UN NUEVO INVARIANTE AFIN PARA LAS FIGURAS CONVEXAS DEL PLANO Y DEL ESPACIO

POR

L. A. SANTALÓ

1. *Introducción.* a) Sea Q una figura convexa del plano y $\Delta = \Delta(\varphi)$ la anchura de la misma correspondiente a la dirección φ, o sea, la distancia entre las dos rectas de apoyo de Q paralelas a la dirección φ. Vamos a demostrar que la integral

$$J = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\Delta^2} \tag{1.1}$$

es un invariante de Q por afinidades unimodulares.

Este invariante forma parte de un conjunto de invariantes afines J_m cuya expresión es la (3.4). El caso considerado es el J_2 y parece el más importante de todos por no figurar en su expresión la curvatura del contorno de Q.

Siendo F el área de Q, demostraremos luego las desigualdades

$$1 < JF \leqq \pi^2/4 \tag{1.2}$$

donde la segunda desigualdad es la mejor posible, puesto que el signo igual vale para elipses y únicamente para ellas. En cambio la primera desigualdad es poco fuerte; posiblemente se pueda sustituir por

$$\frac{3}{2} \leqq JF \tag{1.3}$$

con el signo de igualdad válido para los triángulos. Sería interesante encontrar una demostración para esta acotación más precisa.

b) Para el espacio ordinario, las cosas se presentan de manera análoga. Dado un cuerpo convexo Q e indicando por $\Delta(\omega)$ a la anchura del mismo correspondiente a los planos de apoyo normales a la dirección ω, la integral

$$(1.4) \qquad J = \int_{\frac{1}{2}E} \frac{d\omega}{\Delta^3}$$

es invariante por afinidades unimodulares. En ella, $d\omega$ representa el elemento de área sobre la esfera de radio unidad correspondiente a la dirección ω y la integración está extendida a la mitad de esa esfera.

Siendo V el volumen de Q, las desigualdades análogas a las (1.2) son ahora

$$(1.5) \qquad \frac{1}{3} < J\,V \leqq \pi^2/3$$

de las cuales la segunda no se puede mejorar, pues el signo igual vale para los elipsoides y solo para ellos. En cambio la primera probablemente se pueda sustituir por $3/2 \leqq J\,V$, con la igualdad válida para los tetraedros, pero esto queda como problema pendiente.

También en este caso J pertenece a una familia de invariantes afines J_m definitos por (6.2), siendo J el único de ellos que no depende de la curvatura de la superficie que limita Q.

c) No entraremos en detalles acerca de la generalización al espacio de n dimensiones. Mencionaremos únicamente que el invariante afín es, en este caso,

$$(1.6) \qquad J = \int_{\frac{1}{2}E} \frac{d\omega}{\Delta^n}$$

y las desigualdades análogas a las (1.2), (1.5) son

$$(1.7) \qquad \frac{2^{n-1}}{n!\,(n-1)!} < J\,V \leqq \frac{O_n{}^2}{2^{n+1}n}$$

siendo O_n el área de la esfera unidad del espacio, o sea,

$$O_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}. \tag{1.8}$$

También en este caso general la segunda desigualdad es la mejor posible, mientras que la primera debe poderse mejorar.

d) Para cuerpos convexos con centro de simetría, el invariante J es un múltiplo de otro invariante afín análogo que introdujimos en otra ocasión [4], [5]. En cambio, para cuerpos convexos sin centro de simetría, los dos invariantes, aunque de forma análoga, son independientes.

I. CASO DEL PLANO

2. *El invariante J.* Sean dos rectas paralelas

$$a x + b y + h = 0, \qquad a x + b y + h_1 = 0 \tag{2.1}$$

cuya distancia, en valor absoluto, es

$$\Delta = \frac{|h - h_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{2.2}$$

y el ángulo que forman con la parte positiva del eje x, es

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{a}{b}\right) \tag{2.3}$$

y por tanto

$$d\varphi = \frac{a\,db - b\,da}{a^2 + b^2}. \tag{2.4}$$

Consideremos una afinidad unimodular cualquiera; sus ecuaciones serán de la forma

$$x = p x' + q y' + u, \qquad y = r x' + s y' + v \tag{2.5}$$

con

$$p s - q r = 1. \tag{2.6}$$

Por esta afinidad las rectas (2.1) se transforman en

$$(a\,p+b\,r)\,x'+(a\,q+b\,s)\,y'+a\,u+b\,v+h\;=0$$

$$(a\,p+b\,r)\,x'+(a\,q+b\,s)\,y'+a\,u+b\,v+h_1=0$$

y por tanto la distancia Δ' entre ellas será

(2.7) $$\Delta'=\frac{|h-h_1|}{\sqrt{(ap+br)^2+(aq+bs)^2}}$$

y el ángulo que forman con el eje x',

$$\varphi'=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{ap+br}{aq+bs}\right)$$

de donde, suponiendo la afinidad fija, o sea, p, q, r, s constantes, y teniendo en cuenta (2.6) se obtiene

(2.8) $$d\,\varphi'=\frac{b\,da-a\,db}{(ap+br)^2+(aq+bs)^2}\,.$$

De (2.2), (2.4), (2,7) y (2.8) se deduce $\Delta^{-2}\,d\varphi=\Delta'^{-2}\,d\varphi'$. Es decir, *la expresión* $\Delta^{-2}\,d\varphi$ *es un invariante diferencial por afinidades unimodulares;* además, este invariante es el único de la forma $\Delta^m\,d\varphi$. En lo sucesivo diremos, simplemente, que es un invariante afín, sobrentendiendo que se trata siempre de afinidades unimodulares.

Sea ahora Q una figura convexa y $\Delta=\Delta(\varphi)$ su anchura correspondiente a la dirección φ. El resultado anterior permite enunciar el siguiente

Teorema 1. *Si* $\Delta=\Delta(\varphi)$ *es la anchura de una curva convexa* Q, *la integral*

(2.9) $$J=\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\Delta^2}$$

es un invariante de Q *por afinidades unimodulares.*

Para ciertas figuras particulares, el valor de J se calcula fácilmente de manera directa. Por ejemplo, siendo en cada caso F el área de la figura, se tiene:

a) *Triángulo*. Es

$$J = \frac{3}{2F}. \tag{2.10}$$

b) *Elipse*. Es

$$J = \frac{\pi^2}{4F}. \tag{2.11}$$

c) *Polígono regular de n lados*:

$$\begin{aligned} &n \text{ impar}, \quad J = \frac{n^2}{F} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{n} \\ &n \text{ par}, \quad J = \frac{n^2}{4F} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Por ejemplo, para el cuadrado y por tanto para cualquier paralelogramo $(n=4)$ es

$$J = \frac{2}{F}. \tag{2.13}$$

3. *Otros invariantes afines*. Supongamos ahora que el contorno de Q, que indicaremos con la misma letra puesto que ello no puede originar confusión, tenga curvatura continua en cada punto. Entonces se sabe que el llamado *elemento de arco afín*

$$d\lambda = \varkappa^{1/3}\, ds \tag{3.1}$$

donde ds es el elemento de arco métrico y $\varkappa$ la curvatura, es un invariante diferencial afín.

Por otra parte, según hemos visto, $\Delta^{-2} \varkappa\, ds$ es también invariante afín. En consecuencia, la raíz cuadrada del cociente de ambas expresiones,

$$\frac{\varkappa^{1/3}}{\Delta} \tag{3.2}$$

será un invariante afín definido en cada punto de la curva convexa Q, donde $\varkappa$ es la curvatura en el punto y Δ la anchura correspondiente a la dirección de la tangente en el mismo.

En forma de integral resultan así los invariantes afines

$$(3.3) \qquad J_m = \int_Q \left(\frac{\varkappa^{1/3}}{\Delta}\right)^m d\lambda$$

o sea, en forma métrica

$$(3.4) \qquad J_m = \int_0^{2\pi} \frac{\varkappa^{\frac{m-2}{3}}}{\Delta^m}\, d\varphi = \int_Q \frac{\varkappa^{\frac{m+1}{3}}}{\Delta^m}\, ds,$$

donde m es una constante cualquiera. En particular, para $m=2$ resulta, salvo un factor 2, el invariante (2.9) antes obtenido.

Para $m=-1$, llamando $h=h(\varphi)$ a la función de apoyo de Q desde un punto interior, y poniendo $h_1=h(\varphi)$, $h_2=h(\varphi+\pi)$, es

$$J_{-1} = \int_Q \Delta\, ds = \int_Q (h_1+h_2)\, ds_1 = 2(F+F_{01})$$

siendo F_{01} el área mixta de Minkowski entre Q y su simétrica respecto un punto.

4. *Desigualdades*. En un trabajo anterior [4], introdujimos otro invariante afín, a saber

$$(4.1) \qquad I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^2}$$

siendo $h=h(\varphi)$ la función de apoyo respecto cierto punto interior (aquél para el cual la integral del segundo miembro de (4.1) tomaba el valor mínimo, punto que coincide con el centro de simetría, si este existe). Demostrábamos allí la desigualdad

$$(4.2) \qquad I F \leqq \pi^2$$

siendo F el área de Q y valiendo la igualdad únicamente para el caso de las elipses.

El paso de I a J es inmediato si Q tiene centro de simetría, pues entonces

$$J = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\Delta^2} = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{4h^2} = \frac{1}{4} I. \tag{4.3}$$

Si Q no tiene centro de simetría, observemos la relación general, válida para $x > 0$, $y > 0$ cualesquiera,

$$\frac{1}{8x^2} + \frac{1}{8y^2} - \frac{1}{(x+y)^2} = \frac{(x^2-y^2)^2 + 2xy(x-y)^2}{8x^2y^2(x+y)^2} \geqq 0 \tag{4.4}$$

donde el signo de igualdad vale únicamente si $x = y$.

Por consiguiente se tiene

$$2J = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\Delta^2} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(h_1+h_2)^2} \leqq \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\varphi}{h_1{}^2} + \frac{d\varphi}{h_2{}^2} \right) = \frac{1}{2} I \tag{4.5}$$

o sea $J \leqq I/4$, valiendo el signo igual únicamente si Q tiene centro de simetría.

En consecuencia, de (4.2) se deduce

$$J F \leqq \frac{\pi^2}{4} \tag{4.6}$$

donde el signo de igualdad vale únicamente para las elipses.

Busquemos ahora una acotación inferior del producto JF.

Recordemos para ello que entre el área F y el área P del paralelógramo mínimo que contiene a Q existe la relación

$$P \leqq 2F \tag{4.7}$$

donde el signo de igualdad vale únicamente para el triángulo.

Por otra parte, puesto que el paralelógramo contiene a Q, si Δ_P es la anchura del mismo, aplicando (2.13) resulta

$$J = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\Delta^2} \geqq \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\Delta_P{}^2} = \frac{2}{P} \geqq \frac{1}{F}.$$

Obsérvese que en la primera desigualdad solamente vale el signo igual si Q es un paralelógramo y en la segunda si es un triángulo. Por tanto no puede valer simultáneamente las dos veces, resultando siempre

$$JF > 1.$$

En resumen queda demostrado el siguiente:

Teorema 2. *Entre el invariante J y el área F de una figura convexa plana existen las desigualdades*

$$1 < JF \leqq \frac{\pi^2}{4} \tag{4.8}$$

donde en la segunda acotación vale el signo de igualdad para las elipses y únicamente para ellas.

II. CASO DEL ESPACIO

5. *El invariante J.* Las ecuaciones de dos planos paralelos pueden siempre ponerse en la forma

$$\sum_1^3 \alpha^i x_i + h_1 = 0, \quad \sum_1^3 \alpha^i x_i + h_2 = 0 \tag{5.1}$$

con

$$(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2 + (\alpha^3)^2 = 1. \tag{5.2}$$

La distancia entre ellos es entonces

$$\Delta = |h_1 - h_2|. \tag{5.3}$$

La dirección normal es la del versor α de componentes $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ y el elemento área correspondiente sobre la esfera de radio unidad está dado por cualquiera de las expresiones

$$d\omega = \frac{d\alpha^1 \wedge d\alpha^2}{\alpha^3} = \frac{d\alpha^2 \wedge d\alpha^3}{\alpha^1} = \frac{d\alpha^3 \wedge d\alpha^1}{\alpha^2} \tag{5.4}$$

o bien, teniendo en cuenta (5.2)

$$d\omega = \alpha^3 \, d\alpha^1 \wedge d\alpha^2 + \alpha^1 \, d\alpha^2 \wedge d\alpha^3 + \alpha^2 \, d\alpha^3 \wedge d\alpha^1. \tag{5.5}$$

El signo $\wedge$ indica producto exterior de diferenciales.

Queremos ver como se transforman Δ y $d\omega$ por una afinidad unimodular

$$x_i = a_i\, x_1' + b_i\, x_2' + c_i\, x_3' + m_i \qquad (i=1,2,3). \tag{5.6}$$

Los planos (5.1) se transforman en

$$(a\,\alpha)\, x_1' + (b\,\alpha)\, x_2' + (c\,\alpha)\, x_3' + (m\,\alpha) + h_i = 0, \quad (i=1,2) \tag{5.7}$$

y por tanto

$$\Delta' = \frac{|h_1 - h_2|}{\rho} = \frac{\Delta}{\rho} \tag{5.8}$$

poniendo para abreviar

$$\rho^2 = (a\,\alpha)^2 + (b\,\alpha)^2 + (c\,\alpha)^2 \tag{5.9}$$

e indicando $(a\,\alpha)$, $(b\,\alpha)$, $(c\,\alpha)$, $(m\,\alpha)$ los productos escalares del versor α por los vectores de componentes a_i, b_i, c_i, m_i respectivamente.

Los cosenos directores de la normal común a los planos paralelos (5.7) son

$$(\alpha^1)' = \frac{(a\alpha)}{\rho}, \quad (\alpha^2)' = \frac{(b\alpha)}{\rho}, \quad (\alpha^3)' = \frac{(c\alpha)}{\rho}.$$

De aquí

$$d(\alpha^1)' = \frac{(a d\alpha)}{\rho} - \frac{(a\alpha)}{\rho^2}\, d\rho$$

$$d(\alpha^2)' = \frac{(b d\alpha)}{\rho} - \frac{(b\alpha)}{\rho^2}\, d\rho$$

$$d\rho = \frac{1}{\rho}\left[(a\,\alpha)\,(a\,d\,\alpha) + (b\,\alpha)\,(b\,d\,\alpha) + (c\,\alpha)\,(c\,d\,\alpha)\right]$$

y en consecuencia

$$\frac{d(\alpha^1)' \wedge d(\alpha^2)'}{(\alpha^3)'} = \frac{1}{\rho^3} \left[(c\,\alpha)\,(a\,d\,\alpha) \wedge (b\,d\,\alpha) \right.$$

$$+ (b\,\alpha)\,(c\,d\,\alpha) \wedge (a\,d\,\alpha) + (a\,\alpha)\,(b\,d\,\alpha) \wedge \left.(c\,d\,\alpha)\right]$$

$$= \frac{1}{\rho^3} \left[\alpha^3\, d\,\alpha^1 \wedge d\,\alpha^2 + \alpha^2 d\,\alpha^3 \wedge d\,\alpha^1 + \alpha^1 d\,\alpha^2 \wedge d\,\alpha^3 \right].$$

Es decir,

$$d\omega' = \frac{d\omega}{\rho^3}. \tag{5.10}$$

De aquí y de (5.8) se deduce

$$\frac{d\omega}{\Delta^3} = \frac{d\omega'}{\Delta'^3} \tag{5.11}$$

es decir, la expresión $\Delta^{-3}\, d\omega$ es un invariante afín (se entiende siempre por afinidades unimodulares).

Si Q es un cuerpo convexo y $\Delta(\omega)$ es su anchura correspondiente a la dirección ω, se tiene

Teorema 3. *Si $\Delta(\omega)$ es la anchura de un cuerpo convexo Q del espacio, correspondiente a la dirección ω, la integral*

$$J = \int \frac{d\omega}{\Delta^3} \tag{5.12}$$

es un invariante de Q por afinidades unimodulares.

La integral está extendida a la semiesfera unidad.

Vamos a calcular el valor de J para unos casos particulares.

Elipsoide. El cálculo es inmediato, pues basta hacerlo para una esfera de igual volumen. Representando este por V, resulta

$$J = \frac{\pi^2}{3V}. \tag{5.13}$$

Tetraedro. Bastará suponer el caso del tetraedro regular. Consideremos el caso de arista a igual a la unidad. Salvo un conjunto de posiciones de medida nula, los planos de apoyo paralelos que lo contienen tienen sus puntos de apoyo en los extremos de una misma arista. Sean A, B dos vértices. Las direcciones, que vamos a suponer trazadas a partir de A, que son normales a planos de apoyo que pasan por A y B llenan el triedro formado por la normal a la cara opuesta a A y las normales a las aristas, distintas de AB, que concurren en A y están situadas en el plano que dichas aristas determinan con AB. La parte de la integral J que corresponde a la arista AB es el volumen del tetraedro determinado por las tres normales dichas por A y el plano normal a AB por B, multiplicado por 3. La altura de este tetraedro es la arista $AB=1$. En cuanto a la base es un triángulo isósceles cuya área se calcula fácilmente que vale $(3/2)\operatorname{sen}\alpha+\sqrt{(3/2)}\operatorname{sen}(\alpha/2)$ siendo α el ángulo entre dos caras del tetraedro regular y por tanto $\cos\alpha=1/3$. Por tanto, el volumen de dicho tetraedro resulta $1/\sqrt{2}$. Es decir, el valor con que contribuyen los planos de apoyo paralelos que pasan respectivamente por los extremos de una misma arista AB, es $3/\sqrt{2}$ y puesto que hay 6 aristas, el valor de J será $18/\sqrt{2}$.

Como el volumen del tetraedro regular de arista unidad vale $V=1/6\sqrt{2}$, resulta que *para cualquier tetraedro de volumen* V, es

$$J=\frac{3}{2V}. \tag{5.14}$$

Exaedro. Consideremos ahora un exaedro o cubo cuya diagonal mida la unidad. Excepto posiciones de medida nula, los pares de planos paralelos que encierran el cubo, se apoyan en los extremos de una diagonal. Sea AB una de estas diagonales. La parte de la integral J que corresponde a los planos paralelos que se apoyan respectivamente en A y B, es igual al triple del volumen del tetraedro determinado por las tres aristas que parten de A y el plano normal a AB por B. La base de este tetraedro es un triángulo cuya área vale $3\sqrt{3}/2$; su volumen será $\sqrt{3}/2$ y por tanto $J=6\sqrt{3}$. Por otra parte, si la diagonal del cubo vale la unidad, su volumen V vale $V=1/3\sqrt{3}$.

Por consiguiente, *para cualquier paralelepípedo de volumen* V es

$$J=\frac{2}{V}. \tag{5.15}$$

6. *Otros invariantes afines.* Si K es la curvatura de Gauss de la superficie del cuerpo convexo Q y $d\sigma$ es el elemento de área métrica, se sabe que

$$(6.1) \qquad d\Omega = K^{1/4} d\sigma$$

es un invariante diferencial afín (*elemento de área afín*). Introduciendo el elemento de área $d\omega$ de la esfera de radio unidad correspondiente a la dirección de la normal en el punto considerado, siendo $d\omega = K\,d\sigma$, resulta $d\Omega = K^{-3/4} d\omega$. De aquí y de (5.11), se obtiene que el cociente $(K^{1/4}/\Delta)^3$ será un invariante afín.

En consecuencia, elevando a la potencia $m/3$, multiplicando por $d\Omega$ e integrando a toda la superficie de Q, resulta que las expresiones

$$(6.2) \qquad J_m = \int_Q \frac{K^{\frac{m+1}{4}}}{\Delta^m} d\sigma = 2 \int_{\frac{1}{2}E} \frac{K^{\frac{m-3}{4}}}{\Delta^m} d\omega$$

la última de las cuales está extendida a la semiesfera unidad, *son invariantes afines para todo valor constante de m.* El invariante (5.12) es $J_3/2$.

7. *Desigualdades.* Dejando la demostración para el caso de n dimensiones que trataremos a continuación, para $n = 3$ vale el siguiente

Teorema 4. *Entre el invariante J y el volumen V de un cuerpo convexo del espacio, existen las desigualdades*

$$(7.1) \qquad \frac{1}{3} < J\,V \leqq \frac{1}{3}\pi^2$$

de las cuales la segunda no se puede mejorar, por valer en ella el signo de igualdad para los elipsoides y solo para ellos.

Sería interesante demostrar, lo que parece ser cierto, que la primera puede sustituirse por $3/2 \leqq J\,V$, con el signo de igualdad válido para los tetraedros.

Sería también interesante obtener otras desigualdades entre los invariantes afines J_m, para distintos valores de m.

III. CASO DEL ESPACIO DE n DIMENSIONES

8. No vamos a entrar en detalles acerca del mismo. Una demostración análoga a la del caso $n=3$, prueba que el invariante afín (5.12) toma la forma

$$J=\int_{\frac{1}{2}E}\frac{d\omega}{\Delta^n}.$$

con la integración extendida a la semiesfera unidad del espacio n dimensional.

Para encontrar una acotación del producto JV ($V=$volumen) exactamente el mismo método detallado en el caso del plano, reduce el problema a la acotación del producto IV, siendo I el invariante generalización del (4.1) introducido por nosotros en otro lugar [5]. Se obtiene así $JV \leqq O_n^2/2^{n+1}n$, con el signo de igualdad válido únicamente para los elipsoides. El valor de O_n es el (1.8).

Para tener una acotación inferior, recordemos que entre el volumen P del paralelepípedo mínimo que contiene al cuerpo convexo Q y el volumen de Q existe la acotación

$$P \leqq n!\,V. \tag{8.1}$$

(Ver, Macbeath [3]). Por otra parte, llamando Δ_P a la anchura de dicho paralelepípedo, es

$$J=\int_{\frac{1}{2}E}\frac{d\omega}{\Delta^n} \geqq \int_{\frac{1}{2}E}\frac{d\omega}{\Delta_P^{\,n}}. \tag{8.2}$$

Para calcular la última integral, o sea el valor de J para un paralelepípedo del espacio de n dimensiones, basta limitarse al caso de un cubo n-dimensional. Se calcula entonces fácilmente, (Ver Bambah [2]) que

$$\int_{\frac{1}{2}E}\frac{d\omega}{\Delta_P^{\,n}}=\frac{2^{n-1}}{(n-1)!\,P}. \tag{8.3}$$

Por tanto, de (8. 1) y (8. 2) se deduce que

$$JV > 2^{n-1}/(n-1)!n!,$$

con el signo de igualdad eliminado por no poder valer simultáneamente en (8. 2) y (8. 3).

En definitiva resulta

$$\frac{2^{n-1}}{(n-1)!n!} < JV \leqq \frac{O_n^2}{2^{n+1}n}$$

desigualdad que comprende a las (4. 8) y (7. 1) para $n=2$ y $n=3$ respectivamente.

BIBLIOGRAFIA

[1] W. BLASCHKE, *Vorl. über Differentialgeometrie II*, Springer, Berlin, 1923.

[2] R. P. BAMBAH, *Polar reciprocal convex bodies*, Proc. Cambridge Phyl. Soc. vol. 51, 1955, págs. 377-378.

[3] A. M. MACBEATH, *Canadian J. of Mathematics*, vol. 3, 1951, págs. 54-61.

[4] L. A. SANTALÓ, *Un invariante afín para las curvas convexas del plano*, Mathematicae Notae, vol. 8, 1949, págs. 103-111.

[5] L. A. SANTALÓ, *Un invariante afín para los cuerpos convexos del espacio de n dimensiones*, Portugaliae Mathematica, vol. 8, 1949, págs. 155-161.

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES.