TIRADA APARTE DE *MATHEMATICÆ NOTÆ* — AÑO XVI

GEOMETRIA DIFERENCIAL AFIN Y CUERPOS CONVEXOS

POR

L. A. SANTALÓ

Introducción. - Son bien conocidos los hermosos resultados que Blaschke ha obtenido en el Vol. 2 de su Geometría Diferencial aplicando la geometría diferencial afín de superficies al estudio de los cuerpos convexos [1]. Por otra parte, las ventajas de tratar la geometría diferencial por el método del triedro móvil y el uso de las formas diferenciales, siguiendo a E. Cartan, son también evidentes. Siguiendo este método vamos a establecer en este trabajo las ecuaciones fundamentales de la geometría diferencial afín de superficies, para obtener luego (Nros. 8, 9, 10) algunas fórmulas integrales y unas caracterizaciones del elipsoide, en parte conocidas, pero que con el método utilizado aparecen da manera natural y bastante más simplemente que por los métodos antes utilizados.

En un trabajo anterior [13], hicimos algo análogo, pero utilizando como triedro fundamental unido a cada punto de la superficie el formado por las tangentes a las líneas asintóticas (además de la normal afín), lo cual obliga a la introducción de imaginarios para el caso de puntos elípticos. Como las principales aplicaciones que tenemos en vista se refieren a superficies convexas, es mejor utilizar otro triedro que sea real en el caso de puntos elípticos. Por esto vamos a tomar ahora como vectores fundamentales en cada punto la normal afín y las tangentes a las líneas de curvatura afín.

El único texto que conocemos en que la geometría diferencial afín de superficies está tratada por los métodos de E. Cartan es el reciente de J. Favard [6], al cual remitimos para cualquier aclaración acerca del método en general, aunque aquí tomamos un triedro distinto, mas conveniente para las aplicaciones de los Nros. 8, 9, 10 (1).

1. - *El grupo afín y sus ecuaciones de estructura.* Ver [4]. En el espacio ordinario de tres dimensiones consideremos el grupo de las transformaciones afines unimodulares, es decir el grupo

$$x_i' = \sum_{k=1}^{3} a_i^k x_k + b_i, \qquad \det |a_i^k| = 1. \tag{1.1}$$

El triedro móvil de este grupo está formado por un punto X y tres vectores I_1, I_2, I_3 que tienen su origen en X y satisfacen la condición

$$(I_1 I_2 I_3) = (I_1 \wedge I_2) \cdot I_3 = 1, \tag{1.2}$$

donde $\wedge$ representa el producto vectorial y el punto el producto escalar.

Poniendo

$$dX = \sum_{i=1}^{3} \omega^i I_i, \qquad dI_i = \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k I_k \tag{1.3}$$

quedan definidas las componentes relativas ω^i, ω_k^i del grupo afín unimodular, que se pueden calcular a partir de estas relaciones y de (1.2). Por ejemplo, se tiene

$$\begin{aligned} &\omega^1 = (dX\, I_2\, I_3), \quad \omega^2 = (I_1\, dX\, I_3), \quad \omega^3 = (I_1\, I_2\, dX) \\ &\omega_1^1 = (dI_1\, I_2\, I_3), \quad \omega_1^2 = (I_1\, dI_1\, I_3), \ldots \end{aligned} \tag{1.4}$$

Diferenciando (1.2) se obtiene la relación

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0. \tag{1.5}$$

(1) Salvo algunas modificaciones y complementos el presente trabajo es el contenido de una conferencia del autor en el "Coloquio Henri Poincaré", que tuvo lugar en el Instituto H. Poincaré de París, en octubre de 1954, para conmemorar el centenario del nacimiento del ilustre matemático, y que fue publicada en mimeógrafo en el volumen de las Actas del Coloquio.

Tomando la diferencial exterior de las ecuaciones (1.3), teniendo luego en cuenta las ecuaciones mismas, se obtienen las *ecuaciones de estructura* del grupo afín unimodular, a saber

$$(1.6) \qquad d\,\omega^i = \sum_{k=1}^{3} \omega^h \wedge \omega_h{}^i, \quad d\,\omega_i{}^k = \sum_{k=1}^{3} \omega_i{}^h \wedge \omega_h{}^k.$$

Aquí el símbolo $\wedge$ representa producto exterior. No hay confusión posible: aplicado a vectores, el signo representa el producto vectorial, y aplicado a formas diferenciales al producto exterior.

2.- *El triedro afín de Frenet de una superficie.* Sea

$$(2.1) \qquad X = X(u, v)$$

la ecuación vectorial de una superficie S. Para su estudio afín, vamos a tomar el triedro (X, I_i) de manera conveniente, haciendo intervenir para la determinación de los vectores I_i elementos geométricos de S que sean invariantes respecto el grupo afín unimodular.

Empezamos por tomar el origen X del triedro sobre S y los vectores I_1, I_2 tangentes a S. Esto equivale a decir que los vectores I_1, I_2, dX están en un mismo plano, y por consiguiente

$$(2.2) \qquad (I_1\, I_2\, dX) = \omega^3 = 0$$

de aquí resulta $d\,\omega^3 = 0$ o bien, en virtud de (1.6),

$$(2.3) \qquad \omega^1 \wedge \omega_1{}^3 + \omega^2 \wedge \omega_2{}^3 = 0.$$

Como ω^1, ω^2 son formas diferenciales independientes, las $\omega_i{}^k$ son combinación lineal de ellas que, teniendo en cuenta (2.3), serán de la forma

$$(2.4) \qquad \omega_1{}^3 = a\,\omega^1 + b\,\omega^2, \quad \omega_2{}^3 = b\,\omega^1 + c\,\omega^2.$$

Las *líneas asintóticas* de la superficie, invariantes por proyectividades y por tanto por afinidades, se definen por tener en cada punto el plano osculador tangente a la superficie, es detir, por estar el vector d^2X en el plano tangente. Su ecuación diferencial es por tanto $(I_1 I_2 d^2 X)=0$, o sea,

$$(I_1, I_2, \omega^1 d I_1 + \omega^2 d I_2) = \omega^1 \omega_1{}^3 + \omega^2 \omega_2{}^3 = 0, \tag{2.5}$$

es decir, teniendo en cuenta (2. 4),

$$a(\omega^1)^2 + 2b\,\omega^1 \omega^2 + e(\omega^2)^2 = 0. \tag{2.6}$$

La condición para que dos direcciones $dX = \omega^1 I_1 + \omega^2 I_2$, $d^*X = \omega^{1*} I_1 + \omega^{2*} I_2$ sean *conjugadas* será

$$a\,\omega^1 \omega^{1*} + b(\omega^1 \omega^{2*} + \omega^2 \omega^{1*}) + e\,\omega^2 \omega^{2*} = 0. \tag{2.7}$$

Por tanto, eligiendo los vectores I_1, I_2 de manera que sean tangentes conjugadas de la superficie, tendremos $b=0$ y por tanto

$$\omega_1{}^3 = a\,\omega^1, \qquad \omega_2{}^3 = e\,\omega^2. \tag{2.8}$$

Observemos que de la ecuación de las líneas asintóticas, siendo ahora $b=0$, se deduce que es $ae>0$ para los puntos elípticos, $ae<0$ para los hiperbólicos y $ae=0$ para los parabólicos. Como tenemos en vista aplicaciones a las superficies convexas, nos limitaremos al caso de superficies con solo puntos elípticos, es decir, supondremos

$$ae > 0. \tag{2.9}$$

Para el caso de puntos hiperbólicos, siendo las asintóticas reales, lo más cómodo es tomar por vectores I_1, I_2 las tangentes a estas curvas (ver [12]). Para el caso de puntos parabólicos las superficies son desarrollables y exigen un tratamiento especial (ver, F a v a r d [6]).

Vamos a ver como se transforman a, e por un cambio de ejes de la forma

$$\begin{aligned} I_1^* &= \alpha I_1 + \beta I_2 \\ I_2^* &= \lambda I_1 + \mu I_2 \\ I_3^* &= D^{-1} I_3 \end{aligned} \tag{2.10}$$

siendo $D = \alpha\mu - \lambda\beta$, con la condición de que I_1^*, I_2^* sigan siendo tangentes a direcciones conjugadas, o sea,

$$a\,\alpha\,\lambda + e\,\beta\,\mu = 0. \tag{2.11}$$

Se tiene

$$\omega^{1*} = (d\,X\,I_2^*\,I_3^*) = \frac{\mu}{D}\omega^1 - \frac{\lambda}{D}\omega^2$$

$$\omega^{2*} = (I_1^*\,d\,X\,I_3^*) = -\frac{\beta}{D}\omega^1 + \frac{\alpha}{D}\omega^2$$

$$\omega_1^{3*} = a^*\,\omega^{1*} = (I_1^*\,I_2^*\,d\,I_1^*) = D(\alpha\,a\,\omega^1 + \beta\,e\,\omega^2)$$

$$\omega_2^{3*} = e^*\,\omega^{2*} = (I_1^*\,I_2^*\,d\,I_2^*) = D(\lambda\,a\,\omega^1 + \mu\,e\,\omega^2)$$

de donde

$$a^* = \frac{\alpha D^2}{\mu}a = -\frac{\beta D^2}{\lambda}e$$

$$e^* = \frac{\mu D^2}{\alpha}e = -\frac{\lambda D^2}{\beta}a.$$

De aquí

$$a^*\,e^* = D^4\,a\,e.$$

Por tanto, siendo $ae > 0$, podemos hacer $a = 1$, $e = 1$ con tal de tomar

$$D^4 = \frac{1}{ae}, \quad \alpha = \frac{\mu}{aD^2}, \quad \beta = -\frac{\lambda}{eD^2}$$

$$\alpha\,\mu - \beta\,\lambda = \frac{\mu^2}{aD^2} + \frac{\lambda^2}{eD^2} = D. \tag{2.12}$$

Con ello, la condición (2.11) se satisface y queda todavía un parámetro arbitrario. Supuestos elegidos I_1, I_2 de manera que se cumplan estas condiciones y por tanto $a=1$, $e=1$, las ecuaciones (2.12) dan

$$\alpha=\mu, \quad \beta=-\lambda, \quad \mu^2+\lambda^2=1$$

o sea, poniendo $\lambda=-\cos\vartheta$, $\mu=\operatorname{sen}\vartheta$ queda todavía posible un cambio de la forma

$$\begin{aligned} I_1^* &= \operatorname{sen}\vartheta\, I_1+\cos\vartheta\, I_2 \\ I_2^* &= -\cos\vartheta\, I_1+\operatorname{sen}\vartheta\, I_2 \\ I_3^* &= \alpha\, I_1+\beta\, I_2+I_3. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Los coeficientes α, β se pueden determinar por la condición de que sea $\omega_3^{3*}=0$. En efecto, es

$$\omega_3^{3*}=(I_1^*\, I_2^*\, d\, I_3^*)=\alpha\, \omega_1^3+\beta\, \omega_2^3+\omega_3^3=\alpha\, \omega^1+\beta\, \omega^2+\omega_3^3.$$

Suponiendo que sea $\omega_3^3=a\,\omega^1+b\,\omega^2$, bastará tomar $\alpha=-a$, $\beta=-b$ para tener $\omega_3^{3*}=0$. Con esto queda bien determinado I_3 (*normal afín*).

