UNAS GENERALIZACIONES DEL TEOREMA DE LOS CUATRO VERTICES

POR

L. A. SANTALÓ

1. *Introducción.* - Se llaman vértices de una curva plana los puntos en los cuales es nula la derivada de la curvatura, o bien, lo que es lo mismo, los puntos en los cuales el círculo osculador tiene con la curva un contacto de orden superior al segundo.

Para las curvas convexas del plano con curvatura derivable en cada punto, vale el famoso «teorema de los 4 vértices», a saber: *toda curva cerrada y convexa del plano tiene por lo menos 4 vértices* (1).

Una de las demostraciones más elegantes de este teorema es la de Herglotz, contenida en la *Differentialgeometrie* de Blaschke (Vol. I, pág. 31). Ella se presta a generalizar, en cierta manera, el teorema de los 4 vértices a curvas del espacio y a la geometría diferencial afin, como ha sido puesto de manifiesto por Süss (2).

En una dirección análoga la generalización puede llevarse todavía más lejos. El problema se plantea de la siguiente manera:

Sea C una curva cerrada, plana o del espacio, cuyo arco indicaremos con s y cuya longitud total sea L. Sea $\varkappa = \varkappa(s)$ la curvatura de C, que supondremos siempre admite las derivadas que hagan falta; $\varkappa(s)$ es una función periódica de período

(1) Sobre este teorema y diversas generalizaciones del mismo, existe abundante bibliografía. Ver, por ej. BONNESEN-FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Berlín, 1934, pág. 145.

(2) Ver W. SÜSS, *Ein Vierscheitelsatz bei geschlossenen Raumkurven*, Tohoku Math. Journal, 29, pág. 359-362, 1928, y *Affine Differentialgeometrie von Kurvenpaaren im Raum*, Arch. der Math. vol. 3, pág. 137-141, 1952.

L. El problema de hallar los vértices de C consiste en hallar los puntos en los cuales es $\varkappa'(s)=0$ y el teorema de los 4 vértices forma parte de un estudio general que consistiría en hallar el número mínimo de vértices de la curva C dadas ciertas condiciones para la misma (convexidad, curvatura total, número de nudos,...).

Pero, en vez de $\varkappa(s)$, podemos considerar otras funciones más generales $F(s)$, también periódicas y de período L, y preguntar, para determinados tipos de curvas cerradas, cuál es el mínimo número de puntos en los cuales es $F'(s)=0$.

El problema así planteado presenta en general excesiva dificultad [3]. En este trabajo nos proponemos, más simplemente, *hallar ciertos tipos de funciones $F(s)$ para las cuales el método de Herglotz permite deducir un mínimo para el número de puntos en los cuales es $F'(s)=0$.*

Estas funciones $F(s)$ se pueden expresar en función del arco ordinario o arco métrico s, pero consideraremos también el caso de que sean funciones del arco afín o del arco proyectivo, con lo cual su expresión resulta más simple y, además, vinculada con los invariantes afines o proyectivos de la curva. Distinguiremos también los casos del plano y del espacio.

2. *Curvas planas y funciones del arco métrico.* - Sea C una curva plana, cerrada y convexa sin puntos dobles. Si $x_1=x_1(s)$, $x_2=x_2(s)$ son las ecuaciones paramétricas de C en función del arco s, los vectores unitarios tangente y normal serán, respectivamente $T(x'_1, x'_2)$ y $N(-x'_2, x'_1)$. Las fórmulas de Frenet para curvas planas toman la forma

$$(2.1) \qquad T'=\varkappa N, \qquad N'=-\varkappa T$$

o sea, pasando de los vectores a sus componentes,

$$(2.2) \qquad x_1''=-\varkappa x_2', \qquad x_2''=\varkappa x_1'.$$

Sentado esto, recordemos el método de Herglotz para demostrar el teorema de los cuatro vértices. Por ser C cerrada,

