tomar más que los valores 0 y 1. El lector puede proponerse de demostrar este hecho para los polígonos (tienen orden cero los puntos exteriores y 1 los interiores) siguiendo, por ej. un método de inducción, después de haber observado que se realiza para los polígonos convexos.

Noticias bibliográficas sobre el argumento pueden verse en la *Encyclopaedie der Mathematischen Wissenschaften* — Band II C, 12 y también, pero en forma mucho más reducida, en la edición francesa de la misma (*Encyclopédie des sc. math.*, Tome II, Vol. 1 Fasc. 1, p. 140). Véase también la memoria de O. FEIGL, *Ueber einigen Eigenschaften der einfachen stetigen Kurven*; (*sobre algunas propiedades de las curvas simples continuas*) — Math. Zeitschrift, 27, 1928).

B. LEVI

NICOLO TARTAGLIA Y LA RESOLUCION DE LA ECUACION DE TERCER GRADO

Es sabido que la fórmula para la resolución algebraica de la ecuación cúbica sin segundo término se llama, según los autores, fórmula de Cardano o fórmula de Tartaglia. En efecto, Hieronimo Cardano publicó por primera vez la fórmula en su «Ars Magna» aparecida en 1545; pero como él mismo declara, la había obtenido de Tartaglia en 1539, quien dice haberla descubierto en 1534. Finalmente, según se acepta universalmente por declaración del mismo Cardano y de su discípulo Ferrari, se debe conceder a Tartaglia a lo sumo el mérito de un redescubrimiento, porque desde el principio del siglo Scipione del Ferro, de la Universidad de Bolonia, la habría enseñado a algún conocido.

Nos proponemos detallar un poco la historia de este descubrimiento, uno de los que más apasionaron a los matemáticos de la época y que ha sido más debatido por los historiadores posteriores.

En aquellos tiempos (principios del siglo XVI) era costumbre frecuente entre matemáticos el proponerse mutuamente problemas y cuestiones en forma de desafío público para probar y comparar su ingenio. De aquí que muchas veces quien lograba encontrar reglas o métodos nuevos para resolver determinados tipos de problemas, procuraba guardarlos para sí, ocultándolos a los demás, con lo cual además de poseer un medio para resolver las cuestiones en que las reglas tuvieran aplicación, podía a su vez proponer multitud de problemas análogos, cuya solución resultase extremadamente difícil para otro que no poseyera la regla rápida de solución. De esta manera se explica que quien primero encontrase la fórmula para resolver la ecuación de tercer grado tuviera interés en guardarla.

Ya hemos dicho que Hieronimo Cardano en su famosa «Ars Magna», atribuye el descubrimiento de la fórmula que resuelve la ecuación cúbica sin término de segundo grado (o sea de la forma $x^3 + px + q = 0$) a Scipione del Ferro, lector de la Universidad de Bolonia, quien debió encontrarla a principio del siglo XVI. Sin embargo, comunicada sólo a un reducido círculo de amigos y familiares, no tuvo divulgación y pasó desconocida por los matemáticos de la época.

Más tarde, en 1534, Nicoló Fontana de sobrenombre Tartalea o Tartáglia, descubre por su cuenta la misma regla, estimulado probablemente por los problemas que le fueron puestos por cierto Anton Maria Fiore o Florido (1), (discípulo de del Ferro), pero se negó a comunicarla a los demás matemáticos, de lo cual se justifica del modo siguiente en una conversación que él declara haber sostenido con Cardano en 1539 (2):

''Io ve dirò, io non fazzo tanto il carestioso, per il simplice capitolo, ne per le cose ritrovate per lui, ma per quelle, che per notitia de quello si possono ritrovare, perche egli e una chiave, che ne apre la via a potere investigare infiniti altri capitoli, et si il non fuse che al presente io son occupato nella traduttione di Euclide in volgare (3) (e per fin a quest'hora l'ho tradutto per fin al suo 13 libro) a molti altri capitoli haveria gia trovato regola gene-

(1) Estos problemas se encuentran reproducidos en la obra de Tartaglia ''*Quesiti et inventioni diverse*'' publicado en 1554, hoja 114.

(2) l. c., Libro noveno, Quesito 34, hoja 120

(3) Esta traducción apareció en efecto en 1543.

rale, ma spedito che habbia questa mia fatica di Euclide gia principiata, ho designato di componere un'opera di pratica, et insieme con quella una nuova Algebra, nella quale non solamente ho deliberato di publicare ad ogni huomo tutte la dette mie inventioni de capitoli nuovi, ma molti altri, che spero di ritrovare, et anchora voglio mostrare la regola di poterne investigarne infiniti altri qual spero che la sara una cosa utile et bella; et questa e la causa che me gli fa negar ad ogniuno, perche io al presente non vi pongo alcuna cura sopra di loro (per esser como detto occupato sopra Euclide) et insignandoli ad alcuno speculativo (come e vostra Eccelentia) facilmente potria con tale evidentia trovar altri capitoli, per esser facile lo aggiongere alle cose trovate, et publicarli come inventore; il che facendo mi guastaria ogni mio dissegno''.