Para I_1, I_2 queda todavía posible la transformación (2.13) con el ángulo arbitrario ϑ. En general es conveniente tomar ϑ de manera que I_1 coincida con una tangente de Darboux (Favard [6]), pero para nuestro objeto es preferible hacer que I_1, I_2 sean tangentes a las *líneas de curvatura afín*. Vamos a ver como ello es posible.

Las líneas de curvatura afín están determinadas por la condición de que a lo largo de ellas la normal afín describe superficies desarrollables. Poniendo $Z=X-\rho\, I_3$, se tiene

$$\begin{aligned} dZ &= dX-d\rho\, I_3-\rho\, d\, I_3 \\ &= (\omega^1-\rho\,\omega_3^1)\, I_1+(\omega^2-\rho\,\omega_3^2)\, I_2-d\rho\, I_3. \end{aligned}$$

La superficie $Z=X-\rho\, I_3$ será desarrollable si se puede determinar ρ de manera que dZ e I_3 tengan la misma dirección, o sea si se cumple

$$\omega^1\,\omega_3^2-\omega^2\,\omega_3^1=0.$$

Esta es la ecuación diferencial de las líneas de curvatura afín. Para que ellas sean las líneas coordenadas (tangentes a I_1, I_2), debe reducirse a $\omega^1 \omega^2 = 0$, o sea, suponiendo

$$\omega_3{}^1 = m\,\omega^1 + n\,\omega^2, \quad \omega_3{}^2 = r\,\omega^1 + s\,\omega^2$$

debe ser $r = n = 0$. Esto parecen dos condiciones, pero siendo $\omega_3{}^3 = 0$ equivalen a una sola. En efecto, se tiene

$$d\,\omega_3{}^3 = \omega_3{}^1 \wedge \omega^1 + \omega_3{}^2 \wedge \omega^2 = -(n-r)\,\omega^1 \wedge \omega^2 = 0$$

y por tanto $r = n$. Vamos a ver como podemos elegir ϑ de manera que sea $r = n = 0$.

Por un cambio de la forma

(2.14)
$$I_1{}^* = \operatorname{sen}\vartheta\, I_1 + \cos\vartheta\, I_2, \quad I_2{}^* = -\cos\vartheta\, I_1 + \operatorname{sen}\vartheta\, I_2, \quad I_3{}^* = I_3$$

se encuentra

$$\begin{aligned}\omega_3{}^{1*} &= (d\,I_3{}^*\, I_2{}^*\, I_3{}^*) = \cos\vartheta\,\omega_3{}^2 + \operatorname{sen}\vartheta\,\omega_3{}^1 \\ &= (r\cos\vartheta + m\operatorname{sen}\vartheta)\,\omega^1 + (s\cos\vartheta + n\operatorname{sen}\vartheta)\,\omega^2\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}\omega_3{}^{1*} &= m^*\,\omega^{1*} + n^*\,\omega^{2*} \\ &= (m^*\operatorname{sen}\vartheta - n^*\cos\vartheta)\,\omega^1 + (m^*\cos\vartheta + n^*\operatorname{sen}\vartheta)\,\omega^2.\end{aligned}$$

Por tanto se tiene el sistema

$$m^*\operatorname{sen}\vartheta - n^*\cos\vartheta = r\cos\vartheta + m\operatorname{sen}\vartheta$$

$$m^*\cos\vartheta + n^*\operatorname{sen}\vartheta = s\cos\vartheta + n\operatorname{sen}\vartheta$$

de donde

$$n^* = n\operatorname{sen}^2\vartheta - r\cos^2\vartheta + (s-m)\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta.$$

Para r se obtiene el mismo valor. Por tanto se tiene una sola ecuación en ϑ, la cual permite determinar este ángulo de manera que sea $r=n=0$. La ecuación en ϑ tiene las raíces reales puesto que, siendo $r=n$, es

$$(s-m)^2+4n^2 \geqq 0$$

y solo igual a cero si $s=m$, $n=0$ en cuyo caso la ecuación $n^*=0$ es una identidad y el punto un *umbilico afín* de la superficie.

Queda así el triedro completamente determinado. Pondremos

$$\omega_3{}^1=k\,\omega_1, \quad \omega_3{}^2=k'\,\omega_2$$

siendo k, k' dos invariantes llamados las *curvaturas principalas*. Para un umbilico ,es $k=k'$ (²).

Hemos obtenido, en definitiva, el triedro de Frenet, bien determinado en cada punto si no es un umbilico, y salvo la transformación (2. 14) para los umbilicos.

Las fórmulas (1. 3) se reducen a las siguientes *fórmulas de* Frenet, fundamentales para el estudio diferencial afín de las superficies:

$$\begin{aligned} dX &= \omega^1 I_1+\omega^2 I_2 \\ dI_1 &= \omega_1{}^1 I_1+\omega_1{}^2 I_2+\omega^1 I_3 \\ dI_2 &= \omega_2{}^1 I_1+\omega_2{}^2 I_2+\omega^2 I_3 \\ dI_3 &= k\,\omega^1 I_1+k'\,\omega^2 I_2. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Puesto que ω^1, ω^2 son independientes se puede poner

$$\begin{aligned} &\omega_1{}^2=\alpha\,\omega^1+\beta\,\omega^2, \quad \omega_2{}^1=\gamma\,\omega^1+\delta\,\omega^2 \\ &\omega_1{}^1=-\,\omega_2{}^2=p\,\omega^1+q\,\omega^2. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Los coeficientes de estas fórmulas, que son invariantes afi-

(²) En la notación de Blaschke [1, p. 159] los signos de k y k' aparecen cambiados.

