ALGUNOS VALORES MEDIOS SOBRE LA SEMIESFERA

POR

L. A. SANTALÓ

1. *Introducción.* — Supongamos dada una semiesfera E de radio unidad. Los problemas que nos proponemos resolver son del tipo siguiente:

Dados al azar dos puntos A y B sobre E ¿cuál es la distancia media entre ellos? O bien: dados arbitrariamente tres puntos A, B, C ¿cuál es el valor medio del área del triángulo que forman?

Estos problemas y otros análogos que veremos, se resuelven en general más simplemennte cuando se considera la esfera entera en lugar de la semiesfera. Ello es debido a que para el caso de la esfera entera existen ciertas relaciones de simetría que facilitan la solución del problema, que muchas veces puede llevarse a cabo sin cálculo alguno (1). Sin embargo el caso de la semiesfera parece más preciso y tiene su interés por el hecho de que en él cada dos puntos determinan un solo segmento y por tanto cada tres puntos un solo triángulo. Prácticamente corresponde al caso de un observador que dirigiera visuales sobre la parte de esfera celeste que está por encima de su horizonte.

Para el cálculo de valores medios convenimos en que por medida de un conjunto de puntos sobre E tomaremos el área ordinaria del conjunto. Dado un punto A representaremos siem-

(1) Ver, por ejemplo, C. JORDAN, *Questions de probabilités*, Bulletin de la Societé Mathematique de France, vol. 1, 1873, y también E. CZUBER, *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte*, Leipzig, 1884.

pre por dA el elemento de área sobre E correspondiente al mismo. De manera que, por ejemplo, es

$$\int_E dA = 2\pi. \tag{1}$$

Un círculo máximo c estará determinado por su polo P_c y como medida de un conjunto de círculos máximos tomaremos la medida del área llenada por sus polos. Es decir, la densidad para medir conjuntos de círculos máximos es igual a la de sus polos, o sea, simbólicamente,

$$dc = dP_c. \tag{2}$$

Todo esto es bien conocido en la teoría de Probabilidades Geométricas. Conviene que recordemos ahora una fórmula importante. Sean A, B dos puntos sobre E y sea c el círculo máximo que ellos determinan. Para determinar A, B se puede dar c y luego los arcos α, β que miden sus distancias a un punto origen sobre c. Llamando $d\alpha$, $d\beta$ a los elementos de arco sobre c, vale la fórmula

$$dA\, dB = |\operatorname{sen}(\beta - \alpha)|\, d\alpha\, d\beta\, dc. \tag{3}$$

Esta fórmula hay que entenderla en el sentido de que la integral de ambos miembros vale lo mismo para cualquier conjunto de integración; es decir, representa un cambio de variables en una integral cuádruple. Esta fórmula (3) es conocida y va a ser fundamental en lo sucesivo ([2]).

2. *Distancia media entre dos puntos de la semiesfera unidad.* — Sea primero el caso más general de una figura convexa K contenida en la semiesfera de radio unidad E. Si A y B son dos puntos de K y l representa su distancia, para hallar la

$$I_K = \int l\, dA\, dB \tag{4}$$

([2]) La demostración de la fórmula (3) puede verse en W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Integralgeometrie*, II, pág. 78, o bien, para una demostración directa L. A. SANTALÓ, *Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo* (Apéndice), Publicaciones del Instituto de Matemáticas, vol. II, nº 3, Rosario, 1940.

distancia media entre los puntos de K deberemos calcular la integral
extendida a todos los pares de puntos A, B contenidos en K.

Aplicando (3) y observando que es $l = |\beta - \alpha|$, deberemos calcular

$$\int_0^\sigma \int_0^\sigma (\beta-\alpha) \operatorname{sen}(\beta-\alpha)\, d\beta\, d\alpha = 4 - 4\cos\sigma - 2\sigma \operatorname{sen}\sigma \tag{5}$$

siendo σ la longitud de la cuerda que el círculo máximo c (que pasa por A y B) determina en K. Para el cálculo de la integral (5) hemos podido prescindir del valor absoluto del $\operatorname{sen}(\beta-\alpha)$ que figura en (3), puesto que el producto $(\beta-\alpha)$ $\operatorname{sen}(\beta-\alpha)$ es siempre positivo (α y β comprendidos entre 0 y π).

Recordando ahora que la medida de los círculos máximos que cortan a una figura convexa es igual a la longitud de la misma, resulta

$$I_K = 4L - 2\int (2\cos\sigma + \sigma \operatorname{sen}\sigma)\, dc \tag{6}$$

donde la última integral está extendida a todos los círculos máximos que cortan a K y L representa la longitud del contorno de K.

