

## DOS PROPIEDADES CARACTERISTICAS DE LOS CÍRCULOS SOBRE LA SUPERFICIE ESFERICA

POR

L. A. SANTALÓ

1. *Introducción.* - J. W. Green en un trabajo reciente <sup>(1)</sup> ha estudiado las figuras convexas del plano que gozan de la propiedad de ser vistas desde los puntos de una circunferencia fija bajo un ángulo constante  $\alpha$ . Aparte el caso trivial de los círculos concéntricos con la circunferencia dada, existe el ejemplo clásico de la elipse de semiejes  $a, b$  que es vista desde los puntos de la circunferencia concéntrica y de radio  $(a^2 + b^2)^{1/2}$  según el ángulo constante  $\alpha = \pi/2$ . Según demuestra Green las elipses no son las únicas figuras convexas que poseen esta propiedad, sino que existen figuras convexas para cuálquier valor de  $\alpha$  que sea de la forma  $(m/n)\pi$ , siendo  $m$  y  $n$  números enteros ( $m < n$ ), primos entre sí y con  $m$  impar. Para otros valores de  $\alpha$  es fácil ver que tales figuras no existen (excepto el caso trivial ya mencionado de los círculos concéntricos con la circunferencia dada) <sup>(2)</sup>.

Como ya observamos e hicimos aplicación en otros lugares <sup>(3)</sup>, dado un problema referente a figuras convexas del pla-

(1) J. W. GREEN, *Sets subtending a constant angle on a circle*, Duke Mathematical Journal, vol. 17, 1950.

(2) Es curioso observar que las elipses no son las únicas figuras convexas correspondientes al caso  $\alpha = \pi/2$ ; es decir, existen otras figuras convexas que también son vistas desde los puntos de una circunferencia bajo el ángulo  $\pi/2$ . Ver W. BLASCHKE, *Ueber eine Ellipseneigenschaft und ueber gewisse konvexe Kurven*, Arch. Math. Phys. vol. 26, 1917, pp. 115-118.

(3) L. A. SANTALÓ, *Propiedades de las figuras convexas sobre la esfera*, Mathematicae Notae, vol. 4, 1944, *Convex regions on the n-dimensional spherical surface*, Annals of Mathematics, vol. 47, 1946.

no, resulta casi siempre interesante estudiar el mismo para figuras convexas de la superficie esférica (que podemos suponer de radio unidad). Dada la «dualidad» existente entre las figuras de la superficie esférica, tendremos de esta manera para cada problema su «dual»; los problemas sobre figuras convexas vendrán agrupados en pares y muchas veces bastará resolver uno de ellos para tener demostrado, por «dualidad», su correspondiente.

En esta nota, como nueva aplicación del método, vamos a estudiar el mencionado problema de *Green* para figuras convexas esféricas, encontrando el resultado curioso de que sobre la esfera no existen tales figuras convexas (excepto los círculos). El resultado a que llegamos es:

**Teorema 1 (directo).** *Sobre la superficie de la esfera las únicas figuras convexas que son vistas desde los puntos de un círculo fijo  $C$  bajo un ángulo constante, son los círculos concéntricos e interiores a  $C$ .*

Sin necesidad de demostración se tiene entonces el siguiente

**Teorema 2 (dual).** *Sobre la superficie esférica las únicas figuras convexas para las cuales existe una longitud  $\lambda$  tal que las cuerdas de longitud  $\lambda$  sean todas tangentes a un círculo fijo  $C$ , son los círculos concéntricos y exteriores a  $C$ .*

Se tienen, pues, dos propiedades características de los círculos esféricos.

Al pasar al plano como caso límite de una esfera cuyo radio tiende a infinito, el teorema directo deja de ser cierto, apareciendo las figuras convexas estudiadas por *Green*. En cambio el teorema dual, como veremos, conserva su validez. Es decir, vale también

**Teorema 3.** *Las únicas figuras convexas del plano para las cuales existe un segmento  $\lambda$  tal que las cuerdas de longitud  $\lambda$  son todas tangentes a un círculo fijo  $C$ , son los círculos concéntricos y exteriores a  $C$ .*

Vamos a dar la demostración de estos tres teoremas.

