SOLUCION A LA CUESTION N°. 8

La cuestión N°. 8, propuesta en el Año III, pág. 122, decía:

Sea un triángulo ABC y E, F, G tres puntos situados respectivamente sobre los lados AB, AC, BC. Entre todas las homografías planas que tienen como puntos unidos los vértices A, B, C y transforman en si mismo el interior del triángulo, determinar la que transforma el triángulo EFG en otro de área máxima y calcular esta área.

Solución. Sea L el punto en que la recta determinada por E, F corta al lado BC. Pongamos, para abreviar

$$(B\,C\,G\,L) = -k \tag{1}$$

habiendo puesto el signo menos para que k, dato del problema, sea positivo. Se observa que si en lugar de considerar la recta EF se hubiera considerado la GE y se indicase con M el punto en que corta a la prolongación de AC (no dibujado en la figura).

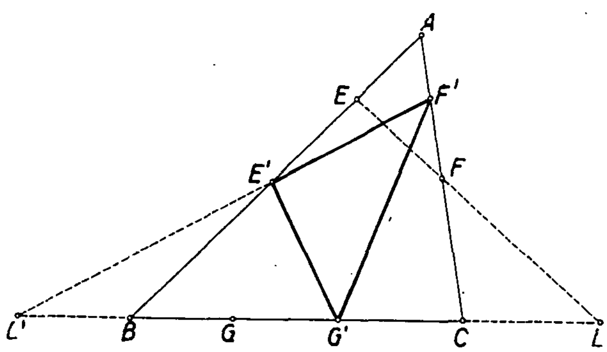

Fig. 1.

sería también $(C\,A\,F\,M) = -k$; en efecto, proyectando la cuaterna $(B\,C\,G\,L)$ desde E sobre AC se obtiene $(A\,C\,M\,F)$, que es igual a $(C\,A\,F\,M)$ y por tanto, puesto que las razones anarmónicas se conservan por proyección es $(C\,A\,F\,M) = (B\,C\,G\,L) = -k$. Lo mismo si se considerase la cuaterna formada por A, B, E y el punto en que FG corta a AB.

Una homografía que cumpla las condiciones del problema queda determinada, dando sobre los segmentos AB y AC los puntos E' y F' respectivamente homólogos de E y F. Estos puntos son, pues, las incógnitas del problema, que hay que determinar por la condición de que el área del triángulo $E'F'G'$ sea máxima.

El punto G' queda determinado si se conocen E' y F', puesto que, llamando L' al punto en que la recta $E'F'$ corta a BC, debe ser (puesto que B, C son puntos unidos de la homografía)

$$(B\,C\,G'\,L') = (B\,C\,G\,L) = -k$$

o sea

$$\frac{G'B}{G'C} = -k\,\frac{L'B}{L'C} \tag{2}$$

condición que determina G'.

El teorema de Menelao aplicado al triángulo ABC cortado por la transversal $E'F'$ da

$$\frac{L'B}{L'C}\cdot\frac{F'C}{F'A}\cdot\frac{E'A}{E'B} = 1. \tag{3}$$

De (2) y (3) se deduce

$$\frac{G'B}{G'C}\cdot\frac{F'C}{F'A}\cdot\frac{E'A}{E'B} = -k. \tag{4}$$

Para operar únicamente con segmentos positivos, pongamos

$$BG' = -G'B = m,\quad CF' = -F'C = n,\quad AE' = -E'A = p \tag{5}$$

y también, como es costumbre,

$$BC = a, \qquad CA = b, \qquad AB = c; \tag{6}$$

m, n, p, a, b, c son todos números positivos.

Con estas notaciones, la expresión (4) se puede escribir

$$m\,n\,p - k(a-m)\,(b-n)\,(c-p) = 0. \tag{7}$$

Llamando T al área del triángulo ABC, el área del triángulo $E'F'G'$ vale

$$\tau = T - \frac{1}{2}[p(b-n)\operatorname{sen} A + m(c-p)\operatorname{sen} B + n(a-m)\operatorname{sen} C]. \quad (8)$$

El problema se reduce a buscar el máximo de τ, considerada como función de las variables m, n, p las cuales están ligadas por la relación (7). Podemos seguir el método clásico llamado de los multiplicadores de Lagrange (*), que da como condiciones necesarias para que τ sea máximo o mínimo que las derivadas parciales de la expresión

$$\varphi = \tau + \lambda[m\,n\,p - k(a-m)(b-n)(c-p)]$$

sean nulas, o sea,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial m} = -\frac{1}{2}(c-p)\operatorname{sen} B + \qquad (9)$$
$$+\frac{1}{2}n\operatorname{sen} C + \lambda[np + k(b-n)(c-p)] = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{1}{2}(a-m)\operatorname{sen} C +$$
$$+\frac{1}{2}p\operatorname{sen} A + \lambda[mp + k(a-m)(c-p)] = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p} = -\frac{1}{2}(b-n)\operatorname{sen} A +$$
$$+\frac{1}{2}m\operatorname{sen} B + \lambda[mn + k(a-m)(b-n)] = 0.$$

Teniendo en cuenta (7) estas condiciones se escriben

$$-(c-p)\operatorname{sen} B + n\operatorname{sen} C + 2\lambda\frac{anp}{a-m} = 0$$

$$-(a-m)\operatorname{sen} C + p\operatorname{sen} A + 2\lambda\frac{bmp}{b-n} = 0 \qquad (10)$$

$$-(b-n)\operatorname{sen} A + m\operatorname{sen} B + 2\lambda\frac{cmn}{c-p} = 0.$$

(*) Ver por ej. B. Levi. *Analisi Matematica algebrica ed infinitesimale*, Bologna, 1937, pág. 463.

Dividiendo estas ecuaciones por abc y poniendo

$$\frac{m}{a}=x,\quad \frac{n}{b}=y,\quad \frac{p}{c}=z,$$
$$\frac{\operatorname{sen} A}{a}=\frac{\operatorname{sen} B}{b}=\frac{\operatorname{sen} C}{c}=\rho,\quad \frac{2\lambda}{\rho}=\alpha, \tag{11}$$

el sistema (10), junto con la ecuación (7) se escriben

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) && y(1-x)-(1-x)(1-z)+\alpha yz=0\\
&(\mathrm{II}) && z(1-y)-(1-y)(1-x)+\alpha zx=0\\
&(\mathrm{III}) && x(1-z)-(1-z)(1-y)+\alpha xy=0\\
&(\mathrm{IV}) && xyz-k(1-x)(1-y)(1-z)=0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Entre las soluciones de este sistema, con las incógnitas x, y, z, α, deben encontrarse las que resuelven el problema.

Con las notaciones (11) y según (8), el área del triángulo $E'F'G'$ se escribe

$$\tau=T-\frac{1}{2}abc\rho\,[z(1-y)+x(1-z)+y(1-x)]. \tag{13}$$

En el sistema (12) se observa que la hipótesis $x=1$ (y análogamente las $y=1$, $z=1$) lleva consigo, por la (IV), $y=0$ o $z=0$. Pero $x=1$, $y=0$ o $z=0$, dan en (13) $\tau=T-\frac{1}{2}bc\operatorname{sen} A=0$ o sea corresponden a un *mínimo* de τ.

Podemos por tanto suponer $x\neq 0, 1$ y por simetría $y\neq 0, 1$, $z\neq 0, 1$. Entonces, multiplicando la ecuación (I) de (12) por x y dividiendo por $1-x$ queda, aplicando (IV),

$$xy-x(1-z)+k\alpha(1-y)(1-z)=0\,.$$

Teniendo en cuenta (III) esta ecuación equivale a

$$(\alpha k-1)(1-z)+(\alpha^2k+1)y=0, \tag{14}$$

que es lineal en y, z. Procediendo análogamente se obtienen otras dos ecuaciones que son iguales a la (14) por permutación circular de las x, y, z, o sea,

$$\begin{aligned}(\alpha k-1)(1-x)+(\alpha^2 k+1)z&=0\\(\alpha k-1)(1-y)+(\alpha^2 k+1)x&=0.\end{aligned} \tag{15}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones lineales (14), (15) respecto x, y, z por la regla de Cramer, se observa que resulta $x=y=z$ y por tanto la ecuación (IV) de (12) da

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^3=k$$

de donde

$$x=\frac{\sqrt[3]{k}}{1+\sqrt[3]{k}}. \tag{16}$$

Este es el valor de x que resuelve el problema. Es decir, la homografía que, cumpliendo las condiciones del enunciado, transforma el triángulo EFG en otro de área máxima, es la determinada por los puntos E', F', G' tales que

$$\frac{BG'}{BC}=\frac{CF'}{CA}=\frac{AE'}{AB}=\frac{\sqrt[3]{k}}{1+\sqrt[3]{k}}. \tag{17}$$

El hecho de que al valor de x dado por (16) corresponde efectivamente un *máximo* del área de $E'F'G'$ se deduce observando que, puesto que el área de los triángulos $E'F'G'$ no puede superar a la del triángulo total ABC, un máximo existe ciertamente, el cual, por tanto, debe corresponder a una solución del sistema (12); pero para las demás soluciones hemos visto que el área es cero.

El área máxima del triángulo transformado valdrá, según (13),

$$\tau=T-\frac{3}{2}\,a\,b\,c\,\rho\,x\,(1-x)=T\left[1-3\frac{\sqrt[3]{k}}{\left(1+\sqrt[3]{k}\right)^2}\right]. \tag{18}$$

Observemos que cualquiera que sea el valor positivo ξ se verifica

$$\frac{\xi}{(1+\xi)^2} \leqq \frac{1}{4}. \tag{19}$$

puesto que esta desigualdad equivale a $(\xi-1)^2 \geqq 0$ y por tanto en (19) el signo de igualdad vale únicamente para $\xi=1$.

Por tanto de (18) se deduce

$$\tau \geqq \frac{1}{4} T,$$

es decir: *Cualquiera que sea el triángulo EFG, siempre existe una homografía, en las condiciones del enunciado del problema, que lo transforma en otro de área igual o mayor que $T/4$, siendo T el área del triángulo ABC.*

El mínimo de estos máximos valdrá $1/4\,T$, el cual corresponde al caso de valer en (19) el signo de igualdad, o sea, al caso de ser $k=1$; según el significado (1) de k, esto quiere decir que las rectas AG, BF, CE son concurrentes. En tal caso, todos los triángulos $E'F'G'$ transformados, cualquiera que sea la homografía, gozan de la misma propiedad de que las rectas AG', BF', CE' son concurrentes y el triángulo de área máxima será el formado uniendo los pies de las medianas, cuyo área es efectivamente $1/4\,T$.

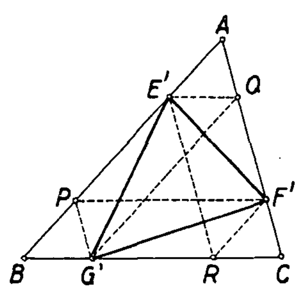

Fig. 2.

Se observa que la solución $x=y=z$, dado el significado (11) y (5) de x, y, z, tiene la siguiente interpretación geométrica (fig. 2):

Siendo $x=BG' : BC$, trazando por G' la paralela al lado AC hasta que corte en P al lado BA, será $BP : BA = BG' : BC = x$. Por otra parte, trazando por F' la paralela a BC hasta cortar al lado AB, el punto P_1 de intersección debe ser tal que $BP_1 : BA = CF' : CA = y$. Por tanto, si $x=y$, debe ser $P \equiv P_1$. Esto significa que si $E'F'G'$ es un triángulo solución, las rectas trazadas por cada dos vértices paralelamente al lado del triángulo

ABC que contiene al otro, concurren sobre el tercer lado del triángulo ABC.

De otra manera: *Los vértices E', F', G' del triángulo transformado de área máxima son vértices no consecutivos de un hexágono de Pascal (E', Q, G', P, F', R) inscrito en el triángulo dado ABC y cuyo eje es la recta del infinito.*

Además, con las notaciones de la fig. 2, tomemos un sisteme de ejes oblicuos cuyo origen sea B y los ejes ξ, η los lados BC y BA respectivamente. Las coordenadas del baricentro de un triángulo cualquiera se obtienen tomando la media aritmética de las coordenadas homólogas de sus vértices. Por tanto las coordenadas del baricentro del triángulo ABC de vértices $A(0,c)$, $B(0,0)$, $C(a,0)$ son

$$\xi = \frac{a}{3}, \quad \eta = \frac{c}{3}. \tag{19}$$

Para hallar las coordenadas del baricentro del triángulo transformado de área máxima $E'F'G'$, observemos que por ser los triángulos BPG' y $RF'C$ iguales, es $BG' = RC$ y de la misma manera $BP = E'A$. Por consiguiente las coordenadas de F' son $\xi_1 = BR = a - RC = a - BG'$, $\eta_1 = BP$; las de E' son $\xi_2 = 0$. $\eta_2 = c - BP$ y las de G' son $\xi_3 = BG'$, $\eta_3 = 0$. Luego las coordenadas del baricentro del triángulo $E'F'G'$ serán

$$\xi = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{3} = \frac{a}{3}, \qquad \eta = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3}{3} = \frac{c}{3}$$

o sea, las mismas del triángulo ABC.

Por tanto: *El triángulo transformado de área máxima tiene el mismo centro de gravedad que el triángulo ABC.*

Esto viene a ser la generalización al caso del plano, del resultado obtenido para el problema análogo considerado sobre la recta (Ver *Mathematicae Notae*, Año Tercero, pág. 107, Ejercicio N°. 16).

Luis A. Santaló

ROSARIO, INSTITUTO DE MATEMÁTICA.