Si K es toda la semiesfera E, es siempre $\sigma = \pi$ y como $L = 2\pi$ y la medida total de c es también 2π (según (2) y (1)), resulta

$$I_E = 16\,\pi. \tag{7}$$

Para obtener el valor medio de l hay que dividir este valor por $\int dA\, dB = 4\pi^2$. Se tiene por tanto

La distancia media entre dos puntos de una semiesfera de radio unidad vale

$$\bar{l} = 4/\pi. \tag{8}$$

3. *Valor medio del área de un triángulo sobre la semiesfera unidad.* — Sean A, B, C los vértices de un triángulo sobre E. Queremos calcular la integral

$$S = \int T \, dA \, dB \, dC \tag{9}$$

donde T es el área del triángulo ABC y la integral está extendida, para cada punto A, B, C, a toda la semiesfera E.

Llamando con la misma letra A, B, C a los ángulos interiores del triángulo, es $T = A + B + C - \pi$ y por tanto, por simetría

$$S = 3 \int C \, dA \, dB \, dC - (2\pi)^3 \pi. \tag{10}$$

Recordemos ahora que dada una figura convexa K sobre E y llamando ω al ángulo que forman las rectas de apoyo de la misma que pasan por un punto exterior C, vale la fórmula integral

$$\int \omega \, dC = \pi L - \pi F \tag{11}$$

siendo F el área y L la longitud del contorno de K y estando la integración extendida a todo el exterior de K ([3]). Al aplicar esta fórmula al caso en que K se reduce a un segmento de longitud l deberá ponerse $L = 2l$, $F = 0$.

Aplicando este resultado y llamando l al arco AB, la expresión (10) se escribe

$$S = 6\pi \int l \, dA \, dB - (2\pi)^3 \pi. \tag{12}$$

Como la integral que aquí figura está extendida a todo E, su valor está dado por (7) y por tanto tenemos

$$S = 8\pi^2(12 - \pi^2). \tag{13}$$

Dividiendo por $\int dA \, dB \, dC = (2\pi)^3$, resulta

([3]) Ver L. A. Santaló, *Integral Formulas in Crofton's style on the sphere*, Duke Mathematical Journal, vol. 9, 1942, fórmula (16).

El valor medio del área de un triángulo dado por sus vértices sobre la semiesfera unidad, vale

$$\bar{T} = (12/\pi) - \pi. \tag{14}$$

4. *Problema de Sylvester sobre la semiesfera.* — El llamado *problema de Sylvester* en probabilidades geométricas es el siguiente: Dados cuatro puntos arbitrariamente dentro de una figura plana convexa, ¿cuál es la probabilidad de que ellos sean los vértices de un cuadrilátero convexo? ([4]).

Las fórmulas anteriores nos permiten resolver inmediatamente este problema sobre la semiesfera. En efecto, si los puntos son A, B, C, D, los casos en que el cuadrilátero no es convexo son aquellos en que D es interior al triángulo ABC. La medida de estos casos es $\int T \, \mathrm{d}A \, \mathrm{d}B \, \mathrm{d}C$ y está dada por (13). La medida total de casos es $\int \mathrm{d}A \, \mathrm{d}B \, \mathrm{d}C \, \mathrm{d}D = (2\pi)^4$. Por tanto:

Dados al azar cuatro puntos sobre la semiesfera de radio unidad, la probabilidad de que ellos sean vértices de un cuadrilátero convexo vale

$$p = (3/2) - (6/\pi^2) = 0{,}8920\ldots \tag{15}$$

5. *Otros valores medios.* — Si a, b, c representan ahora las longitudes de los lados del triángulo ABC, la longitud media de este triángulo se obtendrá calculando

$$\int (a+b+c) \, \mathrm{d}A \, \mathrm{d}B \, \mathrm{d}C = 3 \int \mathrm{d}A \int a \, \mathrm{d}B \, \mathrm{d}C \tag{16}$$

con las integraciones extendidas a toda la semiesfera E. La última integral es la (7) que vale 16π. Por tanto, sustituyendo en (16) y dividiendo por $\int \mathrm{d}A \, \mathrm{d}B \, \mathrm{d}C = (2\pi)^3$ resulta:

El valor medio del perímetro de un triángulo dado arbitrariamente por sus vértices sobre la semiesfera unidad, vale

$$\bar{L} = 12/\pi. \tag{17}$$

([4]) Ver, por ejemplo, R. Deltheil, *Probabilités géométriques*, París, 1926, pág. 42.

Como la medida de todos los círculos máximos vale 2π el resultado anterior se puede enunciar:

Dados al azar tres puntos y un círculo máximo sobre la semiesfera unidad, la probabilidad de que el círculo corte al triángulo determinado por los tres puntos, vale

$$p = 6/\pi^2. \tag{18}$$

Las fórmulas (14) y (17) pueden transformarse por dualidad, dando inmediatamente:

El valor medio del área de un triángulo formado por tres círculos máximos dados arbitrariamente sobre la semiesfera unidad, vale

$$\overline{T}_{abc} = 2\pi - 12/\pi. \tag{19}$$

El valor medio del perímetro de un triángulo formado por tres círculos máximos dados al azar sobre la semiesfera unidad, vale

$$\overline{L}_{abc} = 3\pi - 12/\pi. \tag{20}$$

Facultad de Ciencias Físico-matemáticas.
EVA PERÓN.