nes, no son independientes. En efecto, teniendo en cuenta (2. 8) con $a=e=1$, se tiene

$$d(\omega_1{}^3-\omega^1)=\omega_1{}^1\wedge\omega_1{}^3+\omega_1{}^2\wedge\omega_2{}^3-\omega^1\wedge\omega_1{}^1-\omega^2\wedge\omega_2{}^1=0$$

$$d(\omega_3{}^2-\omega^2)=\omega_2{}^1\wedge\omega_1{}^3+\omega_2{}^2\wedge\omega_2{}^3-\omega^1\wedge\omega_1{}^2-\omega^2\wedge\omega_2{}^2=0$$

y de aquí, teniendo en cuenta (2. 16),

$$p=-\frac{1}{2}(\beta+\delta),\qquad q=\frac{1}{2}(\alpha+\gamma). \tag{2.17}$$

Obsérvese que con las notaciones (2. 16) se tiene

$$\begin{aligned} d\,\omega^1&=(q-\gamma)\,\omega^1\wedge\omega^2\\ d\,\omega^2&=(p+\beta)\,\omega^1\wedge\omega^2. \end{aligned} \tag{2.18}$$

3. - *Las condiciones de integrabilidad.* Las ecuaciones de estructura (1. 6), aplicadas al caso actual de las ecuaciones (2. 15) con las relaciones (2. 16), (2. 17) nos dan las *condiciones de integrabilidad* del sistema (2.15).

Definiendo las derivadas covariantes f_1, f_2 de una función $f(u, v)$ por la relación

$$df=f_1\,\omega^1+f_2\,\omega^2 \tag{3.1}$$

se encuentra inmediatamente que las condiciones de integrabilidad pueden escribirse

$$\begin{aligned} 2(q_1-p_2)&=\alpha_1+\gamma_1+\beta_2+\delta_2=3(\alpha\,\delta-\beta\,\gamma)\\ 2(\beta_1-\alpha_2)&=-3(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha\,\gamma+\beta\,\delta)+2\,k'\\ 2(\delta_1-\gamma_2)&=3(\delta^2+\gamma^2)+(\beta\,\delta+\alpha\,\gamma)-2\,k\\ k_2&=\gamma(k-k')\\ k_2'&=\beta(k-k'). \end{aligned} \tag{3.2}$$

4. - *Desarrollo canónico alrededor de un punto.* Tomemos el punto X de la superficie como origen de coordenadas. Las fór-

mulas (2.15) permiten hallar inmediatamente, por diferenciaciones sucesivas, el desarrollo

$$(4.1) \qquad X = dX + \frac{1}{2} d^2 X + \frac{1}{6} d^3 X + \dots$$

alrededor del origen. En efecto, diferenciando y aplicando las mismas fórmulas (2.15), se obtiene

$$(4.2) \qquad \begin{aligned} dX &= \omega^1 I_1 + \omega^2 I_2 \\ d^2X &= (d\omega^1 + \omega^1 \omega_1{}^1 + \omega^2 \omega_2{}^1) I_1 \\ &\quad + (d\omega^2 + \omega^1 \omega_1{}^2 + \omega^2 \omega_2{}^2) I_2 \\ &\quad + (\omega^1 \omega^1 + \omega^2 \omega^2) I_3 \\ d^3X &= (\dots) I_1 + (\dots) I_2 + [3 (\omega^1 d\omega^1 + \omega^2 d\omega^2) \\ &\quad + ((\omega^1)^3 - 3\omega^1 (\omega^2)^2) p - ((\omega^2)^3 - 3\omega^2 (\omega^1)^2) q] I_3 \end{aligned}$$

y así sucesivamente. En la última expresión los coeficientes de I_1, I_2 no se han escrito porque no van a interesar.

Si a la componente según I_3 la representamos por z y a las componentes según I_1, I_2 por x, y, en el origen será $\omega^1 = x$, $\omega^2 = y$, resultando el desarrollo canónico

$$(4.3) \qquad z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{6}[p(x^3 - 3xy^2) - q(y^3 - 3x^2 y)] + \dots$$

5. - *Formas diferenciales invariantes.* Cualquier combinación de ω^1, ω^2 será una forma diferencial invariante por afinidades unimodulares. Blaschke [1] llama *forma cuadrática fundamental* a

$$(5.1) \qquad \varphi = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2.$$

Según (2.6), la ecuación $\varphi = 0$ es la ecuación diferencial de las líneas asintóticas, imaginarias en nuestro caso, que hemos adaptado al caso de puntos elípticos.

Así como esta forma cuadrática es la componente según

I_3 de d^2X, es importante también considerar la componente de d^3X según el mismo eje. Salvo el sumando

$$3(\omega^1 d\omega^1 + \omega^2 d\omega^2) = \frac{3}{2} d\varphi,$$

esta componente es

$$\psi = p\,[(\omega^1)^3 - 3\,\omega^1(\omega^2)^2] - q\,[(\omega^2)^3 - 3\,\omega^2(\omega^1)^2] \tag{5.2}$$

que es la llamada *forma cúbica fundamental*. En cada punto, las direcciones dadas por $\psi = 0$ son las *tangentes de Darboux* de la superficie.