Unicamente después de muchos ruegos y solicitudes Tartaglia accede a comunicar su regla a Cardano, pero no sin antes escuchar de éste la promesa por juramento de que no revelará nunca el secreto (4).

''Non volendo io prestar fede a tanti vostri giuramenti io mereteria certamente da esser giudicato huomo senza fede... voglio che sappiati, che per potermi aricordare in ogni mia improvisa occorentia tal modo operativo, io l'ho redutto in uno capitolo in rima, perche se io non havesse usato questa cautela, spesso me saria uscito di mente; quatunque tal mio dire in rima non sia molto terso, non mi ho curato, perche mi basta che mi serva a ridurme in memoria tal regola ogni volta che io il dica, il qual capitolo ve lo voglio scrivere de mia mano, accio che siati sicuro, che vi dia tale inventione giusta et buona''.

Y escribe a continuación los siguientes versos que traducimos lo más literalmente posible al castellano:

<table>
<tr><td>Quando chel cubo con le cose appresso
Se agguaglia a qualche numero discreto
Trovan dui altri differenti in esso.</td><td>Cuando el cubo con las cosas después
Se iguala a cierto número discreto
Existen otros dos que difieren en éste.</td></tr>
<tr><td>Dapoi terrai questo per consueto
Che'l loro produtto sempre sia eguale
Al terzo cubo delle cose neto,</td><td>Entonces tendrás esto por regla
Que su producto siempre sea igual
Al tercio cubo de las cosas netas,</td></tr>
<tr><td>El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sotratti
Varra la tua cosa principale.</td><td>La diferencia luego general
De sus lados cubos bien restados
Valdrá tu cosa principal.</td></tr>
<tr><td>In el secondo de cotesti atti
Quando che'l cubo restasse lui solo
Tu osservarai quest'altri contratti,</td><td>En la segunda de estas gestiones
Cuando el cubo se quedase solo
Observarás estos otros ajustes,</td></tr>
</table>

(4) Loc. cit., Quesito 34.

Del numer farai due tal part'a volo	Del número harás dos partes tales
Che l'una in l'altra si produca schietto	Que al multiplicarlas entre sí resulte
El terzo cubo delle cose in stolo.	El tercio cubo de las cosas solas.
Delle qual poi, per commun precetto	De ellas después, por común precepto
Torrai li lati cubi insieme gionti	Tomarás juntos los lados cubos
Et cotal somma sara il tuo concetto.	Y esa suma será bien tu concepto.
El terzo poi de questi nostri conti	La tercera de estas nuestras cuentas
Se solve col secondo se ben guardi	Resulta de la segunda si bien miras
Che per natura son quasi congionti.	Que en la substancia son casi conjuntas.
Questi trovai e non con passi tardi	Esto encontré y no con pasos tardos
Nel mille cinquecente, quatro e trenta	El año mil quiniento treinta y cuatro
Con fondamenti ben sald'e gagliardi	Con fundamentos sólidos gallardos
Nella citta dal mar'intorno centa.	En la ciudad que el mar entorno ciñe.

Para poder entender esta regla y ponerla de acuerdo a la nomenclatura actual hay que hacer algunas aclaraciones. La *cosa* era el nombre que daban en aquella época a la incógnita y en los versos anteriores cuando se habla de las *cosas*, debe entenderse el término px de la ecuación, que se leería «p *cosas*». La expresión *lati cubi* que hemos traducido literalmente por «lados cubos» se refiere a las «raíces cúbicas».

Los tres casos a que se refieren los versos corresponden respectivamente a $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$, $x^3 + q = px$, donde p y q se suponían positivos.

Para el primero de ellos Tartaglia reduce la solución a buscar dos números u, v tales que $u - v = q$, $u \cdot v = \left(\frac{p}{3}\right)^3$; esta última expresión es lo que llama el «terzo cubo delle cose neto». La solución de este sistema, que es de segundo grado, era conocida y lo es ahora por todos los alumnos de escuela media.

La diferencia de las raíces cúbicas $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$ es la solución positiva de la ecuación $x^3 + px = q$.

Análogamente, el segundo caso se reduce a resolver el sistema $u + v = q$, $u \cdot v = \left(\frac{p}{3}\right)^3$ y tomar luego $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$.