(3) Ya el caso particular del número de vértices de una curva cerrada del espacio que forme un nudo de tipo topológico dado, no parece ser conocido (Ver BLASCHKE, *Einführung in die Differentialgeometrie*, Berlin 1950, pág. 19).

la función $\varkappa(s)$ tiene por lo menos un máximo y un mínimo absolutos, a los cuales corresponden dos puntos A, B de la curva, que serán dos vértices de la misma, en los cuales la derivada $\varkappa'$ cambia de signo. Sea $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 = 0$ la ecuación de la recta que une A con B. Pongamos en esta ecuación $x_1 = x_1(s)$, $x_2 = x_2(s)$ y consideremos la integral curvilínea

$$I = \int (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3)\, \varkappa'\, ds$$

extendida a lo largo de C. Esta integral es nula, por serlo cada uno de los tres sumandos que la componen; en efecto, para el primer sumando se tiene, integrando por partes y luego aplicando (2.2),

$$(2.3) \qquad a_1 \int_C x_1 \varkappa'\, ds = - a_1 \int_C \varkappa\, x_1'\, ds = - a_1 \int_C x_2''\, ds = 0.$$

Lo mismo se procede para el segundo sumando y, para el tercero, su anulación es inmediata. Como la recta $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 = 0$ divide a C en dos arcos situados respectivamente en los dos semiplanos en que la recta divide al plano, la expresión $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3$ tendrá signos constantes y opuestos sobre estos arcos y si al segundo factor $\varkappa'$ le ocurriese lo mismo, la integral I no podría anularse. Por tanto $\varkappa'$ debe cambiar de signo, y por tanto anularse, sobre alguno de los arcos en que A y B dividen a la curva; se tienen así por lo menos tres vértices de la misma. Como, además, tomando por ejemplo A como punto de partida, $\varkappa'$ debe volver a él con el mismo signo, esta función debe cambiar de signo un número par de veces. Resultan, por consiguiente, por lo menos cuatro vértices, que es el teorema enunciado.

Observemos que según esta demostración de Herglotz, la conclusión subsiste si en (2.3) en vez de $\varkappa$ se pone otra función $F(s)$ cualquiera, periódica de período $L =$ longitud de C, tal que los productos $F x_1'$, $F x_2'$ sean derivadas de otras funciones con el mismo período.

Una manera de obtener tales funciones es la siguiente, cuya justificación geométrica es evidente. Consideremos la nueva curva

$$(2.4) \qquad Y(s) = \alpha\, T(s) + \beta\, N(s)$$

donde α, β son funciones periódicas de período L y T, N son, como antes, los vectores unitarios tangente y normal de C. Derivando y aplicando (2. 1) se obtiene

$$Y' = (\alpha' - \beta\varkappa) T + (\alpha\varkappa + \beta') N. \tag{2. 5}$$

Para que Y' sea proporcional a T (o sea a X', si $X = X(s)$ es la ecuación vectorial de C), debe ser

$$\alpha\varkappa + \beta' = 0, \qquad \alpha = -\rho\beta'$$

siendo $\rho = 1/\varkappa$ el radio de curvatura.

Entonces el coeficiente de T en (2. 5) queda, cambiando el signo que es inesencial,

$$F(s) \equiv (\rho\beta')' + \beta\varkappa. \tag{2. 6}$$

Con este valor de $F(s)$ se cumple $Y' = F(s) T$ y por tanto las mismas igualdades (2. 3) valen aunque se sustituya $\varkappa$ por F. Se llega así, por el mismo razonamiento de Herglotz, al resultado:

Cualquiera que sea la función $\beta(s)$, de período L, la función $F(s)$ dada por (2. 6) *admite por lo menos cuatro puntos sobre C en los cuales es $F'(s) = 0$.*

El teorema de los cuatro vértices corresponde al caso más simple de tomar $\beta = 1$.

Casos particulares. 1. Tomando, por ejemplo, $\beta = \rho^n$ (n cualquiera, no necesariamente entero), resulta que la derivada de la función

$$F \equiv \rho^{n-1} + n(\rho^n \rho')'$$

se anula por lo menos cuatro veces sobre cualquier curva convexa C, siendo ρ el radio de curvatura e indicando los acentos derivadas respecto el arco s.