**2. Demostración del Teorema 1.** — Sea  $C$  el círculo dado y  $K$  la figura convexa, interior a  $C$ , que suponemos vista desde los puntos de  $C$  bajo el ángulo constante  $\alpha$  (fig. 1; la figura

$K$  no está dibujada). Sea  $O$  el centro de  $C$ . Supongamos los puntos de  $C$  dados por un parámetro  $t$  (ángulo alrededor de  $O$ ) y consideremos uno de ellos  $A_0(t)$ . Sean  $A_0E_0$  y  $A_0E_1$  los

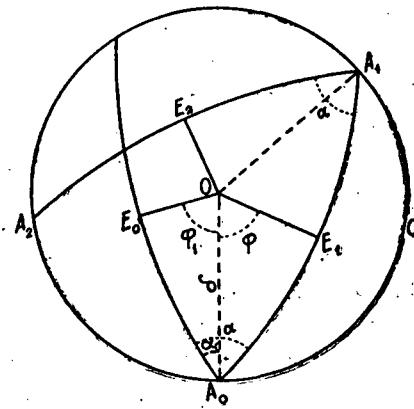


Fig. 1

círculos máximos de apoyo de  $K$  trazados desde  $A_0$  y sean  $OE_0$  y  $OE_1$  las normales a estos círculos máximos desde  $O$ . El segundo círculo de apoyo de  $K$  trazado por  $A_1$  sea  $A_1A_2$  y  $OE_2$  su normal desde  $O$ . En el triángulo isosceles  $OA_0A_1$  es

$$\text{áng } OA_0E_1 = \text{áng } OA_1E_1$$

y por tanto, por diferencia de ángulos iguales,

$$\text{áng } OA_0E_0 = \text{áng } OA_1E_2.$$

De aquí se deduce que los triángulos rectángulos  $OE_0A_0$  y  $OA_1E_2$  son iguales y por tanto

$$OE_0 = OE_2, \quad \text{áng } E_0OE_1 = \text{áng } E_1OE_2.$$

Prosiguiendo sucesivamente, trazando los sucesivos círculos máximos de apoyo de  $K$ , se tiene

$$OE_0 = OE_2 = OE_4 = \dots = r(t)$$

$$\text{áng } E_0OE_1 = \text{áng } E_1OE_2 = \dots = \varphi(t).$$

Resulta por tanto que  $OE_0 = r(t)$  admite el período  $2\varphi$ , o sea  $r(t) = r(t + 2\varphi)$ . De aquí se deduce que la razón  $\varphi/\pi$  debe ser un número racional, pues en caso contrario los puntos  $E_0, E_2, E_4, \dots$  cubrirían densamente el círculo de radio  $r(t)$  y  $K$  debería coincidir con este círculo. Pero si  $\varphi(t)$  solo puede tomar valores de la forma  $(m/n)\pi$  ( $m, n$  enteros), siendo función continua de  $t$ , debe ser constante.

Si  $\varphi$  es constante, en el cuadrilátero esférico  $OE_0 A_0 E_1$  son constantes los cuatro ángulos y además la diagonal  $OA_0$ . Con los mismos ángulos y una misma diagonal, sólo existen un número finito de cuadriláteros posibles (ver la Nota al final, N.º 4). Por tanto, por razones de continuidad, se deduce que todos los cuadriláteros análogos, obtenidos a partir de otro punto distinto de  $A_0$  serán congruentes. Es decir,  $OE_0$  es independiente de  $t$ , o sea, es constante. Por consiguiente  $K$  debe coincidir con el círculo de radio  $OE_0$ . Queda así demostrado el teorema.

Del teorema 2 no hace falta dar la demostración: se deduce por «dualidad» del teorema 1.

3. *Demostración del teorema 3.* — Si queremos pasar al plano como caso límite de una esfera cuyo radio tiende a infinito, se observa que el teorema 1 puede dejar de ser válido, por haber apoyado la demostración en el hecho de que *un cuadrilátero esférico queda determinado por sus ángulos y una diagonal*, proposición que no es cierta para los cuadriláteros planos: No debe por tanto extrañar que el resultado no sea válido para el plano.