Para el último caso ($x^3 + q = px$) Tartaglia dice, sin más explicaciones, que se resuelve por el segundo; se refiere, posiblemente, al hecho de que, aplicando la misma regla, basta al final cambiar el signo del resultado obtenido.

Es notable el hecho de que el mismo Cardano no supo interpretar sin previa aclaración los versos anteriores y necesitó insistir a Tartaglia en una carta (5):

"...Quanto alla questione del vostro capitolo di cosa e cubo equal a numero vi ringratio assai che mi dasesti tal capitolo, et vi faro conoscere ch'io non vi saro ingrato. Ma pero io confesso il mio errore di non haver havuto tanto ingenio che io lo habbia potuto anchora intendere, e pero vi supplico per l'amor che mi portati, et per l'amicitia ch'é tra noi che spero durara fin che viveremo che mi mandati sciolta questa questione, 1. cubo piu 3. cose, equal a 10, et spero che mandandomela ve ne trovareti si contento quanto io di haverla ricevuta...".

A esta carta contestó Tartaglia (5):

"Circa al detto mio capitolo de cosa e cubo equal a numero molto mi maraviglio che vostra ecceletia no habbia inteso massime che io parlo chiaro nel detto mio capitolo, ma ho pensato che voi vi siati ingannato in quel ditto che dice al terzo cubo delle cose netto, cioe penso che voi habbiati tolto il terzo del cubo delle cose, et bisogna tor il cubo del terzo delle cose essempi gratia a voler risolvere quella equatione de 1. cubo piu 3. cose equal a 10, che vostra eccelletia mi ha mandata dico che bisogna trovar dui numeri (over quantita) che la differentia de luno a laltro sia 10 (cioe tanto quanto é il nostro numero) et che il produtto de queste due quantita multiplicate luna sia l'altra facciano a ponto 1, cioe el cubo della terza parte delle cose, liquali dui numeri, over quantita, operando per Algebra, over per qual altra via piu commoda se trovara luna de loro, cioe la menore esser R. 26. men 5 et laltra cioe la maggiore R. 26 piu 5. Hor de cadauna di queste due quantita bisogna trovar il suo lato cubo, cioe la sua R. cuba et quella della menor sara R. universale cuba de R. 26 piu 5.... Hor bisogna sotrare il lato menore del maggiore, et il restante sara el valor della nostra cosa principale... la qual conclusione, oltra che la isperienza ne renda bona testimonianza,... anchora Geometricamète facilmente se dimostra la bonta et causa di tal operare...".

Con estas explicaciones queda ya satisfecho Cardano y escribe de nuevo a Tartaglia agradeciendo y reiterando su promesa de guardar el secreto (6):

"Quanto al capitolo vostro et al mio caso per voi assolto ve ne ringratio singolarissimamente, et laudo il vostro ingegno sopra tutto quelli che ho conosciuti, et me stato accaro piu che se mi havesti donato duc. 100, et vi co-

(5) Loc. cit. Quesito 35.
(6) Loc. cit. Quesito 36.

nosco per mio amicissimo et ne ho fatto prova et l'ho trovato generalissimo. Quanto al dubbio che voi haveti che non vi faccia stampare tai vostre inventioni, la mia fede che vi ho data con giuramento, vi doveva bastare,... chel non é mazor tradimento che a esser mancator di fede, et far dispiacere a chi ha fatto appiacere...''.

A pesar de estas promesas, en 1545, en su ya citada *Ars Magna,* publica Cardano la regla de resolución de la ecuación cúbica, hecho éste que motivó la indignación de Tartaglia y dió origen a una clásica disputa entre éste y Cardano o más bien entre Tartaglia y Ferrari, discípulo y defensor de Cardano.

Debe observarse sin embargo que Cardano no pretende ser el descubridor de la regla sino que, como se dijo al principio, la atribuye a Scipion dal Ferro y luego añade: «Nicolo Tartaglia de Brescia, amigo nuestro, habiendo entrado en discusión con Anton Maria Florido, discípulo de dal Ferro, para vencer en la discusión encontró la misma solución y la confió a mí, que con insistentes ruegos se la había solicitado».

La falta de Cardano ha sido juzgada de distintas maneras según los historiadores. Los defensores de Cardano, como por ej. E. Bortolotti (7), expresan dos argumentos a su favor. En primer lugar el haber dispuesto Tartaglia de un margen de tiempo suficiente (de 1534 a 1545) para poder publicar su prometida obra sobre dicha solución de la ecuación cúbica y generalizaciones, publicación que Tartaglia iba demorando constantemente. En segundo lugar, observan que si bien una solemne promesa impedía a Cardano revelar el secreto de Tartaglia, nada podía impedirle de exponer las mismas cuestiones después que habían llegado a su conocimiento por otro camino. Esta es la razón con que Ludovico Ferrari contesta a los ataques de Tartaglia (8). Para Tartaglia este hecho, que no intenta discutir, no justifica la falta de Cardano (9):

(7) E. Bortolotti. ''I contributi del Tartaglia, del Cardano, del Ferrari, e della scuola matematica bolognese alla teoria algebrica delle equazioni cubiche''. Imola 1926.

(8) ''I sei Cartelli di Matematica Disfida, primamente intorno alla generale risoluzione delle equazioni cubiche, di Ludovico Ferrari coi sei contro-cartelli in risposta di Nicolo Tartaglia'' Riccolti, autografati e publicati da Enrico Giordani. Milano 1876. II° Cartello.

(9) Loc. cit. Risposta al II Cartello, pag. 5.

"Questa particolarita non mi par cosa licita a doverla desputare ne manco negare, perche saria presuzione grandissima la mia a darme ad intendere, quelle cose che da me sono state ritrovate che per altri tempi le non potessero esser state ritrovate da altri, et similmente che per l'avvenire altri non le potesse ritrovare...".

Se nota también en defensa de Cardano que su *Ars Magna* contiene mucho más que la regla para resolver la ecuación cúbica sin término de segundo grado, pues resuelve la ecuación completa, considera por primera vez las distintas raíces que pueden tener las ecuaciones de grado superior al primero, observa como se puede reducir el grado de una ecuación cuando se conoce una raíz, etc. Pero Tartaglia, aunque exagerado por la pasión, no deja de tener cierta razón cuando escribe a Ferrari (9):

"... Non vedeti voi che eglie cosa nota a cada uno intelligente, et lui medesimo lo confessa in detta opera che tal mia invenzione e l'anima di tutto il detto suo volume. Non vedeti voi che cavando la detta mia pianta del detto vostro giardino, tal vostro giardino restaria una oscura selva, perche tutte le altre cose sostanciale derivano da detta mia pianta...".

Dejando esta singular discusión que se prolongó durante varios años (se puede decir hasta la muerte de Tartaglia en 1557), volvamos a estudiar la solución de la ecuación cúbica.

De una manera cierta no sabemos si Tartaglia conocía una demostración de su regla o si la había obtenido de manera empírica y luego comprobada. Pero aunque no dejó ninguna demostración, de sus escritos parece deducirse que debía conocer alguna basada en consideraciones geométricas, muy frecuentes en aquella época en todos los razonamientos algebraicos. En efecto, el penúltimo de sus versos «con fondamenti ben sald'è gagliardi» parece indicar que encontró, al mismo tiempo que la regla, su fundamentación y además, en la carta que escribió a Cardano para aclararle la regla que éste no había comprendido, hemos visto como puntualiza de nuevo que, acerca de la validez de la regla «oltra che la isperienza ne renda bona testimonianza,... anchora Geometricamète si dimostra la bonta et causa di tal operare...».

El método comúnmente utilizado en los libros de texto actuales para resolver la ecuación cúbica sin término de segundo grado consiste en reducir el problema a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas muy parecido al de Tartaglia, pero justifica de una manera racional el camino de llegar a él. Es el método de Hudde, publicado por este matemático holandés en una memoria titulada *Epistola prima de Reductione Aequationum.* Encontramos esta memoria como apéndice a la Geometría de R. Descartes, segunda edición, publicada en 1659 por Francisco Schooten (*). En este trabajo, para aplicar la última de ciertas 21 reglas para reducir el grado de algunos tipos de ecuaciones, necesita Hudde resolver la ecuación $x^3 = px + q$. Para ello pone $x = y + z$, y sustituyendo obtiene

$$y^3 + 3zy^2 + 3yz^2 + z^3 = px + q,$$

que se puede escribir en la forma

$$y^3 + z^3 + 3yz(y + z) = p(y + z) + q,$$

y esta igualdad conduce a poner

$$y^3 + z^3 = q \qquad yz = \frac{p}{3}$$

Este sistema vemos que es en esencia el mismo de Tartaglia y la novedad consiste sólo en la manera simple y natural de llegar a él.

Este método fué generalizado más tarde por Euler para las ecuaciones de 4°. grado, por lo que algunos autores lo llaman también método de Euler.

Es interesante señalar de paso que Hudde parece ser el primero que, en la memoria citada, observa que la fórmula de resolución de la ecuación cúbica sin término de segundo grado es la misma para los tres casos $x^3 = px + q$, $x^3 = -px + q$, $x^3 = px - q$ con sólo tener en cuenta los signos de p y q. Así por ejemplo Descartes en la misma geometría (pág. 93) distingue todavía los tres casos, asignando a cada uno fórmulas distintas de resolución.

Luis A. Santaló

(*) Amstelaedami, apud Ludovicum et Danielem Elzevirios.