Puede ser instructivo expresar estas formas invariantes mediante la notación de Blaschke. Para ello, consideremos referida la superficie $X = X(u, v)$ a un sistema de coordenadas curvilíneas u, v cualquiera, respecto el cual sea

$$\omega^1 = a_1\,du + b_1\,dv, \qquad \omega^2 = a_2\,du + b_2\,dv. \tag{5.3}$$

De aquí

$$dX = \omega^1 I_1 + \omega^2 I_2 = (a_1 I_1 + a_2 I_2)\,du + (b_1 I_1 + b_2 I_2)\,dv \tag{5.4}$$

o sea

$$X_u = a_1 I_1 + a_2 I_2, \qquad X_v = b_1 I_1 + b_2 I_2. \tag{5.5}$$

Además, de (4.2) se deduce

$$\varphi = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = (I_1\, I_2\, d^2X). \tag{5.6}$$

Para sustituir en esta expresión I_1, I_2 por X_u, X_v, observemos que de (5.5) se deduce

$$X_u \wedge X_v = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, I_1 \wedge I_2 = D(I_1 \wedge I_2) \tag{5.7}$$

habiendo puesto $D = a_1 b_2 - a_2 b_1$.

De (5.5) y (5.3) se deduce

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (\ldots)\, I_1 + (\ldots)\, I_2 + (a_1^2 + a_2^2)\, I_3 \\ X_{uv} &= (\ldots)\, I_1 + (\ldots)\, I_2 + (a_1 b_1 + a_2 b_2)\, I_3 \\ X_{vv} &= (\ldots)\, I_1 + (\ldots)\, I_2 + (b_1^2 + b_2^2)\, I_3 \end{aligned} \tag{5.8}$$

de donde, poniendo según Blaschke

(5.9) $$L=(X_u X_v X_{uu}), \quad M=(X_u X_v X_{uv}), \quad N=(X_u X_v X_{vv})$$

resultan las relaciones

$$L=D(a_1^2+a_2^2), \quad M=D(a_1 b_1+a_2 b_2), \quad N=D(b_1^2+b_2^2)$$

y de aquí

(5.10) $$D^4=LN-M^2.$$

De (5.6), (5.7) y (5.10), resulta

(5.11) $$\varphi=\frac{(X_u X_v d^2X)}{D}=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{|LN-M^2|^{1/4}}$$

que es la forma adoptada por Blaschke [1, p. 104] para la forma cuadrática fundamental de la teoría afín de superficies.

Análogamente, de (5.2) y (5.8) se deduce

(5.12) $$\psi=(I_1 I_1 d^3X)-\frac{3}{2}\,d\varphi=\frac{(X_u X_v d^3X)}{|LN-M^2|^{1/4}}-\frac{3}{2}\,d\varphi$$

de acuerdo con Blaschke [1, p. 122].

6. - *Invariantes afines de una superficie.* Como es costumbre, pondremos

(6.1) $$\begin{aligned} d\Omega &= \omega^1 \wedge \omega^2 = \textit{elemento de área afín} \\ K &= k\,.\,k' = \textit{curvatura afín} \\ H &= \frac{1}{2}(k+k') = \textit{curvatura media afín}. \end{aligned}$$

Otros invariantes afines interesantes son:

a) La *distancia afín* de un punto Z al punto X de la superficie S se define [1, p. 110] por

(6.1) $$w(Z)=(X-Z, I_1, I_2)$$

o bien, si Z es el origen de coordenadas

(6.2) $$w=(X I_1 I_2).$$

El elemento de volumen, formado por la pirámide elemental de vértice el origen y base el paralelogramo engendrado por los vectores $\omega^1 I_1, \omega^2 I_2$, vale

$$dV = \frac{2}{6}(X I_1 I_2)\, \omega^1 \wedge \omega^2 = \frac{1}{3} w\, d\Omega \tag{6.3}$$

y, por consiguiente, el volumen limitado por una superficie cerrada S se expresa por la fórmula

$$V = \frac{1}{3}\int_S w\, d\Omega. \tag{6.4}$$

De (6.2), teniendo en cuenta (2.15) se deduce

$$dw = (X I_3 I_2)\, \omega^1 + (X I_1 I_3)\, \omega^2,$$

o sea, con la notación (3.1),

$$w_1 = (X I_3 I_2), \qquad w_2 = (X I_1 I_3). \tag{6.5}$$

De aquí se deduce que si I_3 pasa por el origen, $I_3 = \lambda X$, será $w_1 = w_2 = 0$, o sea: *la distancia afín de un punto a una superficie, toma un valor estacionario cuando el punto está sobre la normal afín (Blaschke, pág. 111).*

La diferencial absoluta y las derivadas parciales covariantes de un vector intrínseco (w_1, w_2) se definen por las ecuaciones

$$Dw_i = dw_i - w_1\, \omega_i^1 - w_2\, \omega_i^2 = w_{i1}\, \omega^1 + w_{i2}\, \omega^2 \quad (i = 1, 2). \tag{6.6}$$

En el caso (6.5), teniendo en cuenta (2.15), (2.16), (2.17) se obtiene

$$w_{11} = -1 + k\, w - (\alpha + \gamma)\, w_2 - 2\, p\, w_1$$
$$w_{22} = -1 + k' w + 2\, q\, w_2 - (\beta + \delta)\, w_1$$

de donde se deduce la relación importante

$$\Delta w = w_{11} + w_{22} = 2(-1 + H\, w) \tag{6.7}$$

donde en el primer miembro Δw significa el laplaciano de w (**Blaschke** [1, p. 214]).

b) La *curvatura de Gauss* G de la métrica cuya forma fundamental sea $ds=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2$, será otro invariante afín. Para hallarlo basta aplicar la fórmula conocida para G [2, p, 47]:

$$G=-\frac{1}{\omega^1\wedge\omega^2}\,d\left[\frac{d\omega^1}{\omega^1\wedge\omega^2}\,\omega^1+\frac{d\omega^2}{\omega^1\wedge\omega^2}\,\omega^2\right]$$

que en el caso actual, según (2. 18), queda

$$G=-\frac{1}{\omega^1\wedge\omega^2}\,d\left[(q-\gamma)\,\omega^1+(p+\beta)\,\omega^2\right].$$