En cambio el teorema dual sigue valiendo para el plano. Basta observar que el teorema que fallaba en el caso directo, en el caso dual se transforma en el siguiente: *un cuadrilátero esférico está determinado por sus cuatro lados y el ángulo que forman dos lados opuestos*. Como este teorema vale también para cuadriláteros planos, el teorema 2 valdrá también para el plano, lo cual es el teorema 3.

Si no se quiere pasar a través de las figuras esféricas, se puede dar una simple demostración directa del teorema 3.

Sea  $C$  el círculo al cual se suponen tangentes las cuerdas de longitud  $\lambda$  de la figura convexa  $K$  (fig. 2; la figura  $K$  no es-

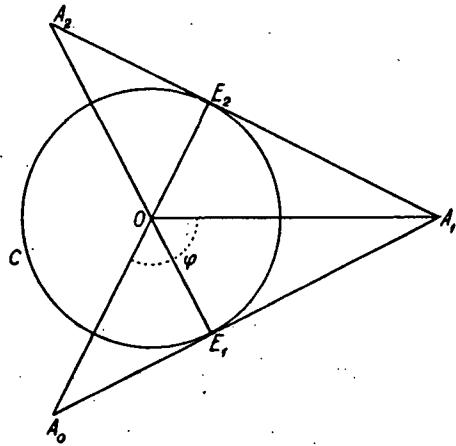


Fig. 2

tá dibujada). Partamos de un punto  $E_1$  de  $C$ , determinado por el valor del ángulo  $t$  alrededor de  $O$ . Queda así determinada la sucesión  $A_0, A_1, A_2, \dots$ . Por simetría respecto  $OA_1, OA_0, \dots$  es

$$OA_0 = OA_2 = OA_4 = \dots = r(t)$$

y también

$$\text{áng } A_0OA_1 = \text{áng } A_1OA_2 = \dots = \varphi(t).$$

Para que los puntos  $A_0, A_2, A_4, \dots$  no cubran densamente el círculo de radio  $OA_0$ , debe ser  $\varphi(t)$  racional respecto de  $\pi$  y como es función continua de  $t$  debe ser constante. Si  $\varphi$  es constante, en el triángulo  $A_0OA_1$  serán constantes la base  $A_0A_1 = \lambda$ , la altura  $OE_1$  y el ángulo  $\varphi$ ; luego también serán constantes los segmentos  $E_1A_0$  y  $E_1A_1$ . Pero si estos segmentos son constantes los puntos  $A_i$  estarán sobre circunferencias concéntricas con  $C$  lo cual prueba el enunciado del teorema 3.

4. NOTA. En el nº 2 hemos utilizado el teorema de trigonometría esférica que afirma que dados los cuatro ángulos y una diagonal solo existen un número finito de cuadriláteros posibles. De este teorema nos basta el caso en que los ángulos opuestos a la diagonal dada son rectos, puesto que en el cuadrilátero  $OE_0A_0E_1$  (fig. 1) son rectos los ángulos  $E_0$  y  $E_1$ . En este caso es fácil ver que el número de cuadriláteros posibles es igual a dos. Vamos a dar rápidamente la demostración de este hecho elemental.

Llamemos  $\delta$  a la diagonal conocida  $OA_0$  de la fig. 1 y  $\alpha_1, \varphi_1$  a los ángulos que ella forma con los lados  $A_0E_0$  y  $OE_0$  respectivamente. En el triángulo esférico rectángulo  $OE_0A_0$  se tiene

$$\cos \delta = \cot \alpha_1 \cot \varphi_1 \quad (1)$$

y análogamente en el triángulo  $OE_1A_0$

$$\cos \delta = \cot (\alpha - \alpha_1) \cot (\varphi - \varphi_1). \quad (2)$$

Poniendo  $\cot \alpha_1 = x, \cot \varphi_1 = y$ , el sistema (1), (2) se puede escribir

$$xy = \cos \delta$$

$$(\cos \delta \cot \varphi + \cot \alpha) x + (\cos \delta \cot \alpha + \cot \varphi) y + \sin^2 \delta = 0$$

que admite dos soluciones, las cuales resuelven el problema.

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICOMATEMÁTICAS —  
LA PLATA;