UNA PROPIEDAD CARACTERISTICA DEL CIRCULO

1. PRELIMINARES. — Un conjunto de puntos del plano se llama *convexo*, cuando el segmento que une dos cualesquiera de ellos está formado por puntos pertenecientes al conjunto. Todo conjunto convexo está limitado por una curva tal que cualquier recta del plano sólo puede tener comunes con ella uno o dos puntos o todo un único segmento, lo cual puede tomarse como definición de curva convexa. A un conjunto de puntos convexo más la curva que lo limita lo llamaremos *figura convexa.*

Una figura convexa puede ser *limitada*, es decir, situada toda ella a distancia finita (por ejemplo un círculo), o *ilimitada*, extendiéndose hasta el infinito, por ejemplo la parte de plano comprendida entre los lados de un ángulo.

Un teorema notable sobre figuras convexas, enunciado por HELLY y demostrado por RADON (1) y KÖNIG (2), es el siguiente, que enunciamos sólo para el caso del plano, aunque es general para n dimensiones:

« *Si un número finito de figuras convexas del plano es tal que cada 3 de ellas tienen punto común, existe un punto común a todas ellas* ».

Este teorema, cuando las figuras convexas son limitadas, es válido también para un número infinito de ellas. Si son ilimitadas y en número infinito podría no ser cierto, debido a que los puntos comunes a todas las figuras estuviesen en el infinito. Por ejemplo, considerando todos los semiplanos situados a la derecha de las verticales trazadas por los puntos de abscisas 0, 1, 2, 3, . . . , que son figuras convexas, cada 3 de ellos tienen puntos comunes, y sin embargo no hay ningún punto común a todos los semiplanos. Sin embargo es fácil ver, y se deduce de las demostraciones citadas en (1)

(1) J. RADON, *Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten,* Mathematische Annalen, Vol. 83, 1921, p. 113.

(2) D. KÖNIG, *Ueber konvexe Körper*, Mathematische Zeitschrift, Vol. 14, 1922, p. 208.

y ([2]), que el teorema sigue siendo válido con tal de que *una sola* de las figuras convexas del conjunto sea limitada, aunque las infinitas restantes sean ilimitadas.

Aún suponiendo todas las figuras ilimitadas, si los puntos comunes a 3 particulares de ellas (por ejemplo K_1, K_2, K_3) están todos a distancia finita, el teorema todavía es válido. En efecto, basta añadir al conjunto considerado la figura D formada por estos puntos comunes, la cual es convexa, puesto que la intersección de figuras convexas sigue siendo convexa. Entonces, cada 3 figuras seguirán teniendo puntos comunes, puesto que si una de ellas es la D, se puede sustituir por las K_1, K_2, K_3 de las cuales es la intersección, y las 5 figuras resultantes tendrán punto común ya que el teorema es válido mientras el número sea finito.

El anterior teorema de HELLY ha sido utilizado por C. V. ROBINSON ([3]) para demostrar la siguiente propiedad característica del círculo:

« *El círculo es el único dominio simplemente conexo con el cual se podrá cubrir cualquier conjunto de puntos del plano siempre que se puedan cubrir cada 3 puntos del mismo* ».

Nuesto objeto en esta nota es demostrar un teorema que en cierto modo tiene un aspecto « dual » de éste de ROBINSON. Nos limitaremos a figuras convexas, tanto por simplicidad como por ser para ellas que el teorema puede tener un máximo interés.

2. ENUNCIADO DEL TEOREMA. — Sea K una figura convexa limitada. Se llama *recta de apoyo* de K, a toda recta que tiene por lo menos un punto común con K y deja a esta figura toda de un mismo lado. Las rectas de apoyo coinciden con las tangentes en los puntos en que éstas existen. Llamaremos triángulo que contiene a K a todo triángulo con el cual se pueda cubrir totalmente la figura K.

Con estas definiciones el teorema que queremos demostrar consta de las dos partes siguientes:

a) *Si un círculo C puede estar contenido en todo triángulo que contiene a la figura convexa limitada K, puede también estar contenido en K.*

b) *La única figura del plano que goza de la propiedad anterior, es decir, que de la condición de poder estar contenida en todo triángulo*

([3]) C. V. ROBINSON, *A characterization of the disc*, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 47, pág. 818, 1941.

que contenga a una figura convexa K, cualquiera que ésta sea, se deduzca que puede también estar contenida en K, es el círculo.

3. Demostración. — *a*) Consideremos el contorno de K orientado, con lo cual las rectas de apoyo también quedarán orientadas; supongamos, por ejemplo, que esta orientación haga que la figura K quede siempre a la izquierda de las rectas de apoyo. Sea r el radio del círculo C que suponemos puede estar contenido en todo triángulo que contenga a K. A toda recta de apoyo asociemos la recta paralela a ella situada a distancia r y del mismo lado que K. Consideremos el conjunto de todos los semiplanos situados a la izquierda de estas rectas paralelas. Cada 3 de estos semiplanos tienen punto común. En efecto, si las 3 rectas de apoyo correspondientes forman un triángulo que contiene a K (fig. 1), el centro del círculo C de radio r que por hipótesis está contenido en él, dista de los 3 lados $\geq r$ y por tanto pertenece a los 3 semiplanos. Si el triángulo formado por las 3 rectas de apoyo correspondientes no contiene a K, los 3 semiplanos tienen todo un sector ilimitado de plano en común (fig. 2).

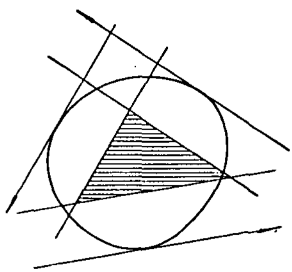

Fig. 1.

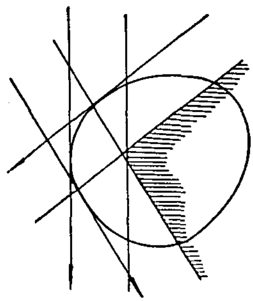

Fig. 2.

Consideremos 3 rectas de apoyo particulares que formen un triángulo que contenga a K (fig. 1). La intersección de los 3 semiplanos correspondientes será un triángulo situado a distancia finita. Por consiguiente, teniendo en cuenta el teorema de Helly y sus ampliaciones al caso de figuras ilimitadas recordadas en el nº 1, se deduce que todos los semiplanos considerados tendrán por lo menos un punto común. Este punto distará de *todas* las rectas de apoyo de K una distancia $\geq r$ y por tanto será centro de un círculo de radio r contenido en K. Queda, con esto, probada la primera parte del teorema.

b) Sea B una figura que goza de la propiedad anterior, es decir, que si puede estar contenida en todos los triángulos que contengan a cualquier figura convexa K, puede también estar contenida en K. Vamos a demostrar que B debe ser un círculo. Para ello vamos a demostrar que si B no fuera un círculo, existiría una figura convexa, precisamente un círculo, que no puede contener a B y que sin embargo todos los triángulos que la contienen pueden contener a B.

Si B no es un círculo, consideremos el círculo de menor radio que contiene a B; sea C este círculo y O su centro (fig. 3). Si B no coincide con C, habrá alguna recta de apoyo de B, por ejemplo la h', situada a menor distancia de O que la tangente paralela h al círculo C; sean M', M los pies de las perpendiculares trazadas desde O a h', h.

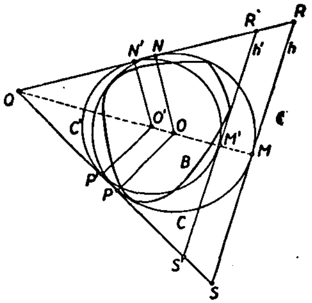

FIG. 3.

Sobre el círculo C tomemos dos puntos N, P simétricos respecto a la recta MO y tales que $NOP = 120°$. Tracemos por N y P las tangentes a C. Si R, S son los puntos en que estas tangentes cortan a la tangente en N quedará formado un triángulo equilátero QRS que contiene a C.

La recta de apoyo h', paralela a h, forma con las mismas tangentes a C en N y P otro triángulo equilátero $QR'S'$ cuyo círculo inscrito será de radio *menor* que el del círculo C. Sea C' este círculo y O' su centro. Si los puntos de tangencia de C' con los lados QN y QP son N' y P' el ángulo $N'O'P'$ valdrá también 120° y el arco N' P' queda exterior a C y por tanto sus puntos distan de O una distancia mayor que OM.

Supongamos ahora un triángulo cualquiera circunscrito a C' y que contenga a C' en su interior. Dos de los puntos de tangencia de sus lados deben distar un arco igual o menor que 120° y por tanto podremos colocarlos sobre el arco $N'P'$. El tercer lado distará de O una distancia igual o mayor que OM' (puesto que M' es el punto de C' más próximo a O). Por tanto podremos girar el conjunto de C' y su triángulo circunscrito alrededor de O de manera que el tercer lado mencionado pase a ser recta de apoyo de B o quede exterior a B. En cuanto a los dos primeros lados, por distar de O más que el radio OM de C, siempre quedan exteriores a B.

Por tanto B puede ser contenido en el interior del triángulo considerado. Como este triángulo es cualquier triángulo circunscrito a C', resulta que, según la hipótesis, B debe poder ser contenida en C'. Pero como C' tiene radio menor que C esto contradice el hecho de haber supuesto que C era el círculo de menor radio que contiene a B. Resulta, pues, que C no puede ser distinto de B, o sea que esta última figura es un círculo.

4. Otros problemas. (4) — *a*) El teorema anterior lleva consigo, de manera natural, el preguntarse: si en lugar de un círculo consideramos otra figura convexa plana Q, ¿no será posible determinar para ella un número n tal que si Q puede estar contenida en todo polígono convexo de n lados que contenga a K, también Q pueda estar contenida totalmente en K? En el caso estudiado Q es un círculo y $n = 3$.

No sabemos si hay figuras especiales para las cuales esto sea posible. Hay, sin embargo, casos en que no existe ningún número n que cumpla la condición anterior. Consideremos, por ejemplo, el caso de ser Q un cuadrado. Vamos a demostrar que, cualquiera que sea n, siempre se puede construir una figura convexa K tal que el cuadrado Q pueda estar contenido en todo n-gono convexo que contenga a K, y que sin embargo no pueda estar contenido en K.

Para la demostración necesitamos un sencillo lema. Supongamos sobre una circunferencia n puntos. Supongamos también la misma circunferencia dividida en ν arcos iguales de amplitud α $\left(\text{será } \alpha = \frac{2\pi}{\nu}\right)$. Tomemos que ν sea múltiplo de 4 y consideremos cada arco como parte de un grupo formado por 4 de ellos, cuyos puntos medios estén situados en los extremos de dos diámetros perpendiculares. El número de estos grupos sera $\frac{\nu}{4}$. Entonces, con tal de que sea $\frac{\nu}{4} > n$ $\left(\text{o sea } \alpha < \frac{\pi}{2n}\right)$ estaremos seguros de que hay algún grupo de 4 arcos en las condiciones dichas, tal que ninguno de ellos contiene ningún punto de los n dados sobre la circunferencia. Es decir: dados n puntos cualesquiera sobre una circunferencia, siempre existen 4 arcos de amplitud $\alpha < \frac{\pi}{2n}$,

---

(4) Relacionado con estos problemas y el anterior, ver L. M. Blumenthal, "*Some imbedding theorems and characterization problems of distance geometry*" Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 40, pág. 321, 1943.

cuyos puntos medios son extremos de diámetros perpendiculares y que no contienen ninguno de los n puntos. Este es el lema que queríamos demostrar.

Sentado el lema, supongamos un cuadrado $A_1A_2A_3A_4$ que representaremos por Q. Tracemos una circunferencia C que tenga el mismo centro que Q y tal que deje a los vértices A_i exteriores y de manera que los puntos de contacto de las tangentes a C desde A_i determinen arcos de amplitud $\alpha < \frac{\pi}{2n}$. Decimos que el círculo C es el ejemplo buscado de figura convexa tal que no puede contener a Q en su interior y sin embargo Q puede colocarse en el interior de cualquier polígono convexo de n lados que contenga a C.

En efecto: 1° Que C no puede contener a Q es evidente. 2° De los polígonos convexos de n lados que contienen a C bastará considerar los circunscritos; cualquier n-gono circunscrito a C, según el lema, puede colocarse, por rotación alrededor del centro, de manera que sus puntos de contacto queden todos fuera de los 4 arcos α determinados por las tangentes a C desde los vértices A_i; en esta posición queda Q contenido en él.

b) Otra pregunta natural es la siguiente: ¿existe un número n tal que del hecho de saber que dos figuras convexas P y Q son tales que cada una de ellas pueda estar contenida en el interior de todo polígono convexo de n lados que contenga a la otra se pueda deducir que P y Q son congruentes?

Es fácil ver que la respuesta es negativa. Tomemos por P un círculo y por Q el mismo círculo más la parte de plano comprendida entre su circunferencia y dos tangentes tales que el arco comprendido entre sus puntos de contacto sea $\alpha < \frac{2\pi}{n}$. Es evidente que el círculo P puede colocarse en el interior de cualquier n-gono que que contenga a Q. Viceversa, dado un polígono de n lados que contenga a P, consideremos el homotético circunscrito; sobre la circunferencia de P tendremos los n puntos de contacto y por ser $\alpha < \frac{2\pi}{n}$ habrá un arco de amplitud α sin ninguno de ellos; colocando Q sobre P de manera que este arco coincida con el arco sobre el cual se construyó el triángulo curvilíneo que diferencia Q de P, resulta Q contenido en el interior del n-gono circunscrito. Sin embargo P y Q no son congruentes.

Luis A. Santaló.