Teniendo en cuenta las relaciones (2. 17) y las conddiciones de integrabilidad, se obtiene fácilmente

$$G=-H+2\,(p^2+q^2). \tag{6.8}$$

Siguiendo a Blaschke se puede poner

$$-2(p^2+q^2)=J=\textit{invariante de Pick} \tag{6.9}$$

con lo cual queda la relación

$$H=J-G. \tag{6.10}$$

7. - *Relaciones entre invariantes afines y métricos.* a) El elemento de área afín, en función de los coeficientes L, M, N definidos en (5. 9), según (5. 3) y (5. 10), se expresa

$$d\Omega=\omega^1\wedge\omega^2=D\,du\wedge dv=|L\,N-M^2|^{1/4}\,du\wedge dv. \tag{7.1}$$

b) Con las notaciones (5. 9), la curvatura de Gauss K_m de la superficie $X=X(u,v)$ está dada por

$$K_m=\frac{LN-M^2}{(EG-F^2)^2}\quad\text{con}\quad EG-F^2=(X_u\wedge X_v)^2, \tag{7.2}$$

y por tanto el elemento de área afín se relaciona con el elemento de área métrico $d\sigma = (EG - F)^{1/2}\, du \wedge dv$ por

$$(7.3) \qquad d\Omega = K_m{}^{1/4}\, d\sigma.$$

c) Para la distancia afín del origen a un punto de la superficie tenemos

$$w = (X\, I_1\, I_2) = \frac{(X\, X_u\, X_v)}{D} = \frac{(X\, X_u\, X_v)}{|K_m|^{1/4}(EG-F^2)^{1/2}}.$$

Llamando N al versor normal métrico, o sea,

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|} = \frac{X_u \wedge X_v}{(EG-F^2)^{1/2}}$$

resulta

$$(7.4) \qquad w = \frac{X.N}{|K_m|^{1/4}}.$$

El producto escalar $X.N$ es la distancia métrica p del origen al plano tangente en el punto considerado. Por tanto entre la distancia afín w del origen a un punto de la superficie y la distancia métrica al plano tangente correspondiente, existe la relación

$$(7.5) \qquad p = |K_m|^{1/4}\, w.$$

d) Como generalización de la expresión (6.3) del volumen V cabe considerar los invariantes afines

$$(7.6) \qquad J_n = \int_S w^n\, d\Omega$$

que mediante los invariantes métricos anteriores se expresan

$$(7.7) \qquad J_n = \int_S p^n |K_m|^{(1-n)/4}\, d\sigma.$$

En particular J_0 es el área afín y J_1 el triple del volumen. En general J_n es un invariante de la superficie S y del origen de coordenadas desde el cual se consideran las dsitancias afines w o las distancias métricas p. Para tener invariantes afines propiamente dichos basta referir la distancia afín a un punto ligado a S de manera invariante por afinidades, por ejemplo el centro de gravedad del volumen limitado por S, supuesto cubierto con masa homogénea.

Los J_n de superficies convexas cerradas cumplen ciertas desigualdades. Por ejemplo $J_0^2 \leqq 4\pi J_1$ (igualdad para el elipsoide, Blaschke [1, p. 198]; $J_{-3} J_1 \leqq 16\pi^2$ [12] para el caso de tener S centro de simetría y estar J_{-3} referido al mismo. Sería interesante estudiar otras desigualdades de este tipo, aparte de las triviales como $J_n^2 \leqq J_{2n} J_0$ (desigualdad de Schwarz).

8. - *Fórmulas integrales.* Vamos a aplicar los resultados anteriores a la obtención de ciertas fórmulas integrales, algunas de las cuales han sido obtenidas por K. P. Grotemeyer [7, 8, 9] siguiendo un método diferente.

Sea C una curva cerrada sobre la superficie S, que limite un área simplemente conexa F. Vamos a considerar diferentes casos de la fórmula de Stokes, según la cual la integral de una forma diferencial lineal sobre C es igual a la integral de la derivada exterior sobre F.

a) La fórmula de Stokes da

$$(8.1) \qquad \int_C (X I_3 dX) = \int_F (dX I_3 dX) + \int_F (X dI_3 dX)$$

donde los productos entre las diferenciales del segundo miembro son productos exteriores.

Según (2.15), (6.1) y (6.2) se obtiene

$$(8.2) \qquad \int_C (X I_3 dX) = -2\Omega + 2\int_F H w\, d\Omega$$

donde Ω es el área afín de F.

Si $H=0$ (superficie mínima afín), resulta la fórmula conocida [1, p. 182]

$$\Omega=\frac{1}{2}\int_C (I_3\, X\, d\, X). \tag{8.3}$$

Para una superficie S orientable y cerrada, descomponiéndola en partes simplemente conexas y sumando las igualdades (8.2) para cada una de ellas, resulta

$$\Omega=\int_S H\, w\, d\Omega \tag{8.4}$$

que es análoga a una fórmula bien conocida del caso métrico.

Si H_m, H_M son los valores mínimo y máximo de H y S es una superficie convexa, tomando el origen en el interior de S, será $w\geqq 0$ y por tanto, de (8.4) y (6.4) se deduce

$$3\, H_m\, V\leqq\Omega\leqq 3\, H_M\, V \tag{8.5}$$

donde la primera desigualdad es debida a Berwald [1, p. 207]. Las igualdades valen únicamente si $H=$ constante, es decir, si S es un elipsoide.

b) La fórmula de Stokes da también

$$\int_C (X\, I_3\, d\, I_3)=\int_F (d\, X\, I_3\, d\, I_3)+\int_F (X\, I_3\, d\, I_3)$$

o sea, teniendo en cuenta (2.15) y (6.1),

$$\int_C (X\, I_3\, d\, I_3)=-2\int_F H\, d\Omega+2\int_F K\, w\, d\Omega. \tag{8.6}$$

Para una superficie orientable y cerrada S, poniendo

$$M=\int_S H\, d\Omega=\textit{integral de curvatura media afín}$$

de (8. 6) se deduce

$$M = \int_S K\, w\, d\Omega. \tag{8.7}$$

Si K_1 y K_2 son los valores mínimo y máximo de K sobre la superficie convexa S, resulta de aquí y (6. 4),

$$3\, K_1 V \leqq M \leqq 3\, K_2 V. \tag{8.8}$$

Las igualdades valen únicamente si K es constante, o sea, suponiendo $K > 0$, solamente si S es un elipsoide.

c) Otras fórmulas integrales se obtienen considerando el vector

$$Y = I_1 \wedge I_2 \tag{8.9}$$

que juega un papel importante en la teoría afín de superficies.

Siendo $Y \,.\, X = (X\, I_1\, I_2) = w$, la expresión métrica del vector Y, según (7. 4), es

$$Y = \frac{N}{|K_m|^{1/4}} \tag{8.10}$$

siendo N el versor normal métrico y K_m la curvatura de Gauss métrica (7. 2).

De (8. 9) se deduce

$$d\,Y = \omega^1 (I_3 \wedge I_2) + \omega^2 (I_1 \wedge I_3)$$

o sea

$$Y_1 = I_3 \wedge I_2, \qquad Y_2 = I_1 \wedge I_3. \tag{8.11}$$

De aquí, recordando la fórmula general

$$(A \wedge B) \wedge (C \wedge D) = (A\, B\, D)\, C - (A\, B\, C)\, D$$

resulta

$$Y_1 \wedge Y_2 = I_3.$$

Además, verificando el producto de (8. 9) y (8. 11),

$$Y \wedge Y_1 = -I_2, \qquad Y \wedge Y_2 = I_1$$

es decir, la primera ecuación (2. 15), se puede escribir

$$dX = (Y \wedge Y_2)\,\omega^1 + (Y_1 \wedge Y)\,\omega^2 \tag{8.12}$$

que permite expresar X como integral de una función de Y y sus derivadas covariantes (fórmula de Lelieuvre, [1, p. 140]).

La fórmula de Stokes da

$$\int_C X \wedge dX = \int_F dX \wedge dX = 2\int_F Y\,d\Omega$$

y por consiguiente, sobre una superficie orientable y cerrada S, vale

$$\int_S Y\,d\Omega = 0. \tag{8.13}$$

Análogamente se tiene

$$\int_C I_3 \wedge dX = \int_F dI_3 \wedge dX = 2\int_F H\,Y\,d\Omega.$$

En el caso de una superficie mínima afín ($H = 0$), se tiene el resultado conocido [1, p. 182],

$$\int_S I_3 \wedge dX = 0. \tag{8.14}$$

y sobre una superficie orientable y cerrada

$$\int_S H\,Y\,d\Omega = 0. \tag{8.15}$$

Finalmente, se tiene también

$$\int_C I_3 \wedge dI_3 = \int_F dI_3 \wedge dI_3 = 2\int_F K\,Y\,d\Omega$$

y por consiguiente, sobre una superficie orientable y cerrada

$$\int_S K\,Y\,d\Omega = 0. \tag{8.16}$$

9. - *Generalización de las fórmulas* (8. 2) y (8. 6).

a) De una manera más general, podemos también aplicar la fórmula de Stokes a la forma diferencial $w^n(X\,I_3\,d\,X)$. Teniendo en cuenta (6. 5), resulta

$$\int_C w^n(X\,I_3\,d\,X) = 2\int_F (-1+H\,w)\,w^n\,d\,\Omega + n\int_F w^{n-1}(w_1{}^2+w_2{}^2)\,d\,\Omega$$

y para una superficie S orientable y cerrada

$$2\int_S (-1+H\,w)\,w^n\,d\,\Omega + n\int_S w^{n-1}(w_1{}^2+w_2{}^2)\,d\,\Omega. \tag{9.1}$$

Para $n=1$, teniendo en cuenta (6. 4), resulta

$$\int_S H\,w^2\,d\,\Omega = 3\,V - \frac{1}{2}\int_S (w_1{}^2+w_2{}^2)\,d\,\Omega. \tag{9.2}$$

Aplicando la desigualdad de Schwarz a (8. 4), se obtiene

$$\Omega^2 \leqq \int_S H\,d\,\Omega \,.\int_S H\,w^2\,d\,\Omega = M\left(3\,V - \frac{1}{2}\int_S (w_1{}^2+w_2{}^2)\,d\,\Omega\right) \tag{9.3}$$

donde la igualdad vale solamente si $w=$ constante, es decir, si S es un elipsoide [1, p. 213]. Si S es convexa, w_1, w_2 son reales y se puede enunciar:

Para toda superficie convexa y cerrada S se cumple la desigualdad

$$\Omega^2 \leqq 3\,M\,V \tag{9.4}$$

donde la igualdad vale únicamente para el elipsodie.

b) La fórmula de Stokes, aplicada a la forma diferencial $w^n(X I_3 d I_3)$ da

$$\int_C w^n(X I_3 d I_3) = 2 \int_F w^n(-H + K w)\, d\Omega +$$

$$n \int_F w^{n-1}(k' w_1^2 + k w_2^2)\, d\Omega$$

y para una superficie S orientable y cerrada

$$2 \int_S w^n(-H + K w)\, d\Omega + n \int_S w^{n-1}(k' w_1^2 + k w_2^2)\, d\Omega = 0 \tag{9.5}$$

De (9.1) y (9.5) se deduce

$$2 \int_S (K w^2 - 1)\, w^{n-1}\, d\Omega + n \int_S w^{n-1}(k' w_1^2 + k w_2^2)\, d\Omega$$

$$+ (n-1) \int_S w^{n-2}(w_1^2 + w_2^2)\, d\Omega = 0. \tag{9.6}$$

10. - *Algunas características del elipsoide.* Las fórmulas precedentes pueden servir para demostrar de manera simple algunas propiedades características del elipsoide, siguiendo un camino análogo al de Grotemeyer [7].

a) *Si una superficie convexa y cerrada S tiene su curvatura media afín constante, es un elipsoide* [Blaschke, 1, p. 204].

En efecto, en este caso, de (8.7) y (8.4) se deduce

$$H \Omega = \int_S K w\, d\Omega = H^2 \int_S w\, d\Omega$$

de donde

$$\int_S (k - k')^2\, w\, d\Omega = 0. \tag{10.1}$$

Si S es convexa, se puede tomar el origen en el interior de S, con lo cual w tendrá un signo constante y por tanto $k=k'$. De un teorema de Blaschke [1, p. 216], se deduce entonces que S es un elipsoide (la única esfera afín que es convexa).

b) *Si una superficie convexa y cerrada S tiene su curvatura afín K constante y positiva, es un elipsoide.* [Blaschke, 1, p. 248].

Puesto que k, k' son del mismo signo, se pueden suponer positivas y por tanto se puede poner

$$H=\frac{1}{2}(\sqrt{k}-\sqrt{k'})^2+\sqrt{K}, \tag{10.2}$$

con lo cual (8.7) nos da

$$\frac{1}{2}\int_S(\sqrt{k}-\sqrt{k'})^2 d\Omega+\sqrt{K}\,\Omega=K\int_S w\,d\Omega.$$

De aquí y de (8.4), teniendo en cuenta (10.2), resulta

$$\frac{1}{2}\int_S(\sqrt{k}-\sqrt{k'})^2(1+\sqrt{K}\,w)\,d\Omega=0.$$

Siendo S convexa, se puede suponer $w>0$ y por tanto resulta $k=k'$, o sea S es un elipsoide.

c) *Si para una superficie convexa y cerrada S se cumple la relación $H=a/w$ ($a=$ constante), la superficie es un elipsoide.* (Grotemeyer [8]).

En efecto (8.4) nos dice que $a=1$ y (9.1) nos da $w=$ constante. Estamos, pues, en el caso a).

Un poco más general es el teorema siguiente:

d) *Si para una superficie convexa y cerrada S se cumple la relación $H\geqq 1/w$ (ó $H\leqq 1/w$), la superficie es un elipsoide.*

En efecto, según (6.7), se tiene $\Delta w\geqq 0$ sobre toda la superficie S. Un lema de Bochner-Hopf [3, p. 30] nos dice entonces que $\Delta w=0$, o sea $H=1/w$ y estamos de nuevo en el caso c). Lo mismo si se supone $H\leqq 1/w$.

e) *Si para una superficie convexa y cerrada S se cum-*

ple la relación $K = 1/w^2$, *la superficie es un elipsoide.* (Grotemeyer[8]).

En efecto, escribiendo (9.6) para $n = 1$ y teniendo en cuenta que k, k' son del mismo signo y que w_1, w_2 son reales, se encuentra $w =$ constante y caemos de nuevo en el caso b).

f) *Si para una superficie convexa y cerrada* S *se cumplen las relaciones* $H = K w, K > 0$, *la superficie es un elipsoide.*

En efecto, de (9.5) se deduce $w =$ constante y por tanto, según (6.7), será también $H =$ constante, cayendo de nuevo en el caso a).

Durante los últimos años, Chern[5], Hopf[10], [11] y Grotemeyer[7], [8], [9] han considerado el problema de determinar las superficies cerradas cuyas curvaturas principales métricas cumplen determinadas relaciones. El mismo tipo de problemas se presenta en la geometría diferencial afín y sería interesante considerarlos.

Por ejemplo, en las demostraciones dadas de los teoremas anteriores ha sido siempre necesario imponer a la superficie S la condición de convexidad, pero no es seguro que esta condición sea efectivamente necesaria.

BIBLIOGRAFIA

[1] W. Blaschke, *Differentialgeometrie II*, Berlín, 1924.
[2] W. Blaschke, *Einführung die Differentialgeometrie*, Berlin, 1950.
[3] S. Bochner - K. Yano, *Curvature and Betti numbers*, Princeton, 1953.
[4] E. Cartan, *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle*, Paris, 1937.
[5] S. S. Chern, Duke Math. J. vol. 12, 1945, p. 279-290.
[6] J. Favard, *Cours de Géometrie Differentielle locale*, Paris, 1957.
[7] K. P. Grotemeyer, Archiv. der Math. vol. 3, 1952, págs. 38-43.
[8] K. P. Grotemeyer, Archiv. der Math. vol. 3, 1952, págs. 307-310.
[9] K. P. Grotemeyer, Archiv. der Math. vol. 4, 1953, págs. 230-233.
[10] H. Hopf, Math. Nachrichten, vol. 4, 1950-51, págs. 232-249.
[11] H. Hopf, *Convegno internazionale di Geometria Differenziale*, Roma, 1954, págs. 45 - 53.
[12] L. A. Santaló, Portugaliae Math. vol. 8, 1949, págs. 155-161.
[13] L. A. Santaló, *Segundo Symposium de Matemáticas*, Villavicencio, Mendoza, 1954, págs. 21-33.

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES.