1^2=0 \\ Ak_{12}=0, \qquad Bk_{11}=0 \end{gathered} \tag{3. 13}$$

Por ser $k_2=0$, la superficie es un cilindro, cuya sección

(5) Ver W. Blaschke, *Differentialgeometrie* I, pág. 140.

recta es la curva plana definida por la ecuación intrínseca $k_1 = k_1(s)$. Siendo un cilindro, todas las secciones rectas son iguales y por tanto $k_{12}=0$, con lo cual el sistema (3. 6) se reduce a la ecuación

$$\frac{k_{11}}{k_1^2} = \frac{3C}{A} = -a \tag{3.14}$$

siendo a una constante que puede ser nula. k_{11} es la derivada de k_1 respecto de x_1, pero como la línea de curvatura $x_2=$cte. es tangente al eje x_1, llamando s a su arco, es $dx_1/ds=1$. Por tanto, integrando (3. 14) resulta

$$\frac{1}{k_1} = as + b$$

que es la ecuación intrínseca de la espiral logarítmica (6).

Si $a=0$ resulta un cilindro de revolución, que cae dentro de las cuádricas de revolución.

Reuniendo todos los casos considerados se tiene demostrado el teorema enunciado en la Introducción.

4. *Observación.* E. D. Camier en una nota titulada *A property characteristic of quadrics of revolution and general cylinders* (Mathematical Gazette, vol. XXX, 1946, pág. 141) estudia el problema de hallar las superficies tales que en todos sus puntos el lugar geométrico de los centros de las esferas osculatrices de las geodésicas que pasan por ellos es una curva plana.

Tomando los mismos ejes coordenados y con las mismas notaciones del n.º 2 anterior, el lugar geométrico de los centros de las esferas osculatrices de las geodésicas de la superficie (2. 1) que pasan por el origen, resulta ser la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\xi_1 = \frac{-3h \operatorname{sen} \varphi}{(k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^2}$$

(6) Ver, por ejemplo, E. Cesaro, *Lezioni di Geometria Intrinseca*, Napoli 1896, pág. 15.

$$\eta_1 = \frac{3h \cos \varphi}{(k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^2} \tag{4.1}$$

$$\zeta_1 = \frac{1}{k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

Comparando estas ecuaciones con las (3.3) resulta

$$\frac{\xi}{\xi_1} = \frac{\eta}{\eta_1} = \frac{\zeta}{\zeta_1}, \tag{4.2}$$

es decir: *la dirección del radio de la esfera osculatriz a una geodésica de una superficie en un punto, coincide con la dirección de la normal principal a la curva-D tangente a la geodésica en dicho punto.*

En consecuencia, cuando la curva lugar geométrico de los centros de curvatura de las curvas-D que pasan por un punto O sea una curva plana, como hemos visto que el plano que la contiene pasa por el punto O, resulta que también será plana la curva lugar de los centros de las esferas osculatrices de las geodésicas que pasan por O.

De aquí que el resultado del problema considerado en esta nota coincida con el de Camier. Sin embargo, Camier afirma que la condición se cumple para cualquier cilindro, mientras que, según hemos visto, es necesario que el cilindro, o bien sea circular, o bien tenga por sección recta una espiral logarítmica.

ROSARIO, INSTITUTO DE MATEMÁTICA.