2. Sea $h = h(\varphi)$ la función de apoyo de otra curva convexa cualquiera C_1 del mismo plano que C. A cada punto $X(s)$ de C hacemos corresponder el ángulo φ de la normal a su tangente. Entonces resulta $\varphi = \varphi(s)$ y esta función tiene el período L. Tomemos $\beta = h(\varphi)$. Será

$$\beta' = \frac{d\beta}{ds} = \frac{dh}{d\varphi}\varkappa$$

y por consiguiente, sustituyendo en (2. 6),

$$F(s) \equiv \left(\frac{d^2h}{d\varphi^2} + h\right) \varkappa = \rho_1 \varkappa = \rho_1/\rho$$

siendo $\rho_1 = h + d^2 h/d\varphi^2$ el radio de curvatura de C_1.

Resulta así que, *referidas dos curvas convexas* C, C_1 *del mismo plano de manera tal que los puntos homólogos tengan tangentes paralelas, el cociente* ρ_1/ρ *de los radios de curvatura en puntos homólogos tiene por lo menos cuatro extremos.*

Este es un resultado conocido debido a Blaschke (Ver Blaschke, *Differentialgeometrie*, vol. II, pág. 65; en adelante indicaremos esta obra por Blaschke II).

3. *Curvas planas y funciones del arco afin.* - Supongamos ahora que la ecuación vectorial $X = X(\sigma)$ de la curva convexa C esté referida al *arco afin* σ como parámetro. Vale entonces la relación

$$X''' + k X' = 0 \tag{3.1}$$

donde los acentos indican derivadas respecto σ y k es la *curvatura afin.* (Ver, por ejemplo, Blaschke II, pág. 13).

Consideremos la nueva curva

$$Y(\sigma) = \alpha X' + \beta X''$$

con α y β funciones de σ. Derivando y aplicando (3. 1) resulta

$$Y' = (\alpha' - k\beta) X' + (\alpha + \beta') X''.$$

Para poder aplicar el método de Herglotz necesitamos que el vector Y' tenga la misma dirección que X'. Bastará para ello que sea $\alpha = -\beta'$ y el coeficiente de X' queda entonces (salvo el signo que no interesa).

$$F(\sigma) \equiv \beta'' + k\beta. \tag{3.2}$$

Resulta así, por la misma razón de antes:

Cualquiera que sea la función $\beta(\sigma)$ *del arco afin* σ *de la curva convexa* C*, que sea periódica y de periodo igual a la lon-*

gitud afin de C, la función $F(\sigma)$ dada por (3. 2) tiene por lo menos cuatro extremos (puntos en los cuales es $F'=0$) sobre C.

En particular, β puede ser una función cualquiera de k.

Para el caso más simple $\beta=1$ resulta $F\equiv k$, pero en este caso no se obtiene nada nuevo, pues se sabe que un mayor perfeccionamiento en la demostración, permite deducir que la función $k(\sigma)$ tiene siempre por los menos seis extremos (Blaschke, II, pág. 43).

Observación. Si en (3. 2) se pasa del arco afin al arco métrico, la expresión que resulta es del tipo (2. 6). La ventaja de (3. 2) consiste únicamente en su forma simple con respecto a lós invariantes afines de la curva. Por ejemplo, si en (2. 6) se toma $\beta=\varkappa^{1/3}$, teniendo en cuenta que la curvatura afin k se relaciona con la curvatura ordinaria $\varkappa$ por la expresión

$$k=\varkappa\left(\varkappa^{1/3}+\frac{d^2\varkappa^{1/3}}{d\varphi^2}\right) \tag{3.3}$$

siendo φ el ángulo de contingencia (o sea, $d\varphi/ds=\varkappa$). (Ver Blaschke, II, pág. 32), un pequeño cálculo prueba que resulta $F(s)\equiv k$, es decir, se obtiene la misma función que al hacer en (3. 2) $\beta=1$.

4. *Curvas planas y funciones del arco proyectivo.* - Sea ahora $X=X(u)$ la ecuación de la curva convexa C en la cual el parámetro u es el *arco proyectivo*. Aquí X representa el punto de coordenadas homogéneas x_0, x_1, x_2. Se sabe que existe la relación [4]

$$X'''+2qX'+(q'-1)X=0 \tag{4.1}$$

siendo q la *curvatura proyectiva* de C e indicando los acentos derivadas respecto u.

Consideremos la nueva curva

$$Y(u)=\alpha X+\beta X'+\gamma X''$$

[4] Ver, por ejemplo, FUBINI-CECH, *Introduction à la Géométrie projective differentielle des surfaces*, Paris 1931, pág. 13.

con α, β y γ funciones de u. Derivando y aplicando (4.1) resulta

$$Y' = (\alpha' - \gamma(q'-1))\,X + (\alpha + \beta' - 2\gamma q)\,X' + (\beta + \gamma')\,X''. \tag{4.2}$$

Para que Y' sea proporcional a X' debe ser

$$\gamma = \frac{\alpha'}{q'-1}, \qquad \beta = -\gamma'$$

y por tanto el coeficiente de X' toma la forma

$$F(u) \equiv \alpha - \left(\frac{\alpha'}{q'-1}\right)'' - \frac{2q}{q'-1}\,\alpha'. \tag{4.3}$$

Por la misma razón de siempre se tiene por tanto ahora:

Cualquiera que sea la función $\alpha(u)$ del arco proyectivo de la curva convexa C, que sea periódica y de período igual a la longitud proyectiva de C, la función $F(u)$ definida por (4.3) *tiene por lo menos cuatro extremos sobre C.*

5. *Curvas del espacio y funciones del arco métrico.* - La demostración de Herglotz se aplica también a curvas del espacio, tomando un plano cualquiera que pase por los puntos de máximo y mínimo de la función en cuestión, siempre y cuando valgan las igualdades análogas a las (2.3) y la curva sea tal que para estos puntos pase por lo menos un plano que divida a la curva en solo dos arcos ([5]).

Sean T, N, B los vectores unitarios tangente, normal principal y binormal de la curva cerrada del espacio C. Consideremos la nueva curva

$$Y(s) = \alpha T + \beta N + \gamma B \tag{5.1}$$

siendo α, β, γ funciones del arco s.

Derivando y aplicando las fórmulas de Frenet, resulta

$$Y' = (\alpha' - \beta\varkappa)\,T + (\alpha\varkappa + \beta' - \gamma\tau)\,N + (\beta\tau + \gamma')\,B \tag{5.2}$$

([5]) Para detalles ver el primer trabajo de Süss citado en la nota (2).

donde $\varkappa, \tau$ son la curvatura y la torsión de C.

Para que sean nulos los coeficientes de N y B debe ser

$$\beta = -\frac{\gamma'}{\tau}, \quad \alpha = \frac{1}{\varkappa}\left(\gamma\tau + \left(\frac{\gamma'}{\tau}\right)'\right)$$

con lo cual el coeficiente de T resulta

$$F(s) \equiv \left[\frac{1}{\varkappa}\left(\gamma\tau + \left(\frac{\gamma'}{\tau}\right)'\right)\right]' + \frac{\varkappa}{\tau}\gamma' \tag{5.3}$$

donde los acentos indican derivadas respecto s.

Por la razón de siempre resulta en consecuencia:

Sea $\gamma(s)$ *una función cualquiera, periódica de período igual a la longitud de la curva cerrada* C. *Formemos con ella la función* $F(s)$ *definida por* (5.3); *ella tendrá por lo menos dos extremos sobre* C *(el máximo y el mínimo). Si por estos dos puntos pasa por lo menos un plano que divida a* C *en dos arcos solamente, se puede afirmar que sobre* C *existen por lo menos otros dos puntos en los cuales es* $F'(s) = 0$.

El caso particular más simple corresponde a tomar $\gamma = 1$. Resulta entonces que sobre toda curva cerrada, con las condiciones dichas, la función $(\tau/\varkappa)'$ tiene por lo menos cuatro extremos.

6. *Curvas del espacio y funciones del arco afín.* - Sea $X = X(\sigma)$ la ecuación vectorial de la curva cerrada C del espacio en función del *arco afín* σ. Vale la relación (ver, por ej., Blaschke, II, pág. 73),

$$X'''' + k X'' + t X' = 0 \tag{6.1}$$

donde k es la *curvatura afín* y t la *torsión afín*.

Consideremos la nueva curva

$$Y = \alpha X' + \beta X'' + \gamma X'''$$

con α, β, γ funciones de σ. Derivando y teniendo en cuenta (6.1), resulta

$$Y' = (\alpha' - \gamma t) X' + (\alpha + \beta' - k\gamma) X'' + (\beta + \gamma') X'''. \tag{6.2}$$

Para que Y' tenga la dirección de X' debe ser

$$\beta = -\gamma', \qquad \alpha = \gamma'' + k\gamma$$

con lo cual el coeficiente de X' resulta

$$F(\sigma) \equiv \gamma''' + k\gamma' + (k' - t)\gamma. \tag{6.3}$$

Por tanto:

Siendo $\gamma(\sigma)$ una función cualquiera del arco afin σ, periódica y de periodo igual a la longitud afin de la curva cerrada C, con la condición de que por dos puntos extremos de $F(\sigma)$ sobre C pase por lo menos un plano que divida a C en solo dos arcos, la función F definida por (6.3) tendrá sobre C por lo menos cuatro extremos.

El caso más simple corresponde a tomar $\gamma = 1$, en cuyo caso queda $F \equiv k' - t$ lo cual da el resultado de Süss obtenido en el segundo trabajo citado en la nota (2).

7. *Curvas del espacio y funciones del arco proyectivo.* - Sea ahora $X = X(u)$ la ecuación de la curva C referida al *arco proyectivo* u. Aquí X representa el punto de coordenadas homogéneas x_0, x_1, x_2, x_3. Se sabe que existe la relación

$$X'''' + qX'' + (q' - \vartheta)X' + rX = 0 \tag{7.1}$$

donde los acentos indican derivadas respecto el arco proyectivo y los coeficientes q, r son la primera y segunda curvatura proyectivas; el parámetro ϑ vale 0 o 1 según que las tangentes a la curva pertenezcan o no a un complejo lineal (6).

Otra curva cualquiera será

$$Y = \alpha X + \beta X' + \gamma X'' + \delta X'''. \tag{7.2}$$

Derivando y aplicando (7.1) resulta

$$Y' = (\alpha' - \delta r)X + (\alpha - \delta(q' - \vartheta) + \\ + \beta')X' + (\beta + \gamma' - \delta q)X'' + (\gamma + \delta')X'''. \tag{7.3}$$

(6) Ver, por ejemplo, Fubini-Cech, *Geometria proiettiva differenziale*, Bologna, tomo 1, pág. 33.

Para que se anulen los coeficientes de X, X'', X''' debe ser

$$\delta = \frac{\alpha'}{r}, \quad \beta = -\gamma' + \delta q, \quad \gamma = -\delta'$$

con lo cual el coeficiente de X' resulta

$$F(u) \equiv \alpha + \frac{\alpha'}{r}\vartheta + \left(\frac{\alpha'}{r}\right)' q + \left(\frac{\alpha'}{r}\right)''' . \tag{7.4}$$

Por tanto:

Siendo $\alpha(u)$ una función cualquiera del arco proyectivo, periódica y de período igual a la longitud proyectiva de la curva cerrada C, con la condición de que por dos puntos extremos de $F(u)$ sobre C pase por lo menos un plano que divida a C en solo dos arcos, la función $F(u)$ definida por (7.4) tiene sobre C por lo menos cuatro extremos.

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICOMATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE EVA